

32. Ulusal Bilim Olimpiyatları
Matematik İkinci Aşama Sınavı

Birinci Gün
15 Aralık 2024

1. $n \geq 3$ bir pozitif tam sayı olmak üzere, n köşeli bir tam çizgenin her kenarına birer gerçel sayı aşağıdaki koşulları sağlayacak şekilde yazılmıştır:

- (i) Çizgedeki her üçgenin kenarlarına yazılan sayılardan ikisi birbirine eşit olup diğer sayı ise bu sayılardan büyüktür.
- (ii) Her köşenin *ağırlığı*, o köşeden çıkan kenarlara yazılan sayıların toplamı olmak üzere, tüm köşelerin ağırlıkları birbirlerine eşittir.

Buna göre, n sayısının alabileceği tüm değerleri bulunuz.

2. Dar açılı bir ABC üçgeninin diklik merkezi H ve A, B, C köşelerinden indirilen yüksekliklerin ayakları sırasıyla D, E, F olsun. DEF üçgeninin çevrel çemberine D noktasında teğet olan bir çemberin EF doğrusu ile kesiştiği noktalar P ve Q olsun. PH ve QH doğruları ile BHC üçgeninin çevrel çemberinin ikinci kesişim noktaları sırasıyla R ve S olsun. A noktasından geçen ve EF doğrusuna dik olan doğrunun BC doğrusu ile kesiştiği nokta T olsun. R, S, D, T noktalarının çemberdeş olduğunu gösteriniz.

3. Her $n \geq 2$ tam sayısı için $f(n)$ ile n sayısının farklı asal bölenlerinin çarpımını gösterelim (örneğin, $f(5) = 5, f(8) = 2$ ve $f(12) = 6$ olur). a_1, a_2, \dots dizisi, $a_1 \geq 2$ bir tam sayı ve her $n \geq 1$ için

$$a_{n+1} = a_n + f(a_n)$$

olacak şekilde tanımlanıyor. Her p asal sayısı için, $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$ dizisinde p ile bölünen bir terim bulunduğunu gösteriniz.

32. Ulusal Bilim Olimpiyatları
Matematik İkinci Aşama Sınavı

İkinci Gün
16 Aralık 2024

4. n bir pozitif tam sayı ve n sayısının tüm pozitif bölenleri $1 = d_1 < d_2 < \dots < d_k = n$ olsun.

$$\begin{aligned}2d_2 + d_4 + d_5 &= d_7 \\d_3 d_6 d_7 &= n \\(d_6 + d_7)^2 &= n + 1\end{aligned}$$

eşitlikleri sağlanıyorsa, n sayısının alabileceği tüm değerleri bulunuz.

5. Her $x, y, z \in \mathbb{R}^+$ için

$$\left\{ \frac{f(x)}{f(y)} \right\} + \left\{ \frac{f(y)}{f(z)} \right\} + \left\{ \frac{f(z)}{f(x)} \right\} = \left\{ \frac{x}{y} \right\} + \left\{ \frac{y}{z} \right\} + \left\{ \frac{z}{x} \right\}$$

denklemini sağlayan tüm $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ fonksiyonlarını bulunuz.

Not. Bir x gerçel sayısı için, $[x]$ sayısı x in tam değeri olmak üzere, $\{x\} = x - [x]$ olarak tanımlanıyor: $\{2.7\} = 0.7$ ve $\{4\} = 0$.

6. $m, n \geq 2$ tam sayılar olmak üzere, $m \times n$ satranç tahtasının bazı birim karelerine birer kale, her kale tek sayıda kale tarafından tehdit edilecek şekilde yerleştirilmiştir. Buna göre, satranç tahtasının üzerindeki kale sayısının alabileceği en büyük değeri bulunuz.