TÜRKİYE BİLİMSEL VE TEKNOLOJİK ARAŞTIRMA KURUMU
BİLİM İNSANI DESTEK PROGRAMLARI BAŞKANLIĞI

32. BİLİM OLİMPİYATLARI - 2024
BİRİNCİ AŞAMA SINAVI
ORTAOKUL MATEMATİK

Soru Kitapçığı Türü

A

18 Mayıs 2024 Cumartesi, 09.30-12.30

ÇÖZÜMLER

1. Bir konveks (dışbükey) çokgenin dar açılı iç açılarının sayısı, $0, 1, 2, 3, 4$ sayılarından kaçına eşit olabilir?

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

Cevap 4. Her konveks çokgenin dış açılarının toplamı 360° olup, en fazla üç tane dış açısı geniş olabilir, bu da iç açılarından en fazla üç tanesinin dar açılı olabileceğini gösterir. Bir karede sıfır tane, dik açılı bir yamukta tam olarak bir tane, dik bir üçgende tam olarak iki tane ve eşkenar üçgende tam olarak üç tane dar açı vardır, dolayısıyla 0, 1, 2, 3 olabilir, 4 olamaz.

2. a, b ve c pozitif tam sayılar olmak üzere $b^2 = ac$ ve $abc = 216$ eşitlikleri sağlanmaktadır. Buna göre a, b ve c sayılarının en küçük ortak katlarının alabileceği farklı değerlerin toplamı kaçtır?

a) 54 b) 60 c) 66 d) 72 e) 78

Cevap: 72. Verilen eşitliklerden $b^3 = 216$ ve dolayısıyla $b = 6$ bulunur. O zaman $ac = 36$'dır. Durumlar incelendiğin mümkün ortak katların 6,12,18 ve 36 oldukları görülür. Böylece cevap $6 + 12 + 18 + 36 = 72$'dir.

3. x ve y gerçel sayılar olmak üzere, $x^3 + y^3 + 3xy = 1$ eşitliği sağlanıyorsa, $x + y$ toplamının alabileceği kaç farklı değer vardır?

a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4

Cevap: 2. 1'i karşıya atıp çarpanlara ayırırsak $(x + y - 1)(x^2 - xy + y^2 + x + y + 1) = 0$ bulunur. $x + y = 1$ olması durumunda denklem sağlanır. $x + y \neq 1$ ise, $x^2 - xy + y^2 + x + y + 1 = 0$ olmalıdır. Bu denklemi de 2 ile çarparsak $(x - y)^2 + (x + 1)^2 + (y + 1)^2 = 0$ bulunur ve bu denklemin tek çözümü $x = y = -1$ olduğu için toplam -2 olabilir yani 2 farklı değer bulunur.

4. 5×5 bir satranç tahtasının 4 birim karesine birer bilye yerleştirilecektir. Bu yerleştirme, her bir satır ve her bir sütun en fazla bir bilye içerecek biçimde kaç farklı şekilde yapılabilir?

a) 480 b) 500 c) 575 d) 600 e) 625

Cevap: 600. Bir satır ve bir sütun boş olmalı, diğerlerinde ise birer bilye bulunmalı. O halde istenen yerleştirme $5 \cdot 5 \cdot 4! = 600$ farklı şekilde yapılabilir.

5. Dar açılı bir ABC üçgeninin iç bölgesindeki bir D noktası için, $s(\widehat{DBC}) = s(\widehat{BAC}) = 45°$, $|BD| = 5$, $|BC| = 5\sqrt{2}$ ise, $|AD|$ uzunluğu kaçtır?

a) 3 b) 4 c) $5\sqrt{2}$ d) 10 e) Hiçbiri

Cevap 5. D noktasından BC doğrusuna inilen dikme ayağına E diyelim. $s(\widehat{DBE}) = 45°$ olduğundan $|BE| = |DE| = |EC| = 5/\sqrt{2}$ olup, Pisagor teoreminden $|CD| = 5$ ve dolayısıyla $s(\widehat{BDC}) = 90°$ buluruz. D merkezli ve $[BD]$ yarıçaplı çember, $|BD| = |CD|$ ve $s(\widehat{BDC}) = 2 \cdot s(\widehat{BAC})$ olduğundan A ve C noktalarından da geçer, yani $|AD| = 5$ olur.

6. $1^{32} + 2^{32} + 3^{32} + \cdots + 2023^{32} + 2024^{32}$ toplamının 32 ile bölümünden kalan kaçtır?

a) 20 b) 22 c) 24 d) 26 e) 28

Cevap: 20. n çiftse, n^{32} sayısı 32 ile tam bölünür. n tekse , $n^2 = 8k + 1$, $n^4 = 16k + 1$ ve $n^8 = 32k + 1$ formundadır. Dolayısıyla $n^{32} \equiv 1 \pmod{32}$ olur. Bu durumda toplam, $1012 = 32 \cdot 31 + 20$ olduğundan (mod 32)'de 20'ye denktir.

7. m ve n tam sayılar olmak üzere, $2^{m^2} + 2^{n^2} < 2^{2024}$ şartını sağlayan kaç (m, n) ikilisi vardır?

a) 5929 b) 6241 c) 7569 d) 7921 e) 8281

Cevap: 7921. $|m|$ veya $|n| \geq 45$ ise sol taraf 2^{2025}'ten daha büyük olur. Aksi durumda da sol taraf en fazla $2.2^{1936} = 2^{1937}$ olacağı için eşitsizlik sağlanır. Böylece sağlayan (m, n) ikililerinin sayısı $m, n \in \{-44, -43, \ldots, 44\}$ olduğundan $89^2 = 7921$ olur.

8. Her biri 7 farklı renkten birine boyalı olan n top 32 kutuya dağıtılmıştır. Bu kutulardan herhangi 10 tanesinin birleşiminde bu 7 rengin her biri için o renge boyalı en az bir top varsa, n en az kaç olabilir?

a) 157 b) 161 c) 176 d) 184 e) 192

Cevap: 161. a renkli top herhangi 10 kutunun en az birinde bulunmak zorundadır. Buna göre, a renkli top sayısı en az 23 olmak zorundadır. Buna göre, toplam top sayısı en az $7 \cdot 23 = 161$'dir. 161 için bir örnek kuralım: 23

kutunun her birinde farklı renkte 7 top olursa koşullar sağlanır.

9. Ağırlık merkezi G olan bir ABC üçgeninde sırasıyla $[BC]$ ve $[AC]$ kenarları üzerinde alınan D ve E noktaları için $|AE| = |EC|$ ve $5|BD| = |DC|$ veriliyor. $AD \cap BE = \{F\}$ ise, $\dfrac{|BF|}{|FG|}$ kaçtır?

a) 1/2 b) 2/3 c) 3/4 d) 4/5 e) 5/6

Cevap 3/4. $[BC]$ kenarının orta noktasına M diyelim. $5|BD| = |DC|$ olduğundan $|DM| = 2|DB|$ olur. Ağırlık merkezinin tanımından MA ile BE doğrularının kesişimi G noktasıdır ve $|AG| = 2|GM|$ dir. Menelaus teoreminden $\dfrac{|AG|}{|AM|}\dfrac{|MD|}{|BD|}\dfrac{|BF|}{|FG|} = 1$ olup, cevap 3/4 bulunur.

10. 30'un bir tam katı olup tam olarak 30 pozitif böleni olan en büyük pozitif tam sayı ile en küçük pozitif tam sayının farkı kaçtır?

a) 10530 b) 10620 c) 10710 d) 10800 e) 10890

Cevap: 10530. 30 ile bölünen bir sayı $2^a3^b5^cN$ $(a, b, c \geq 1)$ şeklinde olup bu sayının bölen sayısı en az $(a+1)(b+1)(c+1)$'dir. Diğer taraftan $30 = 2\cdot3\cdot5$ olduğuna göre, tek seçeneğin $N = 1$ ve $\{a, b, c\} = \{1, 2, 4\}$ olmasıdır. Buna göre, cevap $2^13^25^4 - 2^43^25^1 = 11250 - 720 = 10530$ olur.

11. a, b, c gerçel sayılar olmak üzere, $a + b = 30$ ve $ab = 225 + c^2$ eşitliklerini sağlayan kaç (a, b, c) üçlüsü vardır?

a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) Sonsuz çoklukta

Cevap: 1. $(a - b)^2 = (a + b)^2 - 4ab = -4c^2$ olduğu için $c = 0$ ve $a = b = 15$ olmalıdır yani bu denklem sisteminin tek çözümü vardır.

12. Başlangıçta 12 kırmızı ve 12 beyaz top bir doğru boyunca en soldaki top kırmızı ve yan yana bulunan herhangi iki top farklı renkte olacak şekilde sıralanmıştır. Her işlemde yan yana olan farklı renkli iki topun yerleri birbirleriyle değiştirilmektedir. Buna göre bu toplar, en az kaç işlem sonucunda soldan ilk 12 top beyaz olacak şekilde yeniden dizilebilir?

a) 70 b) 72 c) 74 d) 76 e) 78

Cevap: 78. Topların başlangıçta bulunduğu yerleri soldan sağa doğru $1, 2, \ldots, 24$ sayıları ile numaralandıralım. O zaman başlangıçta beyaz toplar $2, 4, \dots, 24$ sayılarının üzerinde bulunmuş olacak. Her işlemde bir beyaz topun üzerinde bulunan sayı en fazla 1 azalabilir. Başlangıçta beyaz topların bulundukları yerlerin numaraları toplamı $2+4+\cdots+24 = 156$'dır. Soldan ilk 12 topun beyaz olduğu durumda ise bu topların bulundukları yerlerin numaraları toplamı $1+2+\cdots+12 = 78$ olur. Buna göre, en az $156 - 78 = 78$ hamle gerekiyor. Diğer taraftan 78 hamle yeterlidir. Her işlemde renkleri soldan sağa kırmızı ve beyaz olan herhangi bir top ikilisine uygulayarak istenilen dizilime ulaşılıyor.

13. Bir $ABCD$ paralelkenarında $\widehat{A}$ açısının iç açıortayı ile $\widehat{B}$ açısının iç açıortayı paralelkenarın içinde bir E noktasında kesişmektedir. BE ve CD doğrularının kesişimi $[CD]$ kenarı üzerinde bir F noktasıdır. $|AE| = 15$, $|AB| = 25$, $|BF| = 24$ olduğuna göre $|BC|$ uzunluğu kaçtır?

a) 14 b) 15 c) 16 d) 17 e) 18

Cevap 15. Öncelikle $AD \parallel BC$ olduğundan $s(\widehat{AEB}) = 90^\circ$ olup Pisagor teoreminden $|BE| = 20$ ve buradan $|EF| = 4$ bulunur. AE doğrusunun $[CD]$ kenarı ile kesişimi G olsun. $\triangle FEG \sim \triangle BEA$ olduğundan $|FG| = 5$ bulunur. $AB \parallel CD$ olduğundan $|AD| = |DG| = |FC|$ olduğu açıktır, buradan $|AB| = 2|AD| - |GF|$ olup $|AD| = 15$ bulunur.

14. Bir tahtaya $1, 2, \dots, 100$ sayıları yazılmıştır. Tahtadaki bir k sayısı dışındaki 99 sayının aritmetik ortalaması bir tam sayı ise k sayısına *hoş* sayı diyelim. Tahtadaki tüm hoş sayıların toplamı kaçtır?

a) 101 b) 108 c) 113 d) 118 e) 127

Cevap: 101. Tahtadaki tüm sayıların toplamı $1+2+\cdots+100 = 101 \cdot 50 = 5050$'dir. Buna göre, her hoş k sayısı için $99|5050 - k$. 5049 sayısı 99'un bir tam katı olduğuna göre, $99|k–1$ ve buradan da $k = 1$ veya 100 bulunur.

15. x ve y gerçel sayıları

$$3x^2y + 3y - 1 = 3y^2x + 3x - 1 = x^2y^2 + x^2 + y^2$$

denklem sistemini sağlamaktadır. $x+y$ sayısının alabileceği farklı değerlerin toplamı kaçtır?

a) 0 b) 6 c) $3\sqrt{5}$ d) 9 e) 12

Cevap: 9. 1. ve 3. ifadelerin eşitliğinden $(x^2 + 1)(y^2 - 3y + 1) = 0$, 2. ve 3. ifadelerin eşitliğinden $(y^2 + 1)(x^2 - 3x + 1) = 0$ bulunur. Bu durumda iki sayı sayı da $t^2 - 3t + 1$ polinomunun kökleridir. Bu köklere t_1, t_2 dersek, $x + y$ nin alabileceği değerler $2t_1$, $t_1 + t_2$ ve $2t_2$ olur. $t_1 + t_2 = 3$ olduğu için bu sayıların toplamı 9 olarak bulunur.

