

33. Ulusal Bilim Olimpiyatları
Matematik İkinci Aşama Sınavı

Birinci Gün
13 Aralık 2025

1. a, b, c pozitif tam sayılar olmak üzere,

$$2^a + a^2 - b^2, 2^b + b^2 - c^2 \text{ ve } 2^c + c^2 - a^2$$

sayılarının üçünün de tamkare olmasını sağlayan tüm (a, b, c) üçlülerini bulunuz.

2. m ve n pozitif tam sayılar olmak üzere, $m \times n$ satranç tahtası, bu tahtanın birim karelerinden oluşan 1×2 ve 2×1 dikdörtgenlerle, herhangi iki dikdörtgen ortak birim kare içermeyecek şekilde tamamen kaplanmıştır. 1×2 dikdörtgenlerin kapladığı birim kareler kırmızıya, 2×1 dikdörtgenlerin kapladığı birim kareler maviye boyanıyor. Bu satranç tahtasında bir tarafı mavi bir tarafı kırmızı olan birim kenarların sayısının çift olduğunu gösteriniz.

3. a ve b verilmiş gerçel sayılar olsun. Her $x, y \in \mathbb{R}$ için

$$f(x + f^{100}(y) + a) = y + f^{2025}(x) + b$$

koşulunu sağlayan tüm $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonlarını bulunuz.

Not. k bir pozitif tam sayı olmak üzere, $f^k(x) = \underbrace{f(f(\cdots f(x)))}_{k \text{ kez}}$ olarak tanımlanıyor.

33. Ulusal Bilim Olimpiyatları
Matematik İkinci Aşama Sınavı

İkinci Gün
14 Aralık 2025

4. $a_1, a_2, \dots, a_{2025}$ gerçel sayılar olmak üzere, her $1 \leq i < j \leq 2025$ için, birinci tahtaya $1 - |a_i - a_j|$ sayısı, ikinci tahtaya $|a_i + a_j| - 1$ sayısı yazılıyor. Hangi $(a_1, a_2, \dots, a_{2025})$ 2025-lileri için, her gerçel sayı her iki tahtaya da eşit sayıda yazılır?

5. Bir ABC üçgeninde A, B, C noktalarından indirilen yükseklik ayakları sırasıyla D, E, F ve diklik merkezi H olsun. H noktasından geçen bir ℓ doğrusu EF, DF, DE doğruları ile sırasıyla X, Y, Z noktalarında kesişiyor. XBF ve XCE üçgenlerinin çevrel çemberlerinin ikinci kesişim noktası A_1 , YCD ve YAF üçgenlerinin çevrel çemberlerinin ikinci kesişim noktası B_1 , ZAE ve ZBD üçgenlerinin çevrel çemberlerinin ikinci kesişim noktası C_1 olsun. A_1D, B_1E ve C_1F doğrularının noktadaş olduğunu gösteriniz.

6. İki tamkarenin toplamı şeklinde yazılabilen sayