Türkiye Bilimsel ve Teknolojik Araştırma Kurumu

32. Ulusal Ortaokul Matematik Olimpiyatı

İkinci Aşama Sınavı

17 Aralık 2024

Çözümler

1. $3^a5^b - 2024$ ifadesinin bir pozitif tam sayının karesine eşit olmasını sağlayan tüm (a, b) negatif olmayan tam sayı ikililerini bulunuz.

Çözüm: $3^a5^b - 2024 = c^2$ olsun. c sayısının bir tek sayı olduğu barizdir. Bu denkleme $\pmod 8$'de bakarsak $c^2 \equiv 1 \pmod 8$ bulunur, dolayısıyla sol tarafta da $3^a5^b \equiv 1 \pmod 8$ olmalıdır. Öte yandan, $\pmod 8$'de 3^a sayısının alabileceği değerler 1 veya 3, 5^b sayısının alabileceği değerler 1 veya 5 olduğundan bu çarpımın $\pmod 8$'de 1'e denk olması için iki sayı da 1'e denk olmalıdır. Buradan da hem a hem de b sayılarının çift olması gerektiğini buluruz. $a = 2x$, $b = 2y$ dersek $(3^x5^y)^2 - c^2 = 2024$ ve buradan $(3^x5^y - c)(3^x5^y + c) = 2024$ bulunur. Sol taraftaki sayılar 2024'ün bölenleri olacağı için tüm olası durumları incelersek yalnızca $(44, 46)$ ikilisi için $x = 2$, $y = 1$ çözümünün geldiğini buluruz. Dolayısıyla sorudaki koşulu sağlayan tek (a, b) ikilisi $(4, 2)$ olmalıdır.

2. Bir ABC üçgeninin iç bölgesinde bulunan P ve Q noktaları $\angle APB = \angle AQC$ ve $\angle APC = \angle AQB$ koşullarını sağlıyor. APQ üçgeninin çevrel çemberinin AB ve AC kenarları ile ikinci kez kesiştiği noktalar sırasıyla K ve L olsun. B, C, L, K noktalarının çemberdeş olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $AQ \cap PC = E$ ve $AP \cap BQ = D$ olsun. $\angle QAC = \alpha$, $\angle PCA = \beta$ ve $\angle PCB = \theta$ olsun. Soruda verilen açı eşitliklerinden dolayı B, C, P, Q çemberdeştir, aynı zamanda D, E, P, Q çemberdeştir. Bu durumda $\angle PCB = \angle PQB = \angle PEB = \theta$ bulunur. AEC üçgeninde iki iç açının toplamı bir dış açıya eşit olacağından $\angle AEP = \angle EAC + \angle ECA = \alpha + \beta$ elde edilir. Buradan $\angle AED = \alpha + \beta + \theta$ ve çemberdeşlikten $\angle APQ = \alpha + \beta + \theta$ bulunur. APQ üçgeninin çevrel çemberinde de açı takibi yaparak $\angle AKL = \angle APQ - \angle QAL = \alpha + \beta + \theta - \alpha = \beta + \theta = \angle ACB$ elde edilir ve bu açı eşitliği B, C, K, L noktalarının çemberdeş olması anlamını taşıdığı için ispat tamamlanır.

3. $n \geq 2$ bir pozitif tam sayı olmak üzere, $a_1, a_2, \ldots, a_n$ birbirinden farklı pozitif gerçel sayılar olsun. $C_1, C_2, \ldots, C_n$ şehirlerinden oluşan bir ülkede, her (i, j) ikilisi için C_i ve C_j şehirleri arasında bir çift yönlü uçak seferi vardır. Her (i, j) ikilisi için C_i ile C_j şehirleri arasındaki uçak seferinin ücreti $a_i + a_j$ dir. Bu ülkedeki bir gezgin, kullandığı her uçak seferinin ücreti bir önceki uçak seferinin ücretinden fazla olacak şekilde bir yolculuk yapmıştır. Buna göre, bu gezginin yaptığı uçak seferi sayısının alabileceği en büyük değeri bulunuz.

Çözüm: Cevap $2n - 3$. Genelliği bozmadan $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$ diyelim. a_i sayısına, C_i şehrinin ücreti diyelim, böylece her yol bağladığı iki şehrin ücretinin toplamı olacaktır. Bu gezginin rotasındaki şehirlerin ücretleri sırasıyla $b_1, b_2, \ldots, b_k$ olsun. Sorudaki koşul gereği, her $1 \leq i \leq k-2$ için $b_i + b_{i+1} < b_{i+1} + b_{i+2}$ olacaktır. Buradan da her i için $b_i < b_{i+2}$ bulunur. Yani $b_1, b_3, b_5, \ldots$ ve $b_2, b_4, b_6, \ldots$ artan dizilerdir. Bu dizilerin elemanlarının alabileceği n farklı değer olabilir ve her iki dizi de artan olduğu hiçbir sayı aynı dizide iki kere geçemez. Öte yandan, a_1 sayısı her iki dizide de bulunamaz, çünkü bu durumda diziler artan olduğu için hem b_1, hem de b_2 sayısı a_1'e eşit olmalıdır ancak yolculuk farklı şehirler arasında olmalıdır. Benzer şekilde a_n sayısı da yalnızca bir tane dizide geçebilir. Yani, elimizdeki n şehrin 2 tanesi en fazla bir kere, kalanları en fazla iki kere kullanılmış olabilir. Böylece bu gezgin en fazla $2n-2$ şehirden, yani $2n-3$ uçuş seferinden oluşan bir yolculuk yapmış olabilir.

Örnek kurmak için de, $b_1, b_3, b_5, \dots$ dizisini $a_2, a_3, \dots, a_n$ ve $b_2, b_4, b_6, \dots$ dizisini $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$ olarak seçmek gerekli koşulları sağlar. Yani, bu sayılar nasıl verilirse verilsin $a_2, a_1, a_3, a_2, a_4, a_3, \dots, a_n, a_{n-1}$ şehirlerinden geçerek $2n-3$ uçak seferinden oluşan bir rota oluşturabiliriz.

4. $n \geq 2$ bir pozitif tam sayı ve $a_1, a_2, \dots, a_n > 1$ gerçel sayılar olmak üzere,

$$\prod_{i=1}^{n} \left(a_i a_{i+1} - \frac{1}{a_i a_{i+1}} \right) \geq 2^n \prod_{i=1}^{n} \left(a_i - \frac{1}{a_i} \right)$$

olduğunu gösteriniz (burada, $a_{n+1} = a_1$ alınıyor).

Çözüm: Bir lemma ile başlayacağız.

Lemma: x, y, z, t gerçel sayılar olmak üzere, $(xy - zt)^2 \geq (x^2 - z^2)(y^2 - t^2)$ eşitsizliği sağlanır.

İspat: İfadeyi açıp düzenleyince $x^2t^2 + y^2z^2 \geq 2xyzt$ haline gelir ve bu da $(xt - yz)^2 \geq 0$ olduğundan ötürü doğrudur.

Şimdi bu lemmada $x = a_i$, $y = a_{i+1}$, $z = 1/a_i$, $t = 1/a_{i+1}$ olarak yazarsak

$$\left(a_i a_{i+1} - \frac{1}{a_i a_{i+1}} \right)^2 \geq \left(a_i^2 - \frac{1}{a_i^2} \right) \left(a_{i+1}^2 - \frac{1}{a_{i+1}^2} \right)$$

bulunur. Sağ tarafı çarpanlara ayırırsak

$$\left(a_i a_{i+1} - \frac{1}{a_i a_{i+1}} \right)^2 \geq \left(a_i - \frac{1}{a_i} \right) \left(a_{i+1} - \frac{1}{a_{i+1}} \right) \left(a_i + \frac{1}{a_i} \right) \left(a_{i+1} + \frac{1}{a_{i+1}} \right)$$

ve her x pozitif gerçel sayısı için $x + 1/x \geq 2$ eşitsizliğini kullanırsak

$$\left(a_i a_{i+1} - \frac{1}{a_i a_{i+1}} \right)^2 \geq 4 \left(a_i - \frac{1}{a_i} \right) \left(a_{i+1} - \frac{1}{a_{i+1}} \right)$$

elde edilir. Bu eşitsizlikteki tüm sayılar pozitif olduğu için, $i = 1, 2, \dots, n$ değerlerinde bu eşitsizlikleri taraf tarafa çarpıp karekök alarak sorudaki eşitsizliğe ulaşabiliriz ve böylece ispat tamamlanmış olur.