TÜRKİYE BİLİMSEL VE TEKNOLOJİK ARAŞTIRMA KURUMU
BİLİM İNSANI DESTEK PROGRAMLARI BAŞKANLIĞI

32. BİLİM OLİMPİYATLARI - 2024
BİRİNCİ AŞAMA SINAVI
MATEMATİK

Soru Kitapçığı Türü

A

18 Mayıs 2024 Cumartesi, 09.30-12.30

ÇÖZÜMLER

1. $AB \parallel CD$ olan bir $ABCD$ yamuğunda, E noktası D ile F arasında olacak şekilde $[CD]$ üzerinde alınan E ve F noktaları için, $m(\widehat{DAF}) = m(\widehat{BAF}) = 45°$, $m(\widehat{CBE}) = m(\widehat{ABE}) = 60°$, $|DE| = 3$, $|CF| = 4$ ise, $|AB|$ kaçtır?

a) $2 + 4\sqrt{3}$ b) $3 + 3\sqrt{3}$ c) $5 + \sqrt{3}$ d) $4 + 2\sqrt{3}$ e) Hiçbiri

Cevap $5 + \sqrt{3}$. $|EF| = 2x$ diyelim. ADF bir ikizkenar dik üçgen olduğundan $|AD| = |DE| + |EF| = 2x + 3$ olur. EBC bir eşkenar üçgen olduğundan $|BC| = |EF| + |FC| = 2x + 4$ olup, bu üçgenin yüksekliğine bakarsak $2x + 3 = (x + 2)\sqrt{3}$ bulunur, bu da $x = \sqrt{3}$ demektir. Buradan $|AB| = 3 + (2 + x) = 5 + \sqrt{3}$ bulunur.

2. $3^{p^3} + 5^{p^5} + 7^{p^7} + 11^{p^{11}}$ toplamının p ile tam bölünmesini sağlayan kaç p asal sayısı vardır?

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

Cevap: 2. Fermat Teoremi'nden dolayı $a^p \equiv a \pmod{p}$'dir ve denklikte $a - 1$ kez p-ninci kuvvet alınarak $a^{p^a} \equiv a \pmod{p}$ bulunur. O halde $p | 3 + 5 + 7 + 11 = 26$ elde edilir ve şartı sağlayan asallar 2 ve 13'tür.

3. Her $n \geq 2$ pozitif tam sayısı için n'den büyük olmayan en büyük asal sayı $f(n)$, n'den büyük olan en küçük asal sayı $g(n)$ olsun.

$$\frac{1}{f(2)g(2)} + \frac{1}{f(3)g(3)} + \cdots + \frac{1}{f(112)g(112)}$$

toplamı kaçtır?

a) $\frac{109}{222}$ b) $\frac{111}{226}$ c) $\frac{110}{113}$ d) $\frac{113}{224}$ e) $\frac{55}{111}$

Cevap: $\frac{111}{226}$. p ve q iki ardışık asal sayı olsun. O zaman $\frac{1}{pq}$ sayısı sorudaki ifadede tam olarak $q - p$ kez geçiyor ve toplamda $\frac{q-p}{pq} = \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$ katkıda bulunuyor. Buna göre, cevap

$$(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + (\frac{1}{3} - \frac{1}{5}) + \cdots + (\frac{1}{109} - \frac{1}{113}) = \frac{1}{2} - \frac{1}{113} = \frac{111}{226}.$$

4. 100 öğrencinin katıldığı bir yaz okulunda en fazla 4 arkadaşı olan öğrencilere *utangaç* diyelim. Her öğrencinin en az 4 tane utangaç arkadaşı varsa, utangaç öğrenci sayısının alabileceği kaç farklı değer vardır?

a) 1 b) 2 c) 3 d) 5 e) 8

Cevap: 1. Utangaç olmayan bir öğrenci varsa, bunun utangaç olan en az dört arkadaşı var. Bunlardan biri A olsun. A'nın utangaç olmayan en az bir arkadaşı ve utangaç olan en az 4 arkadaşı var. O halde A'nın en az 5 arkadaşı var ve bu da A'nın utangaç olmasıyla çelişir. Demek ki tüm öğrenciler utangaçmış. Herkesin birbiriyle arkadaş olduğu 5 kişilik gruplardan 20 tanesi istenen şartları sağlar.

5. İç teğet çemberinin merkezi I olan bir ABC üçgeninde, IBC üçgeninin çevrel çemberine I noktasında teğet olan doğrunun $[AB]$ ve $[AC]$ kenarlarıyla kesişimlerine sırasıyla M ve N diyelim. $|BC| = 225$, $|BM| = 64$ ve $|CN| = 81$ ise, $|IB| + |IC|$ kaçtır?

a) 250 b) 260 c) 270 d) 280 e) Hiçbiri

Cevap 255. Teğet-kiriş açı özelliğinden $\triangle BMI \sim \triangle INC \sim \triangle BIC$ olduğu açıktır, buradan $|NC||BC| = |IC|^2$ ve $|BM||BC| = |IB|^2$ elde ederiz. Yerine koyarsak $|IB| = 120$ ve $|IC| = 135$ bulunur, cevap 255 olur.

6. n bir pozitif tam sayı ve a, b, c, d pozitif tek tam sayılar olmak üzere, $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 11 \cdot 4^n$ eşitliğini sağlayan kaç (a, b, c, d, n) beşlisi vardır?

a) 4 b) 6 c) 12 d) 16 e) 20

Cevap: 12. Tek bir tam sayının karesi (mod 8)'de 1'e denk olduğundan, eşitliğin sol tarafı (mod 8)'de 4'e denktir. O halde $n \geq 2$ olamaz. Demek ki $n = 1$'dir. Bu durumda $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 44$ bulunur. a, b, c, d'nin alabileceği değerler 1, 3 ve 5'tir. Kolayca eşitliğin sağlanması için dört sayıdan birinin 1, ikisinin 3 ve birinin de 5 olması gerekir. Sonuç olarak toplam $4!/2! = 24/2 = 12$ beşli vardır.

7. x ve y pozitif gerçel sayıları $x^2 + xy = 1$ şartını sağlıyorsa, $61x + 25y$ en az kaç olabilir?

a) 40 b) 50 c) 60 d) 70 e) 80

Cevap: 60. $(61x+25y)^2 = (11x-25y)^2+3600x(x+y) = (11x-25y)^2+60^2$ olarak yazılabilir, buradan $61x + 50y \geq 60$ olur. $x = 5/6$ ve $y = 11/30$ için eşitlik sağlanır.

8. Bir tahtaya 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40 sayıları yazılmıştır. k bir pozitif tam sayı olmak üzere, her işlemde tahtadaki sayılardan k tanesi seçiliyor ve seçilmiş her sayı 1 azaltılıyor. Birkaç işlem sonucunda tahtadaki tüm sayıları 0 yapmak mümkünse, k'ye *uygun* sayı diyelim. $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ sayılarından kaç tanesi uygun sayıdır?

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

Cevap: 4. Yapılan işlem sayısı en az 40 olmalıdır. Buna göre, $40k \leq 5 + 10 + \cdots + 40 = 180$ ve buradan da $k \leq 4$ bulunur. Şimdi de $k = 1, 2, 3, 4$ değerlerinde tahtadaki sayıların 0 yapılabileceğini gösterelim. $k = 1$ durumu açıktır. $k = 2$ durumunda sayıları toplamları 90 olan iki gruba ayırıp her işlemde her gruptan birer sayı seçilebilir. Gruplar $\{20, 30, 40\}$ ve $\{5, 10, 15, 25, 35\}$ olarak seçilebilir. $k = 3$ durumunda sayıları toplamları 60 olan üç gruba ayırıp her işlemde her gruptan birer sayı seçilebilir. Gruplar $\{25, 35\}$, $\{20, 40\}$, ve $\{5, 10, 15, 30\}$ olarak seçilebilir. $k = 4$ durumunda sayıları toplamları 45 olan dört gruba ayırıp her işlemde her gruptan birer sayı seçilebilir. Gruplar $\{5, 40\}$, $\{10, 35\}$, $\{15, 30\}$ ve $\{20, 25\}$ olarak seçilebilir.

9. $|AB| < |AC|$ olan bir ABC üçgeninde $\widehat{A}$ açısının iç açıortayının $[BC]$ kenarı ve ABC üçgeninin çevrel çemberiyle ikinci kesişim noktasına sırasıyla D ve E diyelim. E noktasından BC doğrusuna inen dikmenin BC ve AB doğruları ile kesişimi sırasıyla F ve G olsun. D noktasından AC ve GC doğrularına inen dikme ayakları sırasıyla K ve L olmak üzere, $|DK| = 3$ ve $|DL| = 11$ ise, $\dfrac{|DF|}{|FC|}$ oranı kaçtır?

a) $\dfrac{3}{11}$ b) $\dfrac{4}{7}$ c) $\dfrac{3}{7}$ d) $\dfrac{4}{11}$ e) $\dfrac{3}{8}$

Cevap $\dfrac{4}{7}$. D noktasından AB doğrusuna inen dikme ayağına M diyelim. $m(\widehat{BAD}) = m(\widehat{CAD})$ olduğundan $|DM| = |DK| = 3$ ve $|EB| = |EC|$ olur, bu da $|FB| = |FC|$ ve $|GB| = |GC|$ demektir. Buradan $\triangle DMB \sim \triangle DLC$ elde ederiz, yani $\dfrac{|BD|}{|DC|} = \dfrac{3}{11}$ buluruz. $|FB| = |FC|$ olduğundan $|BD| = 3k$, $|DF| = 4k$, $|FC| = 7k$ olup $\dfrac{|DF|}{|FC|} = \dfrac{4}{7}$ bulunur.