16. Pozitif tam sayılardan oluşan $a_1, a_2, ..., a_8$ dizisinde $a_8 \leq 9$ ve her $1 \leq i \leq 7$ için a_i sayısı a_{i+1} sayısını bölüyorsa bu diziye *uyumlu* dizi diyelim. Uyumlu dizi sayısı kaçtır?

a) 269 b) 276 c) 289 d) 298 e) 302

Cevap: 289. Sadece bir farklı elemandan oluşan uyumlu dizi sayısı 9'dur. İki farklı elemandan oluşan uyumlu bir dizideki farklı eleman ikilileri $(1, 2), (1, 3), \ldots, (1, 9), (2, 4), (2, 6), (2, 8), (3, 6), (3, 9), (4, 8)$ olabilir. Bu dizide farklı elemanları ayıran yer 7 farklı şekilde seçilebilr. Üç farklı elemandan oluşan uyumlu bir dizideki farklı eleman üçlüleri $(1, 2, 4), (1, 2, 6), (1, 2, 8), (1, 3, 6), (1, 3, 9), (1, 4, 8), (2, 4, 8)$ olabilir. Bu dizide farklı elemanları ayıran yer $\binom{7}{2}$ farklı şekilde seçilebilir. Dört farklı elemandan oluşan uyumlu bir dizideki farklı eleman dörtlüsü sadece $(1, 2, 4, 8)$ olabilir. Bu dizide farklı elemanları ayıran yer $\binom{7}{3}$ farklı şekilde seçilebilir. Buna göre, cevap $9 + 14 \cdot 7 + 7 \cdot 21 + 1 \cdot 35 = 289$ olur.

17. Bir dik koordinat düzleminde orijin noktasındaki bir robot, $(0, 13)$, $(2, 13)$, $(2, -4)$, $(0, -4)$ noktalarının oluşturduğu dikdörtgen bölgenin içine girememektedir. Robot en fazla 8 birim yol katedebildiğine göre, robotun gidebileceği tüm noktalar kümesinin alanı kaç birim karedir?

a) 29π b) 31π c) 33π d) 35π e) 37π

Cevap 37π. Robot orijin merkezli 8 birim yarıçaplı bir yarım daireye, ek olarak $(0, -4)$ merkezli 4 birim yarıçaplı bir çeyrek daireye ve buna da ek olarak $(2, -4)$ merkezli 2 birim yarıçaplı bir çeyrek daireye ulaşabilir. Buradan da cevap $32\pi + 4\pi + \pi = 37\pi$ olur.

18. m ve n pozitif tam sayılar olmak üzere, $m^3 - 3m^2 + 3m = 8n + 8$ eşitliğini sağlayan bir (m, n) ikilisi için $m + n$'nin alabileceği en küçük değer kaçtır?

a) 42 b) 44 c) 46 d) 48 e) 50

Cevap: 50. $(m - 1)^3 = 8n + 7$'dir. (mod 8)'de sağ taraf 7'ye denktir. Küpü (mod 8)'de 7'ye denk olan bir tam sayı tektir ve kendisi de (mod 8)'de 7'ye denktir. O halde $m - 1$ en az 7'dir. O zaman en küçük toplam $m = 8$ ve

$n = 42$ iken 50'dir.

19. $f(x) = \dfrac{x^3}{3x^2 - 3x + 1}$ olmak üzere,

$$f\left(\frac{1}{33}\right) + f\left(\frac{2}{33}\right) + f\left(\frac{3}{33}\right) + \cdots + f\left(\frac{31}{33}\right) + f\left(\frac{32}{33}\right)$$

toplamı kaçtır?

a) $\dfrac{65}{33}$ b) $\dfrac{31}{2}$ c) 16 d) $\dfrac{496}{33}$ e) $\dfrac{33}{2}$

Cevap: 16. $3x^2 - 3x + 1 = x^3 + (1-x)^3$ olduğuna göre, $f(\frac{i}{33}) + f(\frac{33-i}{33}) = 1$'dir. Buna göre, sonuç 16 olur.

20. n futbol takımının katıldığı bir turnuvada her takım ikilisi aralarında tam olarak bir maç yapmıştır ve her bir maç bir takımın galibiyeti veya beraberlik ile sonuçlanmıştır. Tüm maçlar yapıldıktan sonra her takımın kazandığı maç sayısının, berabere kaldığı maç sayısının 1,5 katı olduğu görülmüştür. Buna göre, n sayısı 9, 10, 11, 12, 13 sayılarından kaçına eşit olabilir?

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

Cevap: 1. Takımları $1, 2, \ldots, n$ sayılarıyla numaralandıralım. i numaralı takımın kazandığı maç sayısı a_i, berabere kaldığı maç sayısı ise b_i olsun. O zaman $a_i = 1,5b_i$ olduğuna göre, turnuvada beraberlikle biten toplam maç sayısı

$$\frac{b_1 + b_2 + \cdots + b_n}{2},$$

yapılan toplam maç sayısı ise

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \frac{b_1 + b_2 + \cdots b_n}{2} = 2(b_1 + b_2 + \cdots + b_n)$$

olur. Sonuç olarak turnuvadaki toplam maç sayısı beraberlikle biten toplam maç sayısının 4 katıdır. $\binom{n}{2}$ ifadesi $10, 11, 12, 13$ değerleri için 4'ün bir tam katı değildir. Son olarak $n = 9$ için bir örnek verelim. 9 takımı her biri 3 takımdan oluşan A,B ve C gruplarına ayıralım. Her grup içindeki maçlar beraberlikle sonuçlansın ve A grubundakı her takım B grubundaki, B grubundakı her takım C grubundaki, C grubundakı her takım A grubundaki her bir takımı yensin. Bu durumda koşullar sağlanıyor.

21. $|AB| < |AC|$ olan dar açılı bir ABC üçgeninde $[BC]$ kenarının orta noktası D ve B noktasından $[AC]$ kenarına inilen dikme ayağı E olmak üzere,

D noktasından AD doğrusuna çizilen dikme ile BE doğrusunun kesişim noktası F olsun. $s(\widehat{EFD}) = 30°$ ve $s(\widehat{ACB}) = 40°$ ise, $s(\widehat{FAC})$ kaçtır?

a) 70° b) 75° c) 80° d) 85° e) 90°

Cevap 80°. Öncelike $|AB| < |AC|$ olduğundan $s(\widehat{ADB}) < 90°$ olup B noktası E ile F arasındadır. $s(\widehat{AEF}) = s(\widehat{ADF}) = 90°$ olduğundan A, E, D, F çemberdeş olur, buradan $s(\widehat{CAD}) = s(\widehat{EAD}) = s(\widehat{EFD}) = 30°$ ve $s(\widehat{FAD}) = s(\widehat{FED}) = 90° - s(\widehat{DEC})$ buluruz. Diğer taraftan süper üçlüden $|DE| = |DC|$ olup $s(\widehat{DEC}) = s(\widehat{ACB}) = 40°$ olur. Yani $s(\widehat{FAC}) = s(\widehat{CAD}) + s(\widehat{FAD}) = 30° + 50° = 80°$ bulunur.

22. Bir $A > 32$ pozitif tam sayısının 32 ile bölümünde bölüm B, kalan ise 19'dur. A'nın B ile bölümünden kalan C ise, C'nin alabileceği kaç farklı değer vardır?

a) 11 b) 13 c) 15 d) 17 e) 19

Cevap: 11. $A = 32B + 19$. O zaman A'nın B ile bölümünden kalan, 19'un B ile bölümünden kalana eşittir. $B > 19$ ise $C = 19$. Sırasıyla $B = 19, 18, \ldots, 10$ için $C = 0, 1, \ldots, 9$ olur. $B = 1, 2, \ldots, 9$ için $C \leq 8$ olur ve önceki bulduklarımızdan farklı bir değer gelmez. Dolayısıyla cevap 11'dir.

23. x, y, z, t pozitif gerçel sayılar olmak üzere, $(x^2 + y^2)(z^2 + t^2) = 2024$ ve $xt = yz + 40$ ise, $xz + yt$ kaçtır?

a) 20 b) 25 c) 30 d) 40 e) Hiçbiri

Cevap: $\sqrt{424}$. $(x^2 + y^2)(z^2 + t^2) = (xz + yt)^2 + (xt - yz)^2$ olduğu için $(xz + yt)^2 = 2024 - 40^2 = 424$ olur ve $xz + yt = \sqrt{424}$ elde edilir.

24. Bir çember etrafına birbirinden farklı 20 tam sayı yazılmıştır. Yan yana olan herhangi iki sayının farkının mutlak değeri ya 8 ya da 11'dir. Bu 20 sayıdan en büyüğü ile en küçüğünün farkı en fazla kaç olabilir?

a) 104 b) 105 c) 107 d) 108 e) 110

Cevap: 107. 107 için bir örnek verelim: 1, 12, 23, 34, 45, 56, 67, 78, 89, 100, 108, 97, 86, 75, 64, 53, 42, 31, 20, 9. Cevabın 107'den daha fazla olamayacağını gösterelim. Genelliği bozmadan en küçük sayıyı 1 alalım. Farzedelim ki en büyük sayı $N \geq 109$ olsun. 1 ve N sayısı arasında en fazla 9 sayı bulunan yayı alalım. $109 - 1 = 108 > 1 \cdot 8 + 9 \cdot 11$ olduğundan bu yay üzerinde 1 ve N arasında 9 sayı bulunmuş olup bu yay üzerindeki komşu sayıların farkı hep 11 olacaktır. O zaman diğer yayda da benzer durum vardır ve dolayısıyla tüm sayılar farklı değildir, çelişki.

25. Bir ABC üçgeninde sırasıyla $[BC]$, $[CA]$, $[AB]$ kenarları üzerinde alınan D, E, F noktaları için $s(\widehat{ABC}) = s(\widehat{ADE})$ ve $s(\widehat{ADF}) = s(\widehat{ACB})$ eşitlikleri sağlanmaktadır. $|AD| = 3$, $|BD| = 4$, $|CD| = 6$ ise, $|EF|$ kaçtır?

a) $\dfrac{30}{11}$ b) $\dfrac{40}{11}$ c) $\dfrac{20}{7}$ d) $\dfrac{25}{7}$ e) Hiçbiri

Cevap $\dfrac{30}{11}$. AD doğrusunun çevrel çemberle ikinci kesişim noktası T olsun. Öncelikle çemberde kuvvetten $|DT||DA| = |DB||DC|$ eşitliğinden $|DT| = 8$ olur. Verilen açı eşitliklerinden $ED \parallel TC$ ve $FD \parallel TB$ olup, $\dfrac{|AF|}{|FB|} = \dfrac{3}{8} = \dfrac{|AE|}{|EC|}$ elde ederiz, bu aynı zamanda $EF \parallel BC$ demektir. Buradan $\dfrac{|EF|}{|BC|} = \dfrac{3}{11}$ olup, $|EF| = \dfrac{30}{11}$ buluruz.

26. Bir n pozitif tam sayısı ile 180 sayısının ortak pozitif bölenlerinin sayısı 6'dır. Buna göre n ile 180'nin en büyük ortak böleninin alabileceği kaç farklı değer vardır?

a) 2 b) 4 c) 6 d) 8 e) 10

Cevap: 4. obeb(180,n)=d olsun. İki sayının ortak bölenleri, en büyük ortak bölenlerinin pozitif bölenleridir. O halde d'nin 6 pozitif böleni olmalı, yani d sayısı p^5 veya pq^2 (p ve q asal) formunda olmalı. $180 = 2^2 3^2 5$ olduğuna göre $d = 2^2 3, 2^2 5, 3^2 2$ veya $3^2 5$ olabilir.

27. x, y, z gerçel sayılar olmak üzere, $\dfrac{4y + 18 - y^2}{x^2 + 2y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2}$ ifadesinin alabileceği en büyük değer kaçtır?

a) 8 b) 9 c) 10 d) 11 e) 12

Cevap: 11. Sorudaki ifadeyi $\dfrac{22 - (y-2)^2}{(x+y)^2 + (y+z)^2 + 2}$ olarak yazarsak, üst taraf en fazla 22 alt taraf da en az 2 olacağı için bu kesrin alabileceği en büyük değer 11 olur, $x = z = -2$ ve $y = 2$ durumunda ise eşitlik sağlanır.

28. 9×9 bir satranç tahtasının n birim karesi nasıl işaretlenirse işaretlensin, tahtanın 3 tane işaretlenmiş birim karesinden oluşan 1×3 ya da 3×1

boyutlarında bir dikdörtgen bulunuyorsa, n sayısının alabileceği en küçük değer kaçtır?

a) 49 b) 51 c) 53 d) 55 e) 57

Cevap: 55. $n = 55$ ise $9 \cdot 6 < 55$ olduğu için güvercin yuvası prensibinden dolayı satırların en az bir tanesinde en az 7 tane işaretlenmiş birim kare bulunacaktır. O zaman bu satır istenilen ardışık 3 işaretlenmiş birim kareyi içerecektir. Diğer taraftan 54 işaretlenmiş birim kare yetersiz olabilir: 9, 6, 6, 3, ve 3 birim kareden oluşan beş paralel köşegendeki 27 birim kare dışındaki 54 birim kare işaretlenirse, koşullar sağlanmaz.

29. $|AB| = 6$, $|AC| = 8$, $s(\widehat{BAC}) = 90°$ olan bir ABC üçgeninin iç teğet çemberinin ve B köşesine göre dış teğet çemberinin merkezleri sırasıyla I ve J ise, $|IJ|$ uzunluğu kaçtır?

a) $6\sqrt{2}$ b) $4\sqrt{5}$ c) 9 d) 10 e) Hiçbiri

Cevap $4\sqrt{5}$. Öncelikle Pisagor teoreminden $|BC| = 10$ olup, $IJ \cap AC = \{D\}$ dersek açıortay teoreminden $|AD| = 3$, $|DC| = 5$ olup, buradan $|ID| = \sqrt{5}$ bulunur. A, I, C, J noktaları çemberdeş olduğundan çemberde kuvvetten $|AD||DC| = |ID||DJ|$ olup $|DJ| = 3\sqrt{5}$ elde ederiz, dolayısıyla $|IJ| = 4\sqrt{5}$ olur.

30. $2^{p+3} + 3^{p+2} + 5^{p+1}$ toplamının p ile tam bölünmesini sağlayan kaç p asal sayısı vardır?

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

Cevap: 2. Fermat teoreminden $a^p \equiv a \pmod p$ olduğu için, $2^{p+3} + 3^{p+2} + 5^{p+1} = 2^p 2^3 + 3^p 3^2 + 5^p 5 \equiv 16 + 27 + 25 \equiv 68 \pmod p$ bulunur. O halde $p | 68 = 2^2 17$ olmalı. Şartı sağlayan asal sayılar 2 ve 17'dir.

31. Bir kavanozda bulunan portakal suyuna iki kez havuç suyu ekleniyor. Her iki eklemede kavanozdaki sıvının hacmi eşit yüzdeyle artmıştır. Son durumda kavanozdaki sıvının hacmi 600 birim ve ikinci eklemede kavanoza eklenen havuç suyu miktarı 120 birim ise, başlangıçta kavanozda bulunan portakal suyunun hacmi kaç birimdir?

a) 352 b) 360 c) 368 d) 376 e) 384

Cevap: 384. İşlemler yapılmadan önce kovanozda bulunan portakal suyunun hacmi x, her iki işlemde sıvının artış oranı q olsun. O zaman

$$x(1+q)^2 = 600 \text{ ve } xq(1+q) = 120$$

olur. O halde $(1+q)/q = 600/120 = 5$'ten $q = 1/4$ gelir ve $x = 384$ olur.

32. Bir masa üzerinde 120 bilyeden oluşan bir öbek bulunmaktadır. Önce Aslı bu bilyeleri farklı sayıda bilye içeren iki öbeğe ayırıyor. Daha sonra Zehra bu iki öbeğin istediği birini iki öbeğe, oluşan üç öbek farklı sayılarda bilye içerecek şekilde ayırıyor. Aslı, oluşan üç öbekten en az ve en fazla bilye içeren öbeklerdeki bilye sayıları toplamının en az N olmasını garantileyebiliyorsa, N sayısının alabileceği en büyük değer kaçtır?

a) 77 b) 78 c) 80 d) 82 e) 83

Cevap: 80. En az ve en fazla bilye içeren öbeklerdeki bilyelerin toplam sayısı A olsun. Aslı bilyeleri 40 ve 80 bilye içeren iki öbeğe ayırsın. Bundan sonra Zehra bu öbeklerden daha fazla bilye içerene işlem yaparsa $A = 80$ olur. Zehra bu öbeklerden daha az bilye içerene işlem yaparsa $A > 80$ olur. Şimdi de Zehra'nın $A \leq 80$ olmasını garantileyebileceğini gösterelim. Aslı'nın oluşturduğu öbeklerin birinde tam olarak 40 bilye varsa, Zehra diğer öbeği rastgele iki parçaya ayırıyor ve $A = 80$ oluyor. Aslının oluşturduğu öbeklerin hiçbiri 40 bilyeden oluşmuyorsa, Zehra daha fazla bilye içeren öbeği biri 40 bilye içeren iki öbeğe ayırıyor. Bu durumda da $A = 80$ oluyor.