

32. Ulusal Bilim Olimpiyatları  
Ortaokul Matematik İkinci Aşama Sınavı

17 Aralık 2024

---

---

1.  $3^{a5^b} - 2024$  ifadesinin bir pozitif tam sayının karesine eşit olmasını sağlayan tüm  $(a, b)$  negatif olmayan tam sayı ikililerini bulunuz.

2. Bir  $ABC$  üçgeninin iç bölgesinde bulunan  $P$  ve  $Q$  noktaları  $\angle APB = \angle AQC$  ve  $\angle APC = \angle AQB$  koşullarını sağlıyor.  $APQ$  üçgeninin çevrel çemberinin  $AB$  ve  $AC$  kenarları ile ikinci kez kesiştiği noktalar sırasıyla  $K$  ve  $L$  olsun.  $B, C, L, K$  noktalarının çemberdeş olduğunu gösteriniz.

3.  $n \geq 2$  bir pozitif tam sayı olmak üzere,  $a_1, a_2, \dots, a_n$  birbirinden farklı pozitif gerçel sayılar olsun.  $C_1, C_2, \dots, C_n$  şehirlerinden oluşan bir ülkede, her  $(i, j)$  ikilisi için  $C_i$  ve  $C_j$  şehirleri arasında bir çift yönlü uçak seferi vardır. Her  $(i, j)$  ikilisi için  $C_i$  ile  $C_j$  şehirleri arasındaki uçak seferinin ücreti  $a_i + a_j$  dir. Bu ülkedeki bir gezgin, kullandığı her uçak seferinin ücreti bir önceki uçak seferinin ücretinden fazla olacak şekilde bir yolculuk yapmıştır. Buna göre, bu gezginin yaptığı uçak seferi sayısının alabileceği en büyük değeri bulunuz.

4.  $n \geq 2$  bir pozitif tam sayı ve  $a_1, a_2, \dots, a_n > 1$  gerçel sayılar olmak üzere,

$$\prod_{i=1}^n \left( a_i a_{i+1} - \frac{1}{a_i a_{i+1}} \right) \geq 2^n \prod_{i=1}^n \left( a_i - \frac{1}{a_i} \right)$$

olduğunu gösteriniz (burada,  $a_{n+1} = a_1$  alınıyor).