10. k bir pozitif tam sayı olmak üzere, k'nin pozitif tam bölenlerinin sayısını $d(k)$ ile gösterelim. $d(n^3) = 2 \cdot d(n^2)$ ve $1 \leq n \leq 2024$ koşullarını sağlayan kaç n pozitif tam sayısı vardır?

a) 3 b) 5 c) 7 d) 9 e) 11

Cevap: 11. $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_r^{a_r}$ ise, n sayısının istenen şartı sağlaması için $2 = \prod_{i=1}^{r} \frac{3a_i + 1}{2a_i + 1}$ olmalıdır. Öncelikle $(4/3)^3 > 2$ olduğundan $r \geq 3$ olamaz, ayrıca $(3a_1 + 1)/(2a_1 + 1) = 2$ olamayacağı da açıktır. $(3a_1+1)(3a_2+1) = 2(2a_1+1)(2a_2+1)$ eşitliğine bakarsak $(a_1-1)(a_2-1) = 2$ olup, n sayısının $n = p^2 q^3$ formunda olduğunu görürüz. n'nin 2024'ten küçük olabilmesi için $q \geq 11$ olamayacağı açıktır. $q = 7$ ise $p = 2$ olmalıdır, $q = 5$ ise $p \in \{2, 3\}$ olabilir, $q = 3$ ise $p \in \{2, 5, 7\}$, $q = 2$ ise $p \in \{3, 5, 7, 11, 13\}$ olabilir. Sonuç olarak tüm ihtimaller $\{72, 108, 200, 392, 500, 675, 968, 1125, 1323, 1352, 1372\}$ olur.

11. $\{3x\} + \{4x\} + \{5x\} = \{x\} + 2$ denkleminin kaç tane $0 < x < 1$ çözümü vardır? (x gerçel sayısı için x'ten, x'i aşmayan en büyük tam sayının çıkarılmasıyla elde edilen sayı $\{x\}$ ile gösterilir. Örneğin, $\{20,24\} = 0,24$ ve $\{32\} = 0$.)

a) 0 b) 1 c) 2 d) Sonsuz çoklukta e) Hiçbiri

Cevap: 1. Tüm a gerçel sayıları için $\{a\} = a - \lfloor a \rfloor$ ve $\lfloor a \rfloor$ bir tam sayı olduğu için, bunu denklemde yerine koyduğumuzda $11x$ sayısının bir tam sayıya eşit olduğunu görürüz. Yani, bir $1 \leq y \leq 10$ tam sayısı için $x = y/11$ olmalıdır. Bu sayıları denediğimizde de yalnızca $x = 2/11$'in şartları sağladığını görürüz.

12. 5×5 bir satranç tahtasının 5 birim karesine birer bilye yerleştirilecektir. Bu yerleştirme, herhangi bir satır ile herhangi bir sütunun birleşiminde en az bir bilye bulunması koşuluyla kaç farklı şekilde yapılabilir?

a) 5760 b) 5870 c) 5940 d) 6050 e) 6130

Cevap: 6130. Bir satırda (sütunda) bilye bulunmuyorsa, koşula göre, her sütunda (satırda) bilye bulunuyor. Buna göre, ya her satırda ya da her sütunda bilye bulunmak zorundadır. Bilyeler, her satırda birer bilye bulunması koşuluyla 5^5 şekilde yerleştirilebilir. Benzer şekilde bilyeler, her sütunda birer bilye bulunması koşuluyla 5^5 şekilde yerleştirilebilir. Bu iki yerleştirmenin kesişimi $5!$ eleman içeriyor. Buna göre, cevap

$5^5 + 5^5 - 5! = 6130$ olur.

13. $|AB| = 50$, $|AC| = 78$, $|BC| = 112$ olan bir ABC üçgeninde $[BC]$ kenarının üzerinde $\dfrac{|BD|}{|DC|} = \dfrac{5}{9}$ şartını sağlayan bir D noktası alınıyor. ABD üçgeninin çevrel merkezi ile ACD üçgeninin ağırlık merkezi arasındaki uzaklık nedir?

a) $\sqrt{1961}$ b) $\sqrt{1993}$ c) $\sqrt{2001}$ d) $\sqrt{2024}$ e) Hiçbiri

Cevap $\sqrt{1961}$. $|BC| = 112$ olduğundan $|BD| = 40$ ve $|CD| = 72$ olur. $50^2 + 72^2 = 78^2 + 40^2$ olduğundan $AD \perp BC$ olur. $[AB]$, $[AD]$, $[BD]$ kenarlarının orta noktalarına sırasıyla O, M, N ve ACD üçgeninin ağırlık merkezine G diyelim. G noktasından ON doğrusuna inilen dikme ayağı K olsun. Pisagor teoreminden $|AD| = 30$ ve $|MG| : |GC| = 1 : 2$ olup, $KG \parallel BC$ kullanılarak $|OK| = 5$ buluruz. Benzer şekilde $|KG| = |ND| + 24 = 44$ olup Pisagor teoreminden $|OG|^2 = 5^2 + 44^2 = 1961$ bulunur.

14. N pozitif tam sayısının 1 dışındaki en küçük tek pozitif böleni d, en büyük tek pozitif böleni ise D olsun. $N = 15D + 11d$ olmasını sağlayan N pozitif tam sayılarının toplamı kaçtır?

a) 4576 b) 4928 c) 5280 d) 5632 e) 5984

Cevap: 4576. $\dfrac{N}{D}$ sayısı 2'nin bir tam kuvvetidir. Diğer taraftan

$$15 < \frac{15D + 11d}{D} \leq 26$$

olduğuna göre, $15D + 11d = 16D$ ve buradan da $D = 11d$ gelir. d sayısı N'nin en küçük tek asal bölenidir ve dolayısıyla $d = 3, 5, 7, 11$ olabilir. Buna göre şartı sağlayan N sayıları $16 \cdot 11 \cdot 3$, $16 \cdot 11 \cdot 5$, $16 \cdot 11 \cdot 7$ ve $16 \cdot 11^2$'dir. Bu sayıların toplamı da $16 \cdot 11(3 + 5 + 7 + 11) = 4576$'dır.

15. x ve y gerçel sayılar olmak üzere, $(x^2 + 1)(y^2 + 1) + 129 = 12xy + 18(x + y)$ ise, xy kaçtır?

a) 3 b) 4 c) 5 d) 6 e) 7

Cevap: 7. $xy = a$ ve $x + y = b$ olsun. Eşitlik $(a - 7)^2 + (b - 9)^2 = 0$ olarak yazılabilir ve buradan da $a = xy = 7$ gelir. Şartı sağlayan x ve y gerçel sayıları vardır.

16. Bir dik koordinat düzleminde, $0 \leq x \leq 9$ ve $0 \leq y \leq 9$ koşullarını sağlayan tam sayı koordinatlı (x, y) noktalarının N tanesi boyanmıştır. Üç köşesi de boyalı olan bir dik üçgen bulunmuyorsa, N en fazla kaç olabilir?

a) 16 b) 18 c) 20 d) 22 e) 26

Cevap: 18. $(0,1),(0,2),\ldots,(0,9)$ ve $(1,0),(1,1),\ldots,(9,0)$ noktaları boyarsak $N = 18$ için bir örnek elde ederiz. Köşeleri boyalı olan dik üçgen bulunmaması için boyalı her (a, b) noktası için aynı anda (a, b)'den farklı boyalı (a, c) ve boyalı (d, b) noktaları bulunamaz. İlk durumda boyalı her (a, b) noktasının değeri $(a, *)$, ikinci durumda ise $(*, b)$ olsun (her iki durum aynı anda geçerliyse değer $(a, *)$ olsun). O zaman farklı boyalı noktaların değerleri de farklı olacak. Her $a = 0, 1, \ldots, 9$ için değeri $(a, *)$ olan boyalı nokta varsa, boyalı nokta sayısı 10 olur. Benzer şekilde her $b = 0, 1, \ldots, 9$ için değeri $(*, b)$ olan boyalı nokta varsa, boyalı nokta sayısı 10 olur. Demek ki boyalı nokta sayısı en fazla $9 + 9 = 18$ olacaktır.

17. $m(\widehat{BAC}) = 100^\circ$ olan bir ABC üçgeninde çevrel merkez O noktası olup, A noktasının BC doğrusuna göre yansıması D olsun. $BD \cap OC = \{S\}$ ve $CD \cap OB = \{R\}$ ise, $m(\widehat{RAS})$ kaçtır?

a) 30° b) 45° c) 60° d) 75° e) Hiçbiri

Cevap 60°. Öncelikle $m(\widehat{OBC}) = m(\widehat{OCB}) = 10^\circ$ olduğu açıktır. $m(\widehat{B}) = \beta$ ve $m(\widehat{C}) = \theta$ olmak üzere, $m(\widehat{ABD}) = 2\beta = m(\widehat{AOC})$ olduğundan A, B, S, O noktaları çemberdeş olup, $m(\widehat{SAO}) = m(\widehat{SBO}) = \beta - 10^\circ$ olur. Benzer şekilde $m(\widehat{RAO}) = \theta - 10^\circ$ bulunur. Buradan $m(\widehat{RAS}) = \beta + \theta - 20^\circ = 80^\circ - 20^\circ = 60^\circ$ olur.

18. $n^2 + 1$'in 269 ile tam bölünmesini sağlayan en küçük n pozitif tam sayısının rakamları toplamı kaçtır?

a) 10 b) 12 c) 14 d) 16 e) Hiçbiri

Cevap: 10. $269 \equiv 1 \pmod 4$ bir asal sayıdır. Kolayca $10^2 + 13^2 = 269$ olduğu görülür. Buradan $10 \cdot 27 \equiv 1 \pmod{269}$ ve $13 \cdot 27 = 351 \equiv 82 \pmod{269}$ olduğu için $82^2 + 1 \equiv 0 \pmod{269}$ elde edilir. 269 asal olduğu için $269 | n^2 - 82^2$ ancak ve ancak $269 | n - 82$ veya $269 | 82 + n$ olduğundan, şartı sağlayan en küçük pozitif tam sayı 82'dir. Dolayısıyla cevap 10'dur.

19. r bir gerçel sayı olmak üzere, $5x^4 - 8x^3 + rx^2 - 11x + 10 = 0$ denkleminin gerçel köklerinin çarpımı 1 ise, gerçel köklerinin toplamı kaçtır?

a) $\frac{6}{5}$ b) 1 c) $\frac{4}{5}$ d) $\frac{3}{5}$ e) Hiçbiri

Bu soru iptal edilmiştir. Vieta teoreminden dolayı tüm köklerin çarpımı 2'dir. Dolayısıyla tüm kökler gerçel olamaz. O halde verilen denklemin iki gerçel, iki gerçel olmayan kökü vardır. Verilen denklemi $(x^2 + dx + 1)(5x^2 + ex + f) = 0$ $(d, e, f \in \mathbb{R})$ olarak yazabiliriz. İfadeleri eşitlediğimizde $f = 10$, $e = -5$ ve $d = -3/5$ elde edilir. Ancak bu durumda hiçbir gerçel kök yoktur ve dolayısıyla çelişki elde edilir.

20. Sekiz tane 1 ve sekiz tane 0, 4×4 bir satranç tahtasının birim karelerine her bir birim karede bir sayı bulunacak şekilde yerleştirilecektir. Bu işlem, her bir satırdaki sayıların toplamı çift ve her bir sütundaki sayıların toplamı tek olacak şekilde kaç farklı biçimde yapılabilir?

a) 216 b) 240 c) 252 d) 288 e) Hiçbiri

Cevap: 240. Satırlardaki sayıların toplamları herhangi bir sırayla ya 4,4,0,0 ya 4,2,2,0 ya da 2,2,2,2 olacaktır. 4,4,0,0 durumunda istenilen yerleştirme bulunmuyor. Benzer şekilde sütunlardaki sayıların toplamları herhangi bir sırayla 3,3,1,1 olacaktır. 4,2,2,0 durumunda toplamı 4 ve toplamı 0 olan satırları $\binom{4}{1}\binom{3}{1}$ şekilde seçelim. Daha sonra da toplamı 3 olan sütunları $\binom{4}{2}$ şekilde seçersek yerleştirme tamamlanmış olur. 2,2,2,2 durumunda toplamları 3 olan sütunları $\binom{4}{2}$ şekilde seçelim. Daha sonra bu sütunlardan en soldakıne 3 tane 1 yerleştirelim. Bu iki sütundaki 6 tane 1 sayısı 3 satırda ise, yerleştirme tamamlanmış olur. Bu iki sütundaki 6 tane 1 sayısı 4 satırda ise, bu 6 tane 1 sayısının ikişer tane bulunduğu iki satırı $\binom{4}{2}$ şekilde seçelim. Bundan sonra yerleştirme 2 farklı şekilde tamamlanıyor. Buna göre cevap

$$\binom{4}{1}\binom{3}{1}\binom{4}{2} + \binom{4}{2}\binom{4}{3} + \binom{4}{2}\binom{4}{3}\binom{3}{2} \cdot 2 = 240$$

olur.

21. Bir $ABCD$ dikdörtgeninin $[CD]$ kenarı üzerinde alınan bir E noktası $|AE| = |CD|$ eşitliğini sağlamaktadır. $AE \cap BC = \{F\}$ olmak üzere, $ECFG$ bir dikdörtgen olacak şekilde bir G noktası alınıyor. $DF \cap AG = \{K\}$ olmak üzere, $m(\widehat{AKE}) = 45°$ ve $m(\widehat{KAE}) = 25°$ ise, $m(\widehat{EAB})$ kaçtır?

a) 20° b) 30° c) 40° d) 45° e) Hiçbiri

Cevap 40°. $|DE| = x$, $|EC| = y$, $AG \cap CD = \{L\}$ diyelim. Öncelikle $|AB| = |CD| = x + y$ olup, $AB \parallel CD \parallel GF$ kullanarak $\dfrac{|AL|}{|LG|} = \dfrac{|AE|}{|EF|} = \dfrac{|BC|}{|CF|} = \dfrac{x}{y}$ buluruz. Buradan $|GF| = |EC| = y$ olduğundan $\dfrac{|LE|}{|GF|} = \dfrac{|AE|}{|AF|} = \dfrac{x}{x+y}$ ve dolayısıyla $|LE| = \dfrac{xy}{x+y}$ buluruz, bu da $|LD| = x - \dfrac{xy}{x+y} = \dfrac{x^2}{x+y}$ demektir. $\dfrac{|LK|}{|KG|} = \dfrac{|LD|}{|GF|} = \dfrac{y^2}{y(x+y)}$ eşitliğinden $\dfrac{|LK|}{|LG|} = \dfrac{x^2}{x^2+xy+y^2}$ olur, $\dfrac{|AL|}{|LG|} = \dfrac{x}{y}$ olduğundan $\dfrac{|LK|}{|LA|} = \dfrac{xy}{x^2+xy+y^2} = \dfrac{|LE|}{|AB|}$ elde ederiz, bu da K, E, B noktalarının doğrudaş olduğunu gösterir. Sonuç olarak, $m(\widehat{BEA}) = m(\widehat{AKE}) + m(\widehat{KAE}) = 70^\circ$ olup, $|AE| = |CD| = |AB|$ olduğundan $m(\widehat{EAB}) = 180^\circ - 140^\circ = 40^\circ$ buluruz.

22. $2^{22!} - 1$ sayısını bölmeyen en küçük tek pozitif tam sayının rakamları toplamı kaçtır?

a) 7 b) 9 c) 11 d) 13 e) 15

Cevap: 11. Verilen sayıyı bölmeyen en küçük tek pozitif tam sayı p^a formunda olmalı. Euler teoreminden dolayı $(p-1)p^{a-1} | 22!$ ise, $p^a | 2^{22!} - 1$ olur. 23'ten büyük olmayan tek sayılar bariz şekilde bu sayıyı böler. 25'ten 45'e kadar olan tek sayıların da bu sayıyı böldüğü kolayca görülür. Şimdi 47'nin bu sayıyı bölmediğini gösterelim. Farzedelim ki bölsün. Fermat teoreminden $2^{46} \equiv 1 \pmod{47}$ olduğunu biliyoruz. Wilson teoreminden dolayı da $22! \equiv -1 \pmod{23}$ olur. O halde $22! = 46k + 22$ formundadır. O halde $2^{22} \equiv 1 \pmod{47}$ olur ve buradan da $2^{44} \equiv 1 \pmod{47}$ ve $2^2 \equiv 1 \pmod{47}$ gelir, çelişki. Demek ki istenen sayı 47'dir.

23. x, y, z, a pozitif gerçel sayılar olmak üzere, $xyz = a$ şartını sağlayan tüm (x, y, z) üçlüleri için $x^2 + 2y^2 + 4z^2 - 6xyz$ sayısının alabileceği en küçük değere $f(a)$ diyelim. $f(a)$ sayısının alabileceği en büyük değer kaçtır?

a) 1 b) $\sqrt{2}$ c) $\dfrac{11}{12}$ d) $\dfrac{8}{9}$ e) $\sqrt[3]{3}$

Cevap: $\dfrac{8}{9}$. $a = b^3$ diyelim. AGO'dan dolayı $x^2 + 2y^2 + 4z^2 \geq 6\sqrt[3]{x^2y^2z^2} = 6b^2$ olur. Dolayısıyla sorudaki ifadenin en küçük değeri b cinsinden $6b^2 - 6b^3$ olur ve bu da $x = b\sqrt{2}, y = b, z = b/\sqrt{2}$ iken sağlanır. Şimdi bunun alabileceği en büyük değeri bulalım. $b > 1$ ikan ifade negatiftir. $0 < b \leq 1$ iken AGO'dan dolayı

$$1 = \frac{b}{2} + \frac{b}{2} + 1 - b \geq 3\sqrt[3]{\frac{b^2(1-b)}{4}}$$

olur ve $b^2(1-b) \leq \dfrac{4}{27}$ bulunur. Dolayısıyla $f(a) = f(b^3)$ en fazla $\dfrac{24}{27} = \dfrac{8}{9}$ olabilir.

24. Başlangıçta bir doğru üzerinde farklı ağırlıklı n top soldan sağa hafiften ağıra doğru sıralanmıştır. Her işlemde aralarında 2 veya 5 top olan iki top birbirleriyle yer değiştiriliyor. $n = 2022, 2023, 2024, 2025$ değerlerinin kaçı için birkaç işlem sonucunda toplar soldan sağa ağırdan hafife doğru dizilebilir?

a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4

Cevap: 0. n sayısının herhangi bir değerinde toplar ters yönde dizilemez. Topların, koordinatları $1, 2, \dots, n$ olan sayılar üzerinde bulunduklarını varsayalım. Her defa işlem yapılan topun koordinatı 3 ya da 6 artar ya da azalır. Bu sayılar 3 ün katıdır. İstenilen dizilim yapılırsa en ağır topun koordinatı $n-1$ azalacaktır. Buna göre, $3|n-1$. İkinci en ağır topun da koordinatı $n-3$ azalacaktır. Buna göre, $3|n-3$. Bu iki koşulu sağlayan n sayısı bulunmuyor.

25. Çeşitkenar bir ABC üçgeninde $[BC]$ kenarının orta noktası M olmak üzere, AC doğrusuna C noktasında dik olan doğrunun MA doğrusu ile kesişimi N olsun. BMN üçgeninin çevrel çemberi AB doğrusuna B noktasında teğet ise, $\dfrac{|AB|}{|MA|}$ kaçtır?

a) 1 b) $\sqrt{2}$ c) $\sqrt{3}$ d) 2 e) $\sqrt{5}$

Cevap 2. $|MA| = 1$, $|AB| = x$, $|AC| = y$ diyelim. A'nın M'ye göre yansımasına D dersek $|CD| = x$ olduğu açıktır. Kuvvetten $|MN| = x^2 - 1$ ve Pisagor teoreminden $|CN| = \sqrt{x^4 - y^2}$ olur. ACN üçgeninde CD kesenine göre Stewart teoremi yaparsak, $\dfrac{2(x^4 - y^2) + (x^2-2)y^2}{x^2} - 2(x^2 - 2) = x^2$ elde ederiz. Düzenlersek, $(x^2 - 4)(y^2 - x^2) = 0$ bulunur, $x \neq y$ olduğundan $x = 2$ buluruz.

26. $n \leq 2024$ bir pozitif tam sayı olmak üzere; $\{kn : \; k \in \mathbb{Z}, 1 \leq k \leq 2024\}$ kümesinde tam olarak 9 tane tam kare bulunmasını sağlayan n sayılarının toplamı kaçtır?

a) 18240 b) 18810 c) 19380 d) 19950 e) 20520

Cevap: 18810. Her pozitif tam sayı, xy^2 (x bir veya birkaç farklı asalın çarpımı veya 1, y pozitif tam sayı) formunda tek türlü yazılır. $n = ab^2$ şartı sağlayan bir sayı olsun. nm bir tam karedir ancak ve ancak $m = ac^2$'dir. Bu durumda $a \cdot 9^2 \leq 2024 < a \cdot 10^2$ olmalı. Buradan $2024/100 = 20,24 < a \leq 2024/81 = 24,98$, yani $21 \leq a \leq 24$ olur. O zaman $a = 21, 22, 23$ olabilir. Böylece istenen sayıların toplamı

$$(21 + 22 + 23)(1^2 + 2^2 + \cdots + 9^2) = 66 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 19/6 = 18810$$

elde edilir.

27. Birbirinden farklı x, y, z gerçel sayıları,

$$x^2 + y^2 = 9x + 7y + 6z$$
$$y^2 + z^2 = 7x + 7y + 8z$$
$$z^2 + x^2 = 6x + 8y + 8z$$

eşitliklerini sağlıyorsa, $\dfrac{15x^2 + 4y^2}{z^2}$ kaçtır?

a) 4 b) 5 c) 6 d) 7 e) Hiçbiri

Cevap: 7. Birinci ve ikinci denkleme bakarsak $x^2 - z^2 = 2(x - z)$, ikinci ve üçüncü denkleme bakarsak $y^2 - x^2 = x - y$ olup, x, y, z birbirinden farklı olduğundan $z = 2 - x$ ve $y = -1 - x$ elde ederiz. İkinci denklemde yerine koyarsak $(-1 - x)^2 + (2 - x)^2 = 7x + 7(-1 - x) + 8(2 - x)$ ve buradan $x^2 + 3x - 2 = 0$ buluruz. Dolayısıyla, $x^2 = 2 - 3x$, $y^2 = x^2 + 2x + 1 = 3 - x$ ve $z^2 = x^2 - 4x + 4 = 6 - 7x$ olup, $\dfrac{15x^2 + 4y^2}{z^2} = \dfrac{15(2 - 3x) + 4(3 - x)}{6 - 7x} = \dfrac{42 - 49x}{6 - 7x} = 7$ elde ederiz.

28. $(x_1, \ldots, x_{32})$ 32-lisi $(1, 2, \ldots, 32)$'nin bir permütasyonu olmak üzere, her $i = 1, \ldots, 32$ için $y_i = \max\{x_1, x_2, \ldots, x_i\}$ olsun. Tam olarak 2 tane i indisi için $y_i = x_i$ olmasını sağlayan $(x_1, x_2, \ldots, x_{32})$ permütasyonlarının sayısının 29 ile bölümünden kalan kaçtır?

a) 0 b) 4 c) 9 d) 18 e) 27

Cevap: 27. $(1, 2, \ldots, n)$ için tam olarak iki indisin şartı sağladığı permütasyonların sayısı $f(n)$ olsun. 1'in en başta olması ve olmaması durumuna göre $f(n + 1)$'i inceleyelim. 1 en başta ise hemen ardında $n + 1$

olmalı ve geriye kalan $2, 3, \ldots, n$ sayıları rastgele bir şekilde sıralanabilir. 1 en başta değilse, 1 sayısı $(2, 3, \ldots, n+1)$ için şartı sağlayan bir permütasyonda en baş hariç rastgele bir yere gelebilir. Böylelikle $f(n+1) = (n-1)! + nf(n)$ olduğu görülür. $f(2) = 1$'den yola çıkarak her $n \geq 2$ için

$$f(n) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(n-1)!}{k}$$

olduğu görülür. O halde

$$f(32) = \sum_{k=1}^{31} \frac{31!}{k} \equiv \frac{31!}{29} = 28! \cdot 30 \cdot 31 \equiv (-1) \cdot 1 \cdot 2 \equiv 27 \pmod{29}$$

bulunur.

29. $|AB| > |AC|$ olan bir ABC üçgeninde $\widehat{A}$ açısına ait dış açıortayın BC ile kesişimi D olsun. $|BC| = 24\sqrt{2}$, $|AB| = 35$ ve $m(\widehat{ADC}) = 45^\circ$ ise, ABC üçgeninin alanı kaçtır?

a) 60 b) 70 c) 72 d) 84 e) 98

Cevap 84. C den AB ye çizilen paralelin AD ile kesişimi E, C den AD ye inilen dikme ayağı H olsun. $|AC| = x$, $|CH| = y$, $|AH| = t$ diyelim. Açıkça $|HE| = t$, $|ED| = y - t$, $|CD| = y\sqrt{2}$, $|CE| = x$ olur. Paralellikten $\dfrac{y}{24} = \dfrac{y-t}{2t}$ ve $\dfrac{x}{35} = \dfrac{y-t}{y+t}$ bulunur. Düzenlersek $t = \dfrac{12y}{y+12}$ ve $x = \dfrac{35y}{y+24}$ olur. Pisagor teoreminden $\left(\dfrac{35y}{y+24}\right)^2 = y^2 + \left(\dfrac{12y}{y+12}\right)^2$ olup $y = 4$ bulunur. Yerine koyarsak $t = 3$ olup, $|AD| = y + t = 7$ olur. Dolayısıyla A noktasından BC ye inilen yükseklik uzunluğu $\dfrac{7}{\sqrt{2}}$ olup,

$$A(ABC) = \frac{24\sqrt{2} \times 7}{2\sqrt{2}} = 84 \text{ bulunur.}$$

30. Pozitif tam bölenlerinin ortancası (medyanı) 63 olan en küçük pozitif tam sayının rakamları toplamı kaçtır? (Bir veri grubunun ortancası, veri grubu küçükten büyüğe doğru sıralandığında veri sayısı tekse en ortadaki sayıya, çiftse en ortadaki iki sayının aritmetik ortalamasına eşittir.)

a) 8 b) 14 c) 18 d) 20 e) 22

Cevap: 20. n şartı sağlayan bir sayı olsun. n tam kare ise, tek sayıda pozitif tam bölene sahiptir ve ortancası $\sqrt{n}$ olur. Bu durumda $n = 63^2$ olur. n tam kare değilse, çift sayıda pozitif tam bölene sahiptir. Bunlar

$d_1 < d_2 < \cdots < d_{2k}$ olsun. O halde $d_k + d_{k+1} = 126$ ve $d_k d_{k+1} = n$ olmalı. n en küçük değerini d_k'nin en küçük değerinde alır. Ayrıca n'nin d_k ile d_{k+1} arasında başka bir böleni olmamalı. Bundan dolayı $2|1 \cdot 125$, $4|2 \cdot 124$, $9|3 \cdot 123$, $8|4 \cdot 122$, $55|5 \cdot 121$, $12|6 \cdot 120$, $17|7 \cdot 119$, $16|8 \cdot 118$, $27|9 \cdot 117$, $20|10 \cdot 116$, $55|11 \cdot 115$ ve $24|12 \cdot 114$ olduğu için d_k en az 13 olabilir. 13 ve 113 asal sayı olduklarından $n = 13 \cdot 113 = 1469$ şartı sağlayan en küçük sayıdır.

31. Bir $\{a_n\}_{n\geq 1}$ dizisi, $a_1 = 2$ ve her $n \geq 1$ tam sayısı için

$$\left(a_{n+1} - \frac{3a_n+1}{a_n+3}\right)\left(a_{n+1} - \frac{5a_n+1}{a_n+5}\right) = 0$$

şartını sağlamaktadır. Buna göre, a_{2024} sayısı kaç farklı değer alabilir?

a) 2024 b) 2024^2 c) 2^{2023} d) 2^{2024} e) Hiçbiri

Cevap: 2024. Sorudaki şarttan dolayı ya $a_{n+1} = \dfrac{3a_n+1}{a_n+3}$ ya da $a_{n+1} = \dfrac{5a_n+1}{a_n+5}$ olacaktır. Eğer $a_{n+1} = \dfrac{3a_n+1}{a_n+3}$ olursa, iki tarafa 1 eklediğimizde $a_{n+1} + 1 = \dfrac{4(a_n+1)}{a_n+3}$ ve iki taraftan 1 çıkardığımızda $a_{n+1} - 1 = \dfrac{2(a_n-1)}{a_n+3}$ bulunur. $b_n = \dfrac{a_n+1}{a_n-1}$ olarak tanımlayıp bu iki kesri birbirine oranladığımızda $b_{n+1} = 2b_n$ bulunur. Ayrıca, bu şartı sağlayan a_n sayılarının $a_{n+1} = \dfrac{3a_n+1}{a_n+3}$ şartını sağladığı da kolayca görülebilir. Benzer şekilde $a_{n+1} = \dfrac{5a_n+1}{a_n+5}$ olursa $b_{n+1} = \dfrac{3b_n}{2}$ bulunur. Dolayısıyla $b_{2024} = 2^x(\frac{3}{2})^{2023-x}b_1$ formunda gelir ve 2024 farklı değer alabilir. $b_n > 1$ belliyken a_n de tek türlü belli olacağı için cevap 2024 olur.

32. İlk hamleyi Aslı yapmak üzere, Aslı ve Zehra sırayla hamle yaparak bir oyun oynuyorlar. Hamleler yapılmadan önce Zehra $1, 2, \ldots, 200$ sayılarıyla numaralanmış bilyeleri istediği bir sırayla bir doğru üzerine diziyor. Sırası gelen oyuncu bu bilye dizisinin en solunda ve en sağında bulunan iki bilyeden birini alıyor. Zehra, yüzüncü bilyesini aldığında elindeki en büyük ve en küçük numaralı bilyelerin numaraları farkının en fazla N olmasını garantileyebiliyorsa, N sayısının alabileceği en küçük değer kaçtır?

a) 99 b) 112 c) 125 d) 149 e) Hiçbiri

Cevap: 99. Zehra bilyeleri soldan sağa doğru numaraları 1, 101, 2, 102, 3, 103, ..., 98, 198, 99, 199, 100, 200 olacak şekilde diziyor ve Aslı'nın her hamlesinden sonra onun en son bilye aldığı uçtan bilye alıyor. O zaman Zehra sol taraftan $101, 102, ...$ numaralı k ve sağ taraftan $100, 99, \ldots$ numaralı $100 - k$ bilye alacaktır. Buna göre, Zehra aldığı 100 bilyenin tamamının ardışık numaralı bilye olmasını garantileyecektir.