



TÜBİTAK

**TÜRKİYE BİLİMSEL VE TEKNOLOJİK ARAŞTIRMA KURUMU
BİLİM İNSANI DESTEK PROGRAMLARI BAŞKANLIĞI**

**33. ULUSAL BİLİM OLİMPİYATLARI - 2025
BİRİNCİ AŞAMA SINAVI
MATEMATİK**

Soru Kitapçığı Türü

A

17 Mayıs 2025 Cumartesi, 09.30-12.30

ÇÖZÜMLER

1. Bir ABC üçgeninin diklik merkezi H ve ağırlık merkezi G olmak üzere, $|BH| = 3\sqrt{2}$, $|CH| = 6$ ve $m(\widehat{BHC}) = 135^\circ$ ise, $|GH|$ kaçtır?

- a) $1 + \sqrt{2}$ b) $2\sqrt{3} - 2$ c) 1 d) $3\sqrt{2} - 3$ e) 2

Cevap: 2. AB kenarının orta noktası M , C den AB ye inilen dikme ayağı F olsun. $m(\widehat{BHF}) = 45^\circ$ olduğu için $|HF| = 3$ elde edilir. G noktası ağırlık merkezi olduğu için $2|GM| = |CM|$ olur. $2|FC| = |CH|$ ve $2|GM| = |CM|$ olduğu için Thales teoreminden $FM \parallel AB$ ve $\frac{|HG|}{|FM|} = \frac{2}{3}$ elde edilir. $BH \perp AC$ ve $m(\widehat{HBF}) = 45^\circ$ olduğu için $m(\widehat{BAC}) = 45^\circ$ ve $|FA| = |FC| = 9$ elde edilir. Bu durumda $|AB| = 12$ ve $|MA| = |MB| = 6$ olacağı için $|FM| = 3$ ve $|GH| = 2$ bulunur.

2. $1^3 + 2^3 + \dots + n^3$ sayısının 2025 ile bölünmesini sağlayan kaç $n < 2025$ pozitif tam sayısı vardır?

- a) 44 b) 89 c) 134 d) 179 e) 224

Cevap: 179. $1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$ olduğu için bu sayının $2025 = 45^2$ ile bölünmesi için $\frac{n(n+1)}{2}$ sayısının 45 ile bölünmesi gerekir. Bu da $n(n+1)$ sayısının 90 ile bölünmesi anlamına gelir. Bunun için de $n \equiv 0, 1 \pmod{2}$, $n \equiv 0, 4 \pmod{5}$ ve $n \equiv 0, 8 \pmod{9}$ koşullarının tümü sağlanmalıdır. Bu durumda, n için $\pmod{90}$ da 0, 9, 35, 44, 45, 54, 80, 89 olmak üzere 8 farklı çözüm elde edilir. $2025 = 90 \times 22 + 45$ olduğu için, $[1, 1980]$ aralığındaki ardışık her 90 sayı için 8 çözüm ve $[1981, 2024]$ aralığındaki sayılar için toplam 3 çözüm gelir. Buradan da sorudaki koşulu sağlayan toplam $8 \times 22 + 3 = 179$ çözüm bulunur.

3. m ve n tam sayılar olmak üzere, $f(f(360)) = 0$ koşulunu sağlayan kaç $f(x) = x^2 + mx + n$ polinomu vardır?

- a) 1 b) 18 c) 48 d) 60 e) Hiçbiri

Cevap: 48. $f(360) = t$ olsun. O zaman $f(360)$ bu polinomun bir kökü olduğundan, iki kökü olan $f(x)$ polinomu $f(x) = (x - t)(x - s)$ şeklinde gösterilebilir. Burada $x = 360$ yazarsak $t = (360 - t)(360 - s)$ elde ederiz. Buradan $s = 361 - \frac{360}{360 - t}$ gelir. $t + s = -m$ ve m, t sayıları tam sayılar olduğundan s bir tam sayıdır. Sonuç olarak, $360 - t$ sayısı 360 sayısının bölmelidir. Buradan 360 sayısının böleni kadar farklı (t, s) , dolayısıyla farklı

(m, n) ikilisi elde edilir. $360 = 2^3 \times 3^2 \times 5$ olduğundan negatif bölenleri de göz önünde bulundurursak 360 sayısının $2 \times 4 \times 3 \times 2 = 48$ böleni bulunur.

4. 6 farklı şapkası olan bir kişi, ardışık 6 gün boyunca her gün bu şapkalardan birini takmıştır. Bu kişi, herhangi iki ardışık günde farklı şapka takmıştır, fakat ilk ve son günlerde aynı şapkayı takmıştır. Buna göre, bu kişi bu 6 günde şapkaları kaç farklı sırayla takabilir?

a) 1920 b) 2520 c) 3120 d) 3720 e) 4320

Cevap: 3120. İlk ve son gün kullanılan şapkayı A ile gösterelim. Eğer kalan günlerde A şapkası kullanılmıyorsa, bu kişi $5 \times 4 \times 4 \times 4 = 320$ farklı şekilde şapka takmış olabilir. A şapkası bir kere daha kullanılıyorsa, ikinci veya beşinci günlerde kullanılamaz. Dolayısıyla, eğer bir gün daha A şapkasını kullanıyorsa üçüncü veya dördüncü günde kullanabilir. Bu iki durum birbiriyle simetriktir. Bu durumların herhangi birinde $5 \times 5 \times 4 = 100$ farklı şekilde şapka takılabileceği için toplamda $320 + 100 + 100 = 520$ farklı şekilde şapka takmış olabilir. Son olarak, A şapkası 6 farklı şekilde seçilebileceği için cevap $6 \cdot 520 = 3120$ olur.

5. Tüm köşeleri aynı çember üzerinde yer alan bir $ABCDE$ beşgeninde $AB \parallel CE$ ve $AC \parallel DE$ koşulları sağlanıyor. AB ve CD doğrularının kesişim noktası F olmak üzere, $|CF| = 8$, $|CD| = 12$ ve $|DE| = 30$ ise, $|AC|$ kaçtır?

a) 15 b) 18 c) 20 d) 36 e) 45

Cevap: 20. $ABCE$ ve $ACDE$ dörtgenleri çembersel yamuk olduğu için ikizkenar yamuklardır. Buna göre, $|AC| = |BE|$ ve $|CD| = |AE| = |BC| = 12$ elde edilir. Çemberde açılardan $m(\widehat{BED}) = m(\widehat{BCF})$ ve $m(\widehat{BDE}) = m(\widehat{BCE}) = m(\widehat{FBC})$ olduğu için $\triangle BED \sim \triangle FCB$ gelir. $\frac{|BE|}{|DE|} = \frac{|FC|}{|BC|} = \frac{8}{12}$ olduğu için $|BE| = |AC| = 20$ bulunur.

6. $n = 195, 196, 197, 198, 199, 200$ sayılarından kaç tanesi için

$$1^n + 2^{n-1} + 3^{n-2} + \dots + n^1$$

sayısı 3 ile bölünür?

a) 2 b) 3 c) 4 d) 5 e) 6

Cevap: 4. Verilen toplamdaki ardışık herhangi 6 terimin ele alalım. Bu sayıların arasında 3 ile bölünen 2 sayı, 3 ile bölümünden kalan 1 olan 2 sayı ve 3 ile bölümünden kalan 2 olan 2 sayı vardır. Ayrıca, 3 ile bölümünden kalanı 2 olan sayıların kuvvetleri arasındaki fark 3'tür, dolayısıyla biri tek biri çifttir. Bu sebeple, ardışık herhangi 6 terimin toplamının 3 ile bölümünden kalan 2 bulunur. $S_n = 1^n + 2^{n-1} + 3^{n-2} + \dots + n^1$ olsun.

$n = 195$ için, bu toplamı son 192 terimi ardışık 6'lılardan oluşan 32 gruba bölüp öyle hesaplayalım. $S_n \equiv 1^{195} + 2^{194} + 3^{193} + 2 \cdot 32 \equiv 1 + 1 + 0 + 64 \equiv 0 \pmod{3}$ bulunur ve $n = 195$ istenen koşulu sağlar.

$n = 196$ için aynı şekilde hesaplanırsa $S_n \equiv 1^{196} + 2^{195} + 3^{194} + 4^{193} + 2 \cdot 32 \equiv 1 + 2 + 0 + 1 + 64 \equiv 2 \pmod{3}$ bulunur ve $n = 196$ istenen koşulu sağlamaz.

$n = 197$ için aynı şekilde hesaplanırsa, $S_n \equiv 1^{197} + 2^{196} + 3^{195} + 4^{194} + 5^{193} + 2 \cdot 32 \equiv 1 + 1 + 0 + 1 + 2 + 64 \equiv 0 \pmod{3}$ bulunur ve $n = 197$ istenen koşulu sağlar.

$n = 198$ için, ardışık 6'lılardan oluşan 33 gruba bölüp hesaplırsak $S_n \equiv 2 \cdot 33 \equiv 0 \pmod{3}$ bulunur ve $n = 198$ istenen koşulu sağlar.

$n = 199$ için, aynı şekilde hesaplırsak toplam $S_n = 1^{199} + 2 \cdot 33 \equiv 1 \pmod{3}$ bulunur ve $n = 199$ istenen koşulu sağlamaz.

$n = 200$ için, aynı şekilde hesaplırsak toplam $S_n = 1^{200} + 2^{199} + 2 \cdot 33 \equiv 1 + 2 \equiv 0 \pmod{3}$ bulunur ve $n = 200$ istenen koşulu sağlar.

Böylece bu sayılardan 4 tanesi istenen koşulu sağlar.

7. Kaç a pozitif tam sayısı için $P(x) = x^6 - 6x^5 + 12x^4 - ax^3 + 12x^2 - 6x + 1$ polinomunun pozitif gerçel kökü yoktur?

- a) 10 b) 11 c) 12 d) 13 e) Hiçbiri

Cevap: 11. $y = x + \frac{1}{x}$ olsun. $x = 0$ bu polinomun bir kökü değildir, $x \neq 0$

için bu polinomu x^3 ile bölelim. $x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 = y^2 - 2$ ve

$x^3 + \frac{1}{x^3} = \left(x + \frac{1}{x}\right)\left(x^2 + \frac{1}{x^2} - 1\right) = y(y^2 - 3) = y^3 - 3y$ olduğu için

$$\frac{P(x)}{x^3} = (y^3 - 3y) - 6(y^2 - 2) + 12y - a = y(y - 3)^2 + 12 - a$$

olur. $a < 12$ için bu ifade her zaman pozitif olacağından dolayı $P(x)$ polinomunun pozitif gerçel kökü olamaz. $a \geq 12$ için, $Q(y) = y(y - 3)^2 + 12 - a$ polinomu $y = 3$ için pozitif olmadığından ve yeterince büyük y değerleri için pozitif olduğundan $Q(y)$ polinomunun bir $y_0 \geq 3$ kökü bulunur. Bu durumda $y_0 = x + \frac{1}{x}$ eşitliğini sağlayan bir x pozitif gerçel sayısı bulunur. Buna göre, cevap 11 olur.

8. 45×45 satranç tahtasının her birim kenarı kırmızı ve mavi renklerinden birine, her birim karenin kırmızı kenarlarının sayısı tek sayı olmak koşuluyla kaç farklı şekilde boyanabilir?

- a) 2^{2025} b) 2^{2115} c) $3^{2070} - 2^{2070}$ d) $3^{990} - 2^{990}$ e) 4^{2025}

Cevap: $2^{45 \times 47} = 2^{2115}$. Tahtadaki 45×46 tane yatay birim kenar ve en solda bulunan 45 tane dikey birim kenar iki renkten birine $2^{45 \times 47} = 2^{2115}$ farklı şekilde boyanabilir. Bu durumda en sol sütundaki birim karelerin 3 kenarının rengi ve diğer birim karelerin 2 kenarının rengi belirlenmiş olur. En sol sütundaki birim karelerin kalan 1 kenarının rengi tek türlü belirlenir. Bu birim kenarlar da boyandığında, ikinci sütundaki birim karelerin 3 kenarının rengi belirlenmiş olur. Benzer şekilde ilerlenirse, geriye kalan birim kenarların tek türlü boyanabileceği görülür. Buna göre, cevap 2^{2115} olur.

9. $\widehat{B}$ açısı dik olan bir ABC üçgeninin $[BC]$ kenarı üzerinde B ve C den farklı bir D noktası alınıyor. $[AD]$ doğru parçasının orta dikmesi $[AC]$ kenarını E noktasında kesiyor. $|AE| = 2|BD|$ ve $m(\widehat{EAD}) = 36^\circ$ ise, $m(\widehat{ACB})$ kaçtır?

- a) 18° b) 27° c) 30° d) 45° e) Hiçbiri

Cevap: 36° . D ve E noktalarının AB doğrusuna göre yansımaları sırasıyla K ve L olsun. Bu durumda $|AE| = |ED| = |DK| = |KL| = |LA|$ ve $m(\widehat{ALK}) = m(\widehat{AED}) = 108^\circ$ olacağı için $AEDKL$ düzgün bir beşgen olur. Dolayısıyla $m(\widehat{AED}) = m(\widehat{EDB}) = 108^\circ$ olduğu için $m(\widehat{ACB}) = 36^\circ$ olur.

10. $ebob(a, b) = 22!$ ve $ekok(a, b) = 33!$ koşullarını sağlayan kaç tane sıralı (a, b) pozitif tam sayı ikilisi vardır?

- a) 498 b) 504 c) 512 d) 524 e) 532

Cevap: 512. $22!$ ve $33!$ sayılarını asal çarpanlarına ayıralım. Bir p asal sayısı her iki gösterimde de aynı k kuvveti ile yer alıyorsa, hem a hem de b sayılarını bölen p nin en büyük kuvveti k olmalıdır. Öte yandan, bir p asal sayısı $22!$ gösteriminde m , $33!$ gösteriminde $n > m$ kuvveti ile bulunuyorsa p^n ve p^m çarpanları a ve b sayılarında herhangi bir sırayla bulunmalıdır. $22!$ ve $33!$ sayılarında farklı kuvvetle bulunan 9 asal sayı vardır: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 23, 29, 31. Buna göre, cevap 2^9 olur.

11. Gerçek sayılar kümesi $\mathbb{R}$ olmak üzere, bir $f : \mathbb{R} - \left\{-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right\} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu

her $x \neq -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}$ için $f\left(\frac{2x-4}{3x+2}\right) + f(x) = x$ koşulunu sağlıyorsa, $f(3)$ kaçtır?

- a) $\frac{11}{36}$ b) $\frac{13}{47}$ c) $\frac{24}{55}$ d) $\frac{67}{105}$ e) $\frac{107}{154}$

Cevap: $\frac{107}{154}$. x yerine 3 koyulursa $f\left(\frac{2}{11}\right) + f(3) = 3$ bulunur. x yerine $\frac{2}{11}$ koyulursa $f\left(-\frac{10}{7}\right) + f\left(\frac{2}{11}\right) = \frac{2}{11}$ bulunur. x yerine $-\frac{10}{7}$ koyulursa $f(3) + f\left(-\frac{10}{7}\right) = -\frac{10}{7}$ bulunur. Bu eşitlikler taraf tarafa toplanıp 2 ye bölünürse $f\left(\frac{2}{11}\right) + f(3) + f\left(-\frac{10}{7}\right) = \frac{3}{2} + \frac{1}{11} - \frac{5}{7}$ elde edilir. Buradan $f(3) = \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{11} - \frac{5}{7}\right) - \frac{2}{11} = \frac{107}{154}$ bulunur.

12. k bir pozitif tam sayı olmak üzere, 4×4 satranç tahtasının her birim karesine $1, 2, \dots, k$ sayılarından biri yazılmıştır. $1 \leq m < n \leq k$ koşulunu sağlayan her (m, n) ikilisi için hem m hem de n sayısını içeren bir satır veya bir sütun bulunuyorsa, k sayısının alabileceği en büyük değer kaçtır?

- a) 5 b) 6 c) 7 d) 8 e) 9

Cevap: 8. $k \geq 9$ ise, Güvercin Yuvası prensibinden dolayı tahtada sadece bir kere kullanılan bir n sayısı bulunmaktadır. Bu durumda n sayısı ile aynı satır veya aynı sütunda bulunan farklı sayı sayısı en fazla $3 + 3 = 6$ olabilir, $6 < 8$ olduğundan n sayısı ile aynı satır veya sütunda yer almayan bir sayı bulunmalıdır. $k = 8$ için bir örnek verelim: soldan sağa doğru birinci satırdaki sayılar 1,2,3,4, ikinci satırdaki sayılar 7,1,5,6, üçüncü satırdaki sayılar 8,6,2,3 dördüncü satırdaki sayılar 5,4,7,8 olursa koşullar sağlanır.

13. Bir ABC üçgeninde $|AB| = 2$ ve $|AC| = 1$ olsun. AB doğrusuna göre C ile farklı tarafta yer alan bir M noktası, $m(\widehat{MAB}) = 90^\circ$ ve $|MA| = |AB|$ koşullarını sağlıyor. AC doğrusuna göre B ile farklı tarafta yer alan bir N noktası, $m(\widehat{NAC}) = 90^\circ$ ve $|NA| = |AC|$ koşullarını sağlıyor. MNA üçgeninin çevrel çemberinin merkezi O olsun. OA ve BC doğruları D noktasında kesişiyorsa $\frac{|BD|}{|CD|}$ kaçtır?

- a) $\frac{1}{2}$ b) 1 c) $\sqrt{2}$ d) 2 e) 4

Cevap: 4. $m(\widehat{BAD}) = \alpha$ ve $m(\widehat{CAD}) = \beta$ olsun. $m(\widehat{MAO}) = 90^\circ - \alpha$, $m(\widehat{MOA}) = 2\alpha$, ve $m(\widehat{MNA}) = \alpha$ olur. Benzer şekilde $m(\widehat{NMA}) = \beta$ olur. OD doğrusu üzerinde $BE \parallel AC$ olan E alalım. $m(\widehat{BEA}) = m(\widehat{CAD}) = \beta$

olduğu için AEB ve NMA üçgenleri benzerdir. Bu durumda $|BE| = 4$ bulunur. Thales teoreminden $\frac{|BD|}{|CD|} = 4$ elde edilir.

14. Kaç $n \leq 2025$ pozitif tam sayısı için $3^x - 5^y$ sayısının n ile bölünmesini sağlayan x ve y pozitif tam sayıları bulunmaz?

a) 405 b) 675 c) 945 d) 1020 e) 1050

Cevap: 945. n sayısı 3 veya 5 ile bölünüyorsa $3^x - 5^y$ sayısı 3 veya 5 ile bölünemeyeceği için n ile de bölünmez. Diğer taraftan, n sayısı hem 3 hem de 5 ile bölünmüyorsa, $x = y = \varphi(n)$ alalım. Fermat teoreminden $3^{\varphi(n)} \equiv 5^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$ olacağı için $3^x - 5^y$ sayısı n ile bölünür. Buna göre, n sayısı 3 veya 5 ile bölünmelidir. $n \leq 2025$ olan ve 3 veya 5 ile bölünen n pozitif tam sayılarının sayısı $\frac{2025}{3} + \frac{2025}{5} - \frac{2025}{15} = 945$ olur.

15. $a_0, a_1, a_2, \dots$ gerçel sayı dizisi $a_0 = 3$ ve her $n \geq 1$ için

$$\frac{a_n + 1}{n} = \frac{a_{n-1}^2}{n} + 2a_{n-1} + n - 1$$

olacak şekilde tanımlanıyor. k bir pozitif tam sayı olmak üzere, $|a_{2025} - 2^k|$ ifadesinin alabileceği en küçük değer kaçtır?

a) 2023 b) 2024 c) 2025 d) 2026 e) 2027

Cevap: 2026. Verilen eşitliğin her iki tarafı da n ile çarpılıp her iki tarafa da n eklenirse $a_n + n + 1 = (a_{n-1} + n)^2$ elde edilir. $b_n = a_n + n + 1$ olarak tanımlanırsa $b_0 = a_0 + 1 = 4$ ve $b_n = b_{n-1}^2$ bulunur. Buradan $b_{2025} = 4^{2^{2025}} = 2^{2^{2026}}$ ve $a_{2025} = b_{2025} - 2026$ elde edilir. Sonuç olarak $|a_{2025} - 2^k| = |2^{2^{2026}} - 2026 - 2^k|$ ifadesi en küçük değerini $k = 2^{2026}$ durumunda alır ve cevap 2026 olur.

16. 15×15 satranç tahtasının bazı birim kareleri işaretlenmiştir. Bir satırdaki işaretlenmiş birim kare sayısı bir sütundaki işaretlenmiş birim kare sayısından fazla ise, bu satır ve sütunun kesişimindeki birim kareye *mutlu* diyelim. Tahtadaki mutlu birim kare sayısı tam olarak 112 ise, işaretlenmiş birim kare sayısı en fazla kaç olabilir?

a) 113 b) 187 c) 201 d) 217 e) Hiçbiri

Cevap: 217. Birinci satırdaki ilk 8 birim kare dışındaki 217 birim kare işaretlenirse, mutlu kareler sadece ilk 8 sütunda bulunup birinci satırda

bulunmayan $8 \cdot 14 = 112$ birim kare olacaktır. Öte yandan, işaretlenmiş birim kare sayısı en az 218 olursa, en az 8 sütunun tüm birim kareleri işaretlenmiş olacak ve dolayısıyla bu sütunlardaki $8 \cdot 15 = 120$ birim kare mutlu kare olmayacaktır. Böylece 112 mutlu birim kare bulunması mümkün değildir.

17. Bir ABC üçgeninin $[AB]$ ve $[AC]$ kenarlarının orta noktalarından geçen ve $[BC]$ kenarına D noktasında teğet olan bir çember, $[BA]$ ve $[CA]$ ışınları ile üçgenin kenarları dışında sırasıyla E ve F noktalarında kesişiyor. $|BD| = 6\sqrt{3}$, $|CD| = 18$ ve $|CF| = 27$ ise $|BE|$ kaçtır?

- a) $9\sqrt{3}$ b) $12\sqrt{3}$ c) $3\sqrt{6}$ d) 27 e) Hiçbiri

Cevap: 18. AB ve AC kenarlarının orta noktaları sırasıyla M ve N olsun. C noktasının M , N , D noktalarından geçen çembere göre kuvvetinden $|CD|^2 = |CN||CF|$ elde edilir, soruda verilen kenar uzunluklarından dolayı $|CN| = 12$ gelir. $|AN| = |CN| = 12$ olduğundan $|AF| = 3$ olur. $|MA| = |MB| = a$ ve $|AE| = b$ olsun. Sırasıyla A ve B noktalarının aynı çembere göre kuvvetlerinden $ab = 36$ ve $a(2a + b) = 108$ elde edilir. Buradan $a = b = 6$ ve $|BE| = 18$ bulunur.

18. Çevresi 101 birim olan bir çember üzerinde bir karınca bulunmaktadır. Bu karınca, saat yönünde çember yayı boyunca 1 birim ilerleyip mola veriyor, daha sonra 2 birim ilerleyip mola veriyor, ..., son olarak 2025 birim ilerleyip mola veriyor. Buna göre, bu karınca çember üzerinde kaç farklı noktada mola vermiştir?

- a) 51 b) 56 c) 64 d) 72 e) 81

Cevap: 51. $n = 1, 2, \dots$ için $a_n = 1 + 2 + \dots + n$ dizisini tanımlayalım. m numaralı kutuya bilye yerleştirilmesi için bir n için $m = a_n \pmod{101}$ olması gerekiyor. $\{b_n = a_n \pmod{101}\}$ dizisinin kaç farklı değer aldığını bulalım. $k > l$ olmak üzere,

$$a_k - a_l = \frac{1}{2}(k + l + 1)(k - l)$$

ve 101 asal sayı olduğundan $b_k = b_l$ olması için $101|(k + l + 1)(k - l)$ olması gerekiyor. $101|k - l$ durumunda $b_k = b_l$ oluyor, bu nedenle $n = 1, 2, \dots, 101$ indislerini incelememiz yeterli olacaktır. Buna göre, $b_k = b_l$ olması için $101|k + l + 1$ olması gerekiyor. Buradan sadece $(l, k) = (1, 99), (2, 98), \dots, (49, 51), (100, 101)$ ise $b_k = b_l$ olduğu elde ediliyor. Sonuç olarak boş olmayan kutu sayısı 51 olur.

19. k bir tam sayı olmak üzere,

$$\left\lfloor \frac{k+1}{2025} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{k+2}{2025} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor \frac{k+2024}{2025} \right\rfloor = 2025!$$

denkleminin kaç farklı çözümü vardır? (Bir x gerçel sayısı için, $\lfloor x \rfloor$ ile x sayısından büyük olmayan en büyük tam sayı gösteriliyor.)

- a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) Hiçbiri

Cevap: 2. p bir pozitif tam sayı olmak üzere

$$\left\lfloor \frac{k}{p} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{k+1}{p} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor \frac{k+(p-1)}{p} \right\rfloor = k$$

olduğunu gösterelim. $k = pn + m$ olsun. O zaman

$$\left\lfloor \frac{k}{p} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{k+1}{p} \right\rfloor, \dots, \left\lfloor \frac{k+(p-m-1)}{p} \right\rfloor$$

sayılarının her biri n olur. Benzer şekilde

$$\left\lfloor \frac{k+(p-m)}{p} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{k+(p-m+1)}{p} \right\rfloor, \dots, \left\lfloor \frac{k+(p-1)}{p} \right\rfloor$$

sayılarının her biri $n+1$ olur. Dolayısıyla

$$\left\lfloor \frac{k}{p} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{k+1}{p} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor \frac{k+(p-1)}{p} \right\rfloor = k$$

olur. Bu özdeşliği soruda kullanırsak, $k = 2025a + b$ ve $0 \leq b \leq 2024$ olmak üzere,

$$\left\lfloor \frac{k+1}{2025} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{k+2}{2025} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor \frac{k+2024}{2025} \right\rfloor = k - \left\lfloor \frac{k}{2025} \right\rfloor = 2024a + b = 2025!$$

bulunur. $2024 \mid 2025!$ olduğu için, ya $b = 0$ ya da $b = 2024$ olmalıdır ve her iki durum için de uygun a sayısı bulunur. Dolayısıyla bu denklemin 2 farklı çözümü bulunur.

20. $(m, n) = (32, 33), (20, 25), (10, 40), (19, 21), (77, 99)$ ikililerinin kaç tanesi için $m \times n$ boyutlarındaki bir satranç tahtasının her birim karesi kırmızı ve mavi renklerinden birine, her birim karenin kendisiyle aynı renkte olan ve kendisiyle ortak kenar veya ortak köşe paylaşan birim karelerin sayısı tek sayı olacak şekilde boyanabilir?

- a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

Cevap: 3. Uygun boyamanın sadece m ve n sayılarının en az birinin çift sayı olduğu durumda yapılabilabileceğini gösterelim. Boyama yapıldıktan sonra, köşeleri satranç tahtasının birim karelerini temsil eden bir çizge tanımlayalım. Bu çizgede, ortak kenar veya ortak köşe paylaşan aynı renkli birim kareleri temsil eden köşelerin arasına kenar çizelim. Bu durumda her köşenin derecesi tek sayı olacaktır. Her çizgede tüm derecelerin toplamı çift olduğuna göre, köşe sayısı mn çift sayı olmak zorundadır. Şimdi de, genelliği bozmadan $m = 2k$ durumunda gereken boyamanın yapılabilabileceğini gösterelim. Satranç tahtasını $2 \times n$ boyutlarında k şeride ayırıp bu şeritleri dönüşümlü olarak bir kırmızı bir mavi renge boyarsak koşullar sağlanmış olur.

21. $\widehat{B}$ açısı dik olan bir ABC üçgeninin iç teğet çemberi $[AB]$ ve $[AC]$ kenarlarına sırasıyla D ve E noktalarında teğettir. ED ve BC doğrularının kesişim noktası F olmak üzere, $|FD| = 25$ ve $|DE| = 24$ ise, $|AE|$ kaçtır?

- a) 16 b) 18 c) 20 d) 24 e) 35

Cevap: 20. İç teğet çemberin BC ye teğet olduğu nokta K olsun. Kuvvetten $|FK| = 35$ gelir. Pisagorun sağlanması için $|BF| = 20$ ve $|DB| = 15$ olabilir, veya $|BF| = 15$ ve $|DB| = 20$ olabilir. İki durum için de AID üçgeninde Öklid uygularsak, $|AD| = 20$ veya $|AD| = 15$ gelir. $|AD| > |DB|$ olduğu için sadece $|AE| = |AD| = 20$ durumu mümkündür. Bu durum 35-120-125 dik üçgeninde olasıdır.

22. n pozitif tam sayısının en büyük tek böleni $f(n)$ olmak üzere,

$$f(25) + f(26) + f(27) + \cdots + f(200)$$

toplamı kaçtır?

- a) 13150 b) 13250 c) 13350 d) 13450 e) 13550

Cevap: 13150. Tümevarımla her pozitif n tam sayısı için $A(n) = f(n+1) + f(n+2) + \cdots + f(2n) = n^2$ olduğunu gösterelim. $n = 1$ için eşitlik doğrudur. Eşitliğin n için doğru olduğunu varsayalım. O zaman, $f(n+1) = f(2n+2)$ olduğu için

$$\begin{aligned} A(n+1) &= A(n) - f(n+1) + f(2n+1) + f(2n+2) \\ &= n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2 \end{aligned}$$

elde edilir. Buna göre, cevap $A(100) + A(50) + A(25) + f(25) = 100^2 + 50^2 + 25^2 + 25 = 13150$ olur.

23. x, y, z pozitif gerçel sayıları

$$\begin{aligned}\frac{y^2}{z} + \frac{zx + x^2}{2y + z} &= 2x \\ \frac{x^2}{z} + \frac{zy + 2y^2}{x + z} &= 9y \\ \frac{y^2}{x} + \frac{x^2}{y} &= 9z\end{aligned}$$

denklem sistemini sağlıyorsa, $\frac{y}{x} + \frac{z}{y} + \frac{x}{z}$ kaçtır?

- a) $\frac{23}{6}$ b) $\frac{25}{6}$ c) $\frac{19}{4}$ d) 5 e) 7

Cevap: 5. İlk denklem $\frac{1}{x}$ ile, ikinci denklem $\frac{1}{y}$ ile çarpılıp denklemler taraf tarafa toplanırsa $\frac{y^2}{xz} + \frac{x^2}{yz} + \frac{x+z}{2y+z} + \frac{2y+z}{x+z} = 11$ elde edilir. Üçüncü denklem $\frac{1}{z}$ ile çarpılırsa $\frac{y^2}{xz} + \frac{x^2}{yz} = 9$ elde edilir. Bulunan bu iki eşitlikten $\frac{x+z}{2y+z} + \frac{2y+z}{x+z} = 2$ gelir. Aritmetik-Geometrik ortalama eşitsizliğine göre $\frac{x+z}{2y+z} + \frac{2y+z}{x+z} \geq 2$ dir, eşitlik durumu sağlandığı için $\frac{x+z}{2y+z} = \frac{2y+z}{x+z}$ olmalıdır. Buradan $x = 2y$ gelir ve üçüncü denklemden $y = 2z$ bulunur. Buna göre, $\frac{y}{x} + \frac{z}{y} + \frac{x}{z} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 4 = 5$ olur.

24. n bir pozitif tam sayı olmak üzere, 3 ile bölünen ve basamaklarının her biri ya 1 ya da 2 olan n basamaklı pozitif tam sayıların sayısı $f(n)$ olsun. $f(101) - f(99)$ kaçtır?

- a) $2^{100} - 2^{98}$ b) 2^{99} c) $2^{99} - 1$ d) $2^{98} + 2^{96}$ e) $2^{98} + 1$

Cevap: 2^{99} . $n - 2$ basamaklı bir sayı 3 ile bölünüyorsa bu sayısının sağına sadece 12 ya da 21 ekleyerek 3 ile bölünen n basamaklı sayı elde edebiliriz. $n - 2$ basamaklı bir sayı (mod 3) de 1 ise bu sayısının sağına sadece 11 ekleyerek 3 ile bölünen n basamaklı sayı elde edebiliriz. $n - 2$ basamaklı bir sayı (mod 3) de 2 ise bu sayısının sağına sadece 22 ekleyerek 3 ile bölünen n basamaklı sayı elde edebiliriz. n basamaklı toplam 2^n sayı olduğundan her $n \geq 2$ için

$$f(n) = 2f(n-2) + (2^{n-2} - f(n-2)) = f(n-2) + 2^{n-2}$$

elde ederiz. Buna göre, $f(101) - f(99) = 2^{99}$ olur.

25. Bir $ABCD$ dikdörtgeninde $|AB| > |BC|$ olsun. D noktasından geçen ve AB doğrusuna B noktasında teğet olan çember AD doğrusunu ikinci kez

E noktasında kesiyor. BE ve CD doğrularının kesişim noktası F olmak üzere, $\frac{|FC|}{|FD|} = \frac{9}{7}$ ise, $\frac{|EC|}{|AF|}$ kaçtır?

- a) $\frac{7}{9}$ b) 1 c) $\frac{5}{4}$ d) $\frac{4}{3}$ e) $\frac{3}{2}$

Cevap: $\frac{4}{3}$. $|FD| = 35k$ ve $|FC| = 45k$ olsun. $m(\widehat{AEB}) = m(\widehat{DBA}) = m(\widehat{DCA})$ olduğu için $EB \perp AC$ olur. Buradan $\triangle EDC \sim \triangle EDA$ elde edilir. Dolayısıyla soruda istenen oranı bulmak için $\frac{|CD|}{|AD|}$ oranını bulmak yeterlidir. AC ve FB doğruları G de kesişsin. $\frac{|GF|}{|GB|} = \frac{9}{16}$ olduğu için Öklid Teoreminden $|FG| = 27k$, $|GC| = 36k$, $|GB| = 48k$ ve $|BC| = 60k$ olur. Cevap $\frac{80k}{60k} = \frac{4}{3}$ olur.

26. p bir asal sayı olmak üzere, $x + p^2 \mid x^3 + p^4$ koşulunu sağlayan x tam sayılarının sayısı $f(p)$ olsun. $m = 150, 160, 170, 180, 190$ sayılarından kaç tanesi için $f(p) = m$ olacak şekilde bir p asal sayısı bulunur?

- a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

Cevap: 2. $x + p^2 \mid x^3 + p^6$ olduğu için $x + p^2 \mid p^4(p^2 - 1)$ sağlanır. Bunu sağlayan x sayılarının sayısı tam olarak $p^4(p^2 - 1)$ sayısının bölen sayısına eşittir. $d(n)$ ile n sayısının pozitif bölen sayısı gösterilmek üzere, aradığımız değer $2d(p^4(p^2 - 1)) = 10d(p^2 - 1)$ sayısına eşittir. $p > 1$ olduğu için $p^2 - 1$ bir tamkareye eşit olamaz, pozitif bölen sayısı tek olan sayılar yalnızca tamkare sayılar oldukları için $f(p)$ sayısı 150, 170 veya 190 olamaz. $p = 13$ için $p^2 - 1 = 168 = 2^3 \cdot 3 \cdot 7$ sayısının 16 pozitif böleni vardır. $p = 17$ için $p^2 - 1 = 288 = 2^5 \cdot 3^2$ sayısının 18 pozitif böleni vardır. Bu nedenle $f(13) = 160$ ve $f(17) = 180$ olur. Buna göre, cevap 2 dir.

27. Başlangıçta bir mavi kavanozda %99'u nar suyu, %1'i portakal suyu olan 1 litre homojen sıvı ve bir yeşil kavanozda %1'i nar suyu, %99'u portakal suyu olan 2 litre homojen sıvı bulunmaktadır. Her işlemde önce yeşil kavanozdan mavi kavanoza 1 litre sıvı aktarılıp homojen bir sıvı elde edilene kadar karıştırılıyor ve bundan sonra mavi kavanozdan yeşil kavanoza 1 litre sıvı aktarılıp homojen bir sıvı elde edilene kadar karıştırılıyor. En az kaç işlem sonucunda mavi kavanozdaki nar suyu yüzdesi ile yeşil kavanozdaki nar suyu yüzdesinin farkı %0.1'den daha az olur?

- a) 4 b) 5 c) 6 d) 7 e) 8

Cevap: 5. Bir işlem öncesinde mavi kavanozdaki nar suyu oranı c_1 ve yeşil kavanozdaki nar suyu oranı c_2 olsun. Bir hamledeki ilk aktarmadan sonra mavi kavanozda $c'_1 = \frac{c_1 + c_2}{2}$ oranında nar suyu olur, ikinci aktarmadan sonra yeşil kavanozda $c'_2 = \frac{(c_1 + c_2)/2 + c_2}{2} = \frac{c_1 + 3c_2}{4}$ oranında nar suyu olur. Buna göre, $c'_1 - c'_2 = \frac{c_1 - c_2}{4}$ olur. Dolayısıyla k işlem sonucunda mavi kavanozdaki ve yeşil kavanozdaki nar suyu oranlarının farkı $\frac{c_1 - c_2}{4^k} = \frac{0.99 - 0.01}{4^k}$ olur. Buna göre, cevap $\frac{0.99 - 0.01}{4^k} < 0.001$ eşitsizliğini sağlayan en küçük k değeri olmalıdır, buradan $k = 5$ bulunur.

28. Çevresi 25 birim olan bir çember üzerinde 25 nokta, bu noktalar bir düzgün 25-genin köşeleri olacak şekilde işaretlenmiştir ve bu noktalardan k tanesi kırmızıya boyanmıştır. Bu boyama nasıl yapılırsa yapılsın aralarındaki küçük yayın uzunluğu 5 birim olan iki kırmızı nokta bulunabiliyorsa, k sayısının alabileceği en küçük değer kaçtır?

- a) 10 b) 11 c) 12 d) 13 e) 14

Cevap: 11. Çember üzerindeki noktaları sırasıyla $1, 2, \dots, 25$ olarak numaralandıralım. $k \leq 10$ durumunda kırmızı noktalar $1, 2, 3, 4, 5$ ve $11, 12, 13, 14, 15$ numaralı köşelerde bulunuyorsa sorudaki koşul sağlanmaz. Şimdi de $k = 11$ durumunda her zaman aralarındaki küçük yayın uzunluğu 5 olan iki kırmızı nokta bulunduğunu gösterelim. Bu 25-genin köşelerini 5 tane düzgün beşgenin köşelerinin birleşimi olarak ele alalım. $k = 11$ durumunda Güvercin Yuvası prensibinden dolayı kırmızı noktaların en az 3 tanesi aynı düzgün beşgenin köşelerinde bulunur ve bu kırmızı noktalardan ikisi bu beşgenin komşu köşelerinde yer alacağından sorudaki koşul sağlanır.

29. $ABCD$ kenar uzunluğu 3 olan bir kare olsun. ABC üçgeninin iç bölgesinde bir E noktası $m(\widehat{AEC}) = 135^\circ$ olacak şekilde alınıyor. BE ile CD doğrularının kesişim noktası F olmak üzere, $|CF| = 4$ ise, $|BE|$ kaçtır?

- a) $\frac{21 - 6\sqrt{6}}{5}$ b) $\frac{10 - 4\sqrt{2}}{3}$ c) $\frac{12\sqrt{3} - 15}{4}$ d) $\frac{5 - \sqrt{5}}{2}$ e) Hiçbiri

Cevap: $\frac{21 - 6\sqrt{6}}{5}$. C noktasının D noktasına göre yansıması G olsun. D merkezli 3 yarıçaplı çember C, E, A, G den geçer. BF doğrusunun çemberi

ikinci kez kestiği nokta H olsun. $BE = x$, $EF = 5 - x$, $FH = y$ olsun. F noktasına göre kuvvetten $y(5 - x) = 8$ ve B noktasına göre kuvvetten $x(5 + y) = 9$ bulunur. Taraf tarafa toplayınca $x + y = \frac{17}{5}$ bulunur. İkinci eşitlikte yerine koyarsak $x(\frac{42}{5} - x) = 9$ yani $5x^2 - 42x + 45 = 0$ ve buradan $x = \frac{42 \pm \sqrt{864}}{10}$ gelir. $BE < 3\sqrt{2}$ olduğu için $x = \frac{21 - 6\sqrt{6}}{5}$ bulunur.

30. $n^4 - 5n^3 + 26n^2 - 41n + 19$ ifadesinin bir asal sayının tam kuvvetine eşit olmasını sağlayan kaç n tam sayısı vardır?

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) Hiçbiri

Cevap 3. Sorudaki ifadeyi $(n-1)^2 \cdot (n^2 - 3n + 19)$ şeklinde yazalım. $ebob(n-1, n^2 - 3n + 19) = ebob(n-1, 17) = 1, 17$ elde edilir, dolayısıyla ya bu iki çarpandan birisinin mutlak değeri 1'e eşittir ya da her ikisi de 17'nin bir kuvvetidir. Eğer bunlardan birisi 1 ise, her n tam sayısı için $n^2 - 3n + 19 > 1$ olduğundan dolayı $|n-1| = 1$ olmalıdır. $n = 0$ için ifade 19, $n = 2$ için ifade 17 olur ve koşulu sağlar. Öte yandan, her iki ifade de 17'nin bir kuvveti ise, bu iki çarpanın en küçük ortak böleni 17^2 sayısını bölemeyeceği için bu sayıların en az biri ± 17 olmalıdır. $n^2 - 3n + 19 = \pm 17$ durumu yalnızca $n = 1$ için sağlanır, bu durumda ifade 0 olur ve bir asal kuvvet olmaz. $n-1 = \pm 17$ durumunda $n = 18$ veya $n = -16$ olmalıdır, bu iki sayıdan yalnızca $n = 18$ sorudaki koşulu sağlar. Böylece tüm çözümler $n = 0, 2, 18$ olur.

31. x ve y pozitif gerçel sayılar olmak üzere, $x^2 + xy + y^2 = 3$ ise, $x^3y + xy^3 + 6x^2 + 4xy + 6y^2$ ifadesinin alabileceği en büyük değer kaçtır?

a) 16 b) 18 c) $\frac{91}{5}$ d) $\frac{73}{4}$ e) Hiçbiri

Cevap: $\frac{73}{4}$. İfadeyi $(x^2 + y^2 + 4)(xy + 6) - 24$ şeklinde yazalım. Aritmetik-Geometrik ortalama eşitsizliğinden dolayı $3 = x^2 + xy + y^2 \geq 3xy$ ve $xy \leq 1$ elde edilir. Bir $a \in (0, 1)$ gerçel sayısı için $xy = 1 - a$ ve $x^2 + y^2 = 2 + a$ olur. Buna göre, sorudaki ifade $(6 + a)(7 - a) - 24$ olarak yazılabilir. Aritmetik-Geometrik ortalama eşitsizliğinden $(6 + a)(7 - a) \leq \left(\frac{6 + a + 7 - a}{2}\right)^2 = \frac{169}{4}$ elde edilir ve böylece $(6 + a)(7 - a) - 24 \leq \frac{73}{4}$ olur. Eşitlik durumu $a = \frac{1}{2}$ olduğunda sağlanır ve buna uygun x, y pozitif gerçel sayıları bulunur.

- 32.** Tahtaya, başlangıçta hiçbir birim karesi boyalı olmayan bir $1 \times N$ satranç tahtası çizilmiştir. A ve B oyuncularını sırayla hamle yaparak bir oyun oynuyorlar, oyuna A oyuncusu başlıyor. A oyuncusu kendi hamlesinde boyalı olmayan bir birim kareyi kırmızıya, B oyuncusu ise kendi hamlesine boyalı olmayan bir birim kareyi maviye boyuyor. Herhangi bir oyuncu ortak kenar paylaşan iki birim kare aynı renkte olacak şekilde hamle yapamıyor. Hamle yapamayan oyuncu oyunu kaybediyor. Oyun $N = 2023, 2024, 2025, 2026, 2027$ değerleri için birer kez oynanırsa, A oyuncusu bu oyunlardan kaçını kazanmayı garantileyebilir?

- a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4

Cevap: 0. B oyuncusu, N sayısının tüm değerleri için ilk hamlesinde birinci veya sonuncu birim kareyi boyayarak oyunu kazanabiliyor. A oyuncusunun n . hamlesinden sonra satranç tahtası kırmızı birim karelerle en az n parçaya ayrılıyor. Bu parçaların en fazla $n - 1$ tanesinde mavi birim kare olduğuna göre, B oyuncusu aralarında hiç boyalı birim kare olmayan bir parçadaki herhangi bir birim kareyi boyayarak her durumda hamle yapabiliyor.