Türkiye Bilimsel ve Teknolojik Araştırma Kurumu

33. Ulusal Matematik Olimpiyatı
İkinci Aşama Sınavı

13-14 Aralık 2025

Çözümler

1. a, b, c pozitif tam sayılar olmak üzere,

$$2^a + a^2 - b^2,\ 2^b + b^2 - c^2 \ \text{ ve } \ 2^c + c^2 - a^2$$

sayılarının üçünün de tamkare olmasını sağlayan tüm (a, b, c) üçlülerini bulunuz.

Çözüm: Cevap: Tüm n pozitif tam sayıları için $(a, b, c) = (2n, 2n, 2n)$.

İlk olarak $\min(a, b, c) = 1$ durumunu inceleyelim. Genelliği bozmadan $c = 1$ olsun. Bu durumda $3 - a^2$ sayısı tamkare olmalıdır, ancak bu koşulu sağlayan bir a pozitif tam sayısının bulunmadığı açıktır. Yani $a, b, c > 1$ olmalıdır. $2^a + a^2 - b^2 = x^2$, $2^b + b^2 - c^2 = y^2$ ve $2^c + c^2 - a^2 = z^2$ olsun.

Bu sayıların üçünü de toplarsaki $2^a + 2^b + 2^c = x^2 + y^2 + z^2$ bulunur. $a, b, c \geq 2$ olduğu için, eşitliğin sol tarafı 4 ile bölünür, bu durumda $x^2 + y^2 + z^2$ de dörde bölünmelidir. Tamkarelerin 4 ile bölümünden halan 0 veya 1 olduğu için, $x^2 + y^2 + z^2$ sayısının dörde bölümnmesi için $x^2 \equiv y^2 \equiv z^2 \equiv 0 \pmod 4$ olmalıdır. Böylece, x, y, z sayılarının üçü de çifttir ve $a \equiv b \equiv c \equiv 0 \pmod 2$ bulunur. Böylece iki durum bulunur.

(i) a, b, c tekse: a^2, b^2, c^2 sayılarının 3'e bölümünden kalanları 0 veya 1 olabilir, yani alabilecekleri iki farklı değer vardır. Dolayısıyla, bu üç sayıdan ikisinin 3 ile bölümünden kalan eşittir. Genelliği bozmadan $a^2 \equiv b^2 \pmod 3$ olsun. Bu durumda, $2^a + a^2 - b^2 \equiv 2^a \equiv 2 \pmod 3$ bulunur, yani bu sayı tamkare olamaz. Dolayısıyla bu durumda sorudaki koşulu sağlayan (a, b, c) üçlüsü yoktur.

(ii) a, b, c çiftse: Genelliği bozmadan bu sayılardan en büyüğü a olsun. Eğer $a > b$ ise,

$$x^2 = 2^a + a^2 - b^2 > 2^a = (2^{a/2})^2$$

bulunur. x sayısı çift bir tamkare olduğu için, $x > 2^{a/2}$ ise $x \geq 2^{a/2} + 2$ olmalıdır. Böylece

$$2^a + a^2 \geq 2^a + a^2 - b^2 = x^2 \geq (2^{a/2} + 2)^2 = 2^a + 2^{a/2+2} + 4$$

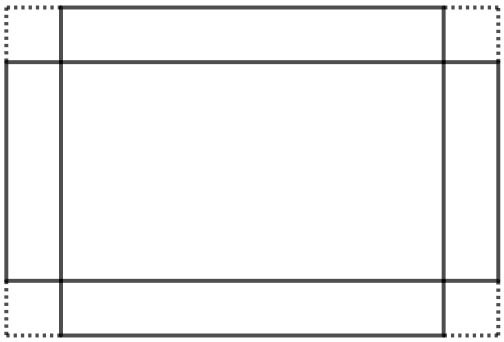
bulunur. Ancak $a \geq 8$ için $2^{a/2+2} + 4 > a^2$ olduğu için, bunun sağlanması mümkün değildir. Böylece $a \leq 6$ olmalıdır. Ancak bu durumda da $b = 2, 4$ durumlarında $2^a + a^2 - b^2$ tamkare olmayacaktır.

Dolayısıyla $a = b$ olmalıdır. Bu durumda $b \geq c$ olacağı için, benzer şekilde $2^b + b^2 - c^2$ ifadesini de incelersek $b = c$ bulunur. Böylece, sorudaki koşulu sağlayan tek çözümler $a = b = c$ olarak bulunur ve ispat biter.

2. m ve n pozitif tam sayılar olmak üzere, $m \times n$ satranç tahtası, bu tahtanın birim karelerinden oluşan 1×2 ve 2×1 dikdörtgenlerle, herhangi iki dikdörtgen ortak birim kare içermeyecek şekilde tamamen kaplanmıştır. 1×2 dikdörtgenlerin kapladığı birim kareler kırmızıya, 2×1 dikdörtgenlerin kapladığı birim kareler maviye boyanıyor. Bu satranç tahtasında bir tarafı mavi bir tarafı kırmızı olan birim kenarların sayısının çift olduğunu gösteriniz.

Çözüm: Bu tahtada 1×2 dikdörtgenlerin kapladığı karelere 1, 2×1 dikdörtgenlerin kapladığı karelere -1 yazalım. Tahtanın kenarları üzerinde olmayan her bir birim kenara ise, ait olduğu birim karelerdeki sayıların çarpımını yazalım. Bu durumda, soruda istenen koşul -1 yazılı birim kenar sayısının çift olduğuna denktir. O halde, bu birim kenarlardaki yazdığımız tüm sayıların çarpımının 1 olduğunu göstermeliyiz.

Bu sayıların tümünün çarpımını inceleyelim. Bu çarpımda köşedeki birim karelerde yazan sayıların kareleri, tahtanın kenarında yer alıp köşe olmayan karelerde yazan sayıların küpü, diğer birim karelerde yazan sayıların ise dördüncü kuvveti yer alır. Çift kuvveti alınan sayıların bu çarpıma katkısı 1 olduğundan ötürü, tahtanın kenarında yer alıp köşe olmayan karelerde yazan sayıların çarpımının 1 olduğunu göstermeliyiz. Dolayısıyla, tahtanın kenarlarında yer alıp köşe olmayan mavi kare sayısının çift olduğunu göstermeliyiz.



En üst satırdaki 1×2 dikdörtgen sayısı a, en alt satırdaki 1×2 dikdörtgen sayısı b, en sol sütundaki 2×1 dikdörtgen sayısı c, en sağ sütundaki 2×1 dikdörtgen sayısı d ve köşe birim karelerden mavi olanların sayısı e olsun. O zaman şekilde gösterilen, kenarlardaki dört dikdörtgende yazan -1 sayısı

$$(n-2a)+(n-2b)+2c+2d-2e = 2(n-a-b+c+d-e)$$

olur. Bu sayı çifttir, dolayısıyla ispat biter.

3. a ve b verilmiş gerçel sayılar olsun. Her $x, y \in \mathbb{R}$ için

$$f(x+f^{100}(y)+a) = y + f^{2025}(x) + b$$

koşulunu sağlayan tüm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonlarını bulunuz.

Not. k bir pozitif tam sayı olmak üzere, $f^k(x) = \underbrace{f(f(\cdots f}_{k \text{ kez}}(x)))$ olarak tanımlanıyor.

Çözüm: Cevap: $f(x) = x + \dfrac{a-b}{1924}$.

İddia 1: Her $k \in \mathbb{Z}^+$ için $f^k(x)$ fonksiyonu birebir ve örtendir.

İspat: y sayısı değişirken soruda verilen denklemin sağ tarafı herhangi bir gerçel sayı değerini alabilir. Bu durumda f fonksiyonu örten olur. Eğer $f(x_1) = f(x_2)$ ise, ana denklemde $y = x_1$ ve $y = x_2$ yazarsak $x_1 = x_2$ elde edilir. Böylece f fonksiyonu birebir bulunur.

İddiayı k üzerine tümevarım uygulayarak gösterelim. $k = 1$ için doğru olduğunu gösterdik. $k \geq 2$ için f^{k-1} fonksiyonu birebir ve örtense, f^k fonksiyonunun da birebir ve örten olduğunu gösterelim. Her $y \in \mathbb{R}$ için, örtenlikten dolayı $f^{k-1}(z) = y$ olacak şekilde bir z sayısı, ve $f(x) = z$ olacak şekilde bir x sayısı bulunur. Bu durumda $f^k(x) = y$ olur ve f fonksiyonu örten bulunur. Eğer $f^k(x_1) = f^k(x_2)$ ise f fonksiyonu birebir olduğu için $f^{k-1}(x_1) = f^{k-1}(x_2)$ olur ve f^{k-1} birebir olduğu için $x_1 = x_2$ bulunur, dolayısıyla f^k fonksiyonu da birebir bulunur. □

İddia 2: Her $x \in \mathbb{R}$ için $f^{2024}(x) - x$ sabittir.

İspat. Ana denklemde $y = -b$ koyalım. f fonksiyonu birebir olduğu için her $x \in \mathbb{R}$ için

$$x + f^{100}(-b) + a = f^{2024}(x)$$

gelir. Dolayısıyla $f^{2024}(x) - x = f^{100}(-b) + a$ yani bir sabit sayı bulunur. □

$c = f^{100}(-b) + a$ olsun.

İddia 3: Her $x \in \mathbb{R}$ için $f^{101}(x) - x$ sabittir.

İspat. Ana denklemde $x = -a$ koyalım. Her $x \in \mathbb{R}$ için

$$f^{101}(y) = y + f^{2025}(-a) + b$$

gelir. Dolayısıyla $f^{101}(x) - x = f^{2025}(-a) + b$ yani bir sabit sayı bulunur. □

$d = f^{2025}(-a) + b$ olsun.

İddia 4: Her $x \in \mathbb{R}$ için $f(x) - x$ sabittir.

Proof. ebob$(101, 2024) = 1$ olduğu için $1 = 101u - 2024v$ olan u, v pozitif tam sayıları bulunur. Bu durumda

$$f(x) + cv = f^{2024v}(f(x)) = f^{101u}(x) = x + du$$

olur ve $f(x) - x = du - cv$, yani bir sabit sayı bulunur. □

$e = du - cv$ olsun. $f(x) = x + e$ olur. Bu durumda $f^{100}(x) = x + 100e$ ve $f^{2025}(x) = x + 2025e$ olur. Bunları soruda verilen denklemde yerine yazarsak $x + y + 100e + a + e = y + x + 2025e + b$ olur. Yani $e = \dfrac{a-b}{1924}$ bulunur ve ispat tamamlanır.

4. $a_1, a_2, \ldots, a_{2025}$ gerçel sayılar olmak üzere, her $1 \leq i < j \leq 2025$ için, birinci tahtaya $1 - |a_i - a_j|$ sayısı, ikinci tahtaya $|a_i + a_j| - 1$ sayısı yazılıyor. Hangi $(a_1, a_2, \cdots, a_{2025})$ 2025-lileri için, her gerçel sayı her iki tahtaya da eşit sayıda yazılır?

Çözüm: Cevap: $x \in [-1, 1]$ aralığında bir gerçel sayı olmak üzere $(x, \pm 1, \pm 1, \pm 1, \ldots, \pm 1)$ 2025−lisi ve bu 2025−lilerin bütün permütasyonları.

Tarif edilen formda olan bir (a_i) 2025−lisi için, $1-|a_i-a_j|=|a_i+a_j|-1$ eşitliği her zaman sağlanır. Dolayısıyla, iki tahtaya da yazılan tüm sayılar aynı olur.

Şimdi, sorudaki koşulu sağlayan tüm 2025−lilerin bu formda olduğunu gösterelim. Her iki tahta için, bu tahtalarda yazılan sayıları toplayalım.

$$\sum_{i<j} 1-|a_i-a_j| = \sum_{i<j} |a_i+a_j|-1 \implies \sum_{i<j}(|a_i-a_j|+|a_i+a_j|) = 2025^2-2025$$

elde edilir. Her x, y gerçel sayı ikilisi için

$$|x+y|+|x-y| = 2\max\{|x|,|y|\}$$

özdeşliği sağlanır. Bu özdeşliği eşitliğin sol tarafında kullanırsak

$$\sum_{i<j}(|a_i-a_j|+|a_i+a_j|) = \sum_{i<j} 2\max\{|a_i|,|a_j|\} = 2025^2-2025$$

elde edilir. Sol tarafta $\dfrac{2025^2-2025}{2}$ tane terim bulunduğu için, bu sayıların tamamı 2 den küçük olamaz. Böylece $\max\{|a_i|\} \geq 1$ olmalıdır.

Genelliği bozmadan, $|a_1| = \max\{|a_i|\}$ diyelim. $|a_1| = 1+a$ ve $a \geq 0$ olsun. Her $1 \leq i, j \leq 2025$ için, ikinci tahtada yazılan hiçbir sayı -1 den küçük olamaz, böylece $1-|a_i-a_j| \geq -1$ ve $|a_i-a_j| \leq 2$ bulunur. Öte yandan, ilk tahtaya yazılan hiçbir sayı 1 den büyük olamayacağı için $|a_i+a_j|-1 \leq 1$ ve $|a_i+a_j| \leq 2$ bulunur. Bu durumda, tüm $j \neq i$ indisleri için $|a_j| \leq 1-a$ olmalıdır, aksi durumda ya $|a_1+a_j| > 2$ ya da $|a_1-a_j| > 2$ sağlanırdı. Öte yandan, bunu

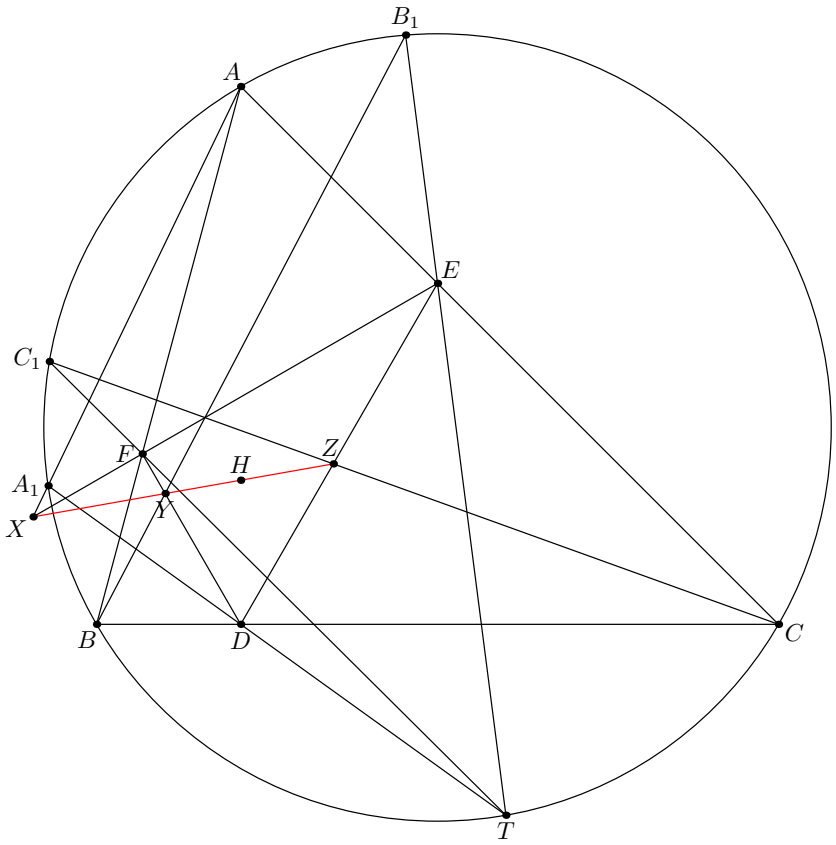
$$\sum_{i<j} 2\max\{|a_i|,|a_j|\} = 2025^2-2025$$

eşitliğinde kullanırsak, $i=1$ için $\max\{|a_1|,|a_j|\} = 1+a$ ve $i \neq 1$ olan tüm $i<j$ ikilileri için $\max\{|a_i|,|a_j|\} \leq 1-a$ olduğundan ötürü

$$2025 \cdot 2024 = \sum_{i<j} 2\max\{|a_i|,|a_j|\} \leq 4048(1+a) + (2024^2-2024)(1-a) = 2024(2025-2021a)$$

bulunur. Eşitsizliğin sağlanması için $a=0$ olmalıdır, yani $1 = \max\{|a_i|\}$ bulunur. Aynı zamanda, yukarıdaki eşitliğin sağlanması için $2\max\{|a_i|,|a_j|\} = 1$ her zaman sağlanmalıdır. Böylece, sorudaki koşulu sağlayan bir 2025−li için en az 2024 tane terimin mutlak değeri 1 olmalıdır, ve geri kalan terimin mutlak değeri en fazla 1 olmalıdır. Bu da cevapta tarif edilen tüm 2025−lilere denktir ve ispat tamamlanır.

5. Bir ABC üçgeninde A, B, C noktalarından indirilen yükseklik ayakları sırasıyla D, E, F ve diklik merkezi H olsun. H noktasından geçen bir ℓ doğrusu EF, DF, DE doğruları ile sırasıyla X, Y, Z noktalarında kesişiyor. XBF ve XCE üçgenlerinin çevrel çemberlerinin ikinci kesişim noktası A_1, YCD ve YAF üçgenlerinin çevrel çemberlerinin ikinci kesişim noktası B_1, ZAE ve ZBD üçgenlerinin çevrel çemberlerinin ikinci kesişim noktası C_1 olsun. A_1D, B_1E ve C_1F doğrularının noktadaş olduğunu gösteriniz.



Çözüm: Düzlemdeki herhangi doğrusal olmayan A_0, B_0, C_0 noktaları için, $(A_0B_0C_0)$ ile $A_0B_0C_0$ üçgeninin çevrel çemberini gösterelim. AX doğrusu ile XBF üçgeninin çevrel çemberinin ikinci kesişim noktası A_1' olsun. X, A_1', B, F noktalarının ve B, C, E, F noktalarının çemberdeşliğinden dolayı

$$\angle XA_1'B = \angle XFB = \angle ACB \implies A_1' \in (ABC)$$

bulunur.

Benzer şekilde, AX doğrusu ile XCE üçgeninin çevrel çemberinin ikinci kesişim noktası da (ABC) üzerinde bulunur. Böylece, AX doğrusunun ABC üçgeninin çevrel çemberini ikinci kez kestiği nokta, hem (XBF) hem de (XCE) üzerinde bulunur. Dolayısıyla $A_1' \equiv A_1$ olmalıdır ve

$$A_1 = AX \cap (XBF) = AX \cap (XCE) \in (ABC)$$

bulunur. Benzer sonuç, B_1 ve C_1 noktaları için de geçerlidir

Şimdi A_1D, B_1E ve C_1F doğrularının (ABC) üzerinde kesiştiğini gösterelim.

$A_1D \cap (ABC) = \{A_1, T\}$ olsun. A_1 noktası (XBF) üzerinde olduğu için, A noktasının (XBF) çemberine göre kuvveti, $AA_1.AX = AF.AB$ olur. B, D, H, F noktaları da çemberdeş olduğu için, A noktasının bu çembere göre de kuvvetini alırsak $AA_1.AX = AF.AB = AH.AD$ olur. Böylece X, A_1, H, D noktaları çembersel bulunur. Benzer şekilde X, B_1, H, E ve X, C_1, H, F de çembersel bulunur

(AA_1BC), (XA_1HD) ve $(BFHD)$ çembersellikleri kullanıp açı taşıyarak

$$\angle CA_1T = \angle CA_1X - \angle XA_1T = (180 - \angle ABC) - \angle XHD = \angle FHD - \angle XHD = \angle FHX$$

elde edilir.

Öte yandan, X, C_1, H, F çemberselliğinden ve C, H, F doğrusallığından ötürü

$$\angle CC_1F = \angle CHZ = \angle FHX$$

elde edilir. Böylece $\angle CC_1F = \angle CA_1T$ bulunur. Dolayısıyla C_1F doğrusu (ABC) yi T noktasında kesmelidir ve $T \in C_1F$ bulunur. Benzer şekilde $T \in B_1E$ bulunur, böylece A_1D, B_1E, C_1F doğruları T noktasında kesişirler ve ispat biter.

6. İki tamkarenin toplamı şeklinde yazılabilen sayıların kümesi $\mathcal{S}$ olsun. Tam sayı katsayılı bir P polinomu, her n negatif olmayan tam sayısı için

$$P(n) \in \mathcal{S} \iff n \in \mathcal{S}$$

koşulunu sağlıyorsa, P polinomunun derecesinin tek olduğunu gösteriniz.

Çözüm: p bir asal sayı ve n bir tam sayı olmak üzere, $v_p(n)$ ile p sayısının n sayısını bölen en büyük kuvvetini gösterelim. Bir n pozitif tam sayısı ve p asal sayısı için, $p \equiv 3 \pmod 4$ ise ve $v_p(n)$ bir tek sayıysa, p asalı n sayısını *bozar* diyelim. Bir pozitif tam sayının $\mathcal{S}$ kümesinde yer alması için gerek ve yeter koşulun bu sayıyı bozan bir asal sayı olmamasıdır. Bunu çözüm boyunca tekrar tekrar kullanacağız.

P polinomunun sabit olmadığı, dolayısıyla $P \equiv 0$ olmadığı açıktır. Böylece, bu polinom yeterince büyük n tam sayıları için $\mathcal{S}$ kümesinden pozitif değerler alacaktır, dolayısıyla baş katsayısı pozitif olmalıdır. Böylece bir N tam sayısı için, her $n \geq N$ değerinde $P(n) > 1$ olur.

İddia 1: Bir q asal sayısı $P(m)$ sayısını bozarsa, m sayısını da bozar.

İspat: $P(m)$ sayısını bozan bir $q \equiv 3 \pmod 4$ asal sayısını alalım. Bir $k \geq 1$ pozitif tam sayısı için $P(m) = q^{2k-1}t$ ve $(q,t) = 1$ olsun. Eğer $q \mid m$ ise, Bezout Teoreminden dolayı $q \mid m \mid P(m) - P(0)$ olduğu için $q \mid P(0)$ olur. Eğer $q \nmid m$ ise, $(q,m) = 1$ ve $(q,4) = 1$ olduğu için, Dirichlet Teoremi ve Çinli Kalan Teoreminden dolayı $p \equiv 1 \pmod 4$ ve $p \equiv m \pmod{q^{2k}}$ olan bir asal sayı bulunur. Böyle bir p asal sayısı alalım. Bezout Teoreminden dolayı, $q^{2k} \mid p - m \mid P(p) - P(m)$ olur. $v_q(P(m)) = 2k-1$ olduğu için, $v_q(P(p)) = 2k-1$ olmalıdır. Dolayısıyla, $P(p) \notin S$ ve böylece $p \notin S$ olmalıdır. Ancak $p \equiv 1 \pmod 4$ bir asal sayı olduğu için $p \in S$ olur, sorudaki koşuldan dolayı bu mümkün değildir. Dolayısıyla, $q \mid m$ olmalıdır. □

İddia 2: $P(0) = 0$ olmalıdır.

İspat: $m \notin \mathcal{S}$ ve $m \geq N$ bir pozitif tam sayı olsun. Sorudaki koşuldan dolayı, $P(m)$ sayısını bozan bir $q \equiv 3 \pmod 4$ asal sayısı bulunmalı. İddia 1'den dolayı, $q \mid m$ olduğunu biliyoruz. Bezout Teoreminden dolayı $q \mid m \mid P(m) - P(0)$ ve $q \mid P(0)$ bulunur. m sayısını $m \equiv 3 \pmod 4$ formunda herhangi bir asal sayı seçersek, m sayısını bozan tek asal sayı kendisi olduğu için $q = m$ bulunur. Böylece, bu formdaki tüm asal sayılar $P(0)$ sayısını böler. Bu formda sonsuz çoklukta asal sayı bulunduğu ve 0 dışında hiçbir sayı sonsuz çoklukta asal sayıya bölünemeyeceği için $P(0) = 0$ bulunur. □

İddia 3: Bir p asal sayısı m sayısını bozarsa, $P(m)$ sayısını da bozar.

İspat: Bir k pozitif tam sayısı için $m = p^{2k-1}n$ ve $(p,n) = 1$ olsun. p asal sayısının $P(m)$ asal sayısını bozmadığını varsayalım. Bir $\ell \geq 0$ tam sayısı için $P(m) = p^{2\ell}t$ ve $(p,t) = 1$ olsun. $s > k, \ell$ bir pozitif tam sayı ve A bir tam sayı olsun. Herhangi bir A pozitif tam sayısı için $P(m + p^{2s}A)$ sayısına bakalım. $P(m + p^{2s}A) \equiv P(m) \equiv p^{2\ell}t \pmod{p^{2s}}$ olur. Böylece $v_p(P(m + p^{2s}A)) = 2\ell$ bulunur. $P(m + p^{2s}A) = p^{2\ell}B$ ve $(B,p) = 1$ olsun. Öte yandan, $m + p^{2s}A = p^{2k-1}(n + p^{2s-2k+1}A)$ olur. Hem $(n,p) = 1$ hem de $(p,4) = 1$ olduğu için, Dirichlet ve Çinli Kalan Teoreminden dolayı $q \equiv 1 \pmod 4$ ve $q \equiv -n \pmod{p^{2s-2k+1}}$ koşullarını sağlayan sonsuz çoklukta asal sayı bulunur. A sayısını $n + p^{2s-2k+1}A = q$ bu koşulları sağlayan bir asal sayı ve $p^{2k-1}q > N$ olacak şekilde seçelim. Böylece, $P(p^{2k-1}q) = p^{2\ell}B$ olur. $p^{2k-1}q \notin \mathcal{S}$ olduğundan ve sorudaki koşuldan ötürü $p^{2\ell}B \notin \mathcal{S}$ olmalıdır. Bu durumda $p^{2\ell}B$ sayısını bozan bir $r \neq p$ asal sayısı bulunmalıdır. Ancak, İddia 1'den ötürü böyle bir asal sayı $p^{2k-1}q$ sayısını da bozmalıdır, yani $r = p$ olmalıdır. Bu da bir çelişki olduğundan ötürü, m sayısını bozan bir asal sayı $P(m)$ sayısını da bozmalıdır. $\square$

Bir Q polinomu ve r pozitif tam sayısı için $P(x) = x^r Q(x)$ ve $Q(0) \neq 0$ olsun. r çiftse Q polinomu da sorudaki şartı sağlar. Çünkü, bir pozitif tam sayıyı tamkare bir sayıyla çarpmak veya tamkare bir sayıya bölmek $\mathcal{S}$ kümesinde olma durumunu etkilemez. Fakat bu durumda İddia 2'den dolayı $Q(0) = 0$ olacaktır, dolayısıyla r tek sayı olmalıdır. $P(x)$ sayısını bozan tüm asallar ve x sayısını bozan asallar birebir aynı olduğu için, yeterince büyük tüm x pozitif tam sayıları için $Q(x)$ polinomu $\mathcal{S}$ kümesinden değerler almalıdır. Aynı zamanda bir x tam sayısı için $|Q(x)|$ sayısının da S kümesinde yer almalıdır. Çünkü, bir $p \equiv 3 \pmod 4$ asal sayısı için $v_p(|Q(n)|) = 2k-1$ olsaydı, tüm A pozitif tam sayıları için $v_p(Q(n + p^{2k}A)) = 2k-1$ olurdu, ancak A sayısını $n + p^{2k}A$ sayısı pozitif olacak kadar büyük seçersek, $Q(n + p^{2k}A) \notin \mathcal{S}$ bulunurdu, fakat bunun doğru olmadığını biliyoruz.

Şimdi Q polinomunun derecesinin çift olduğunu gösterip soruyu bitirelim. Q polinomunun derecesinin tek olduğunu varsayalım. Böylece, Q polinomu yeterince büyük tüm pozitif sayılar için pozitif, ve yeterince büyük tüm negatif sayılar için negatif değerler alır. Yeterince büyük bir n tam sayısı için $Q(n) = 2^a t$ ve t pozitif tek tam sayı olsun. $2^a t \in \mathcal{S}$ olduğu için $t \equiv 1 \pmod 4$ olmalıdır. Bu durumda, yeterince büyük tüm m pozitif tam sayıları için $Q(n - 2^{a+2}m)$ sayısı negatif olur. Ayrıca, $Q(n - 2^{a+2}m) \equiv Q(n) \equiv 2^a t \pmod{2^{a+2}}$ olduğundan ötürü bir s negatif tek tam sayısı için $Q(n - 2^{a+2}m) = 2^a s$ olmalıdır. Bezout Teoreminden dolayı $2^{a+2} \mid Q(n) - Q(n - 2^{a+2}m) = 2^a(t - s)$ olur, yani $4 \mid t - s$ bulunur ve $s \equiv 1 \pmod 4$ bulunur. Ancak bu durumda, $|Q(n - 2^{a+2}m)| = 2^a(-s)$ olur ve $-s \equiv 3 \pmod 4$ olduğu için $-s \in \mathbb{Z}^+$ sayısını bozan bir asal sayı bulunur. Ancak bu durumun gerçekleşemeyeceğini göstermiştir. Dolayısıyla, bu bir çelişkidir ve Q polinomunun derecesi çift olmalıdır. Böylece P polinomunun derecesi tek olur ve ispat tamamlanır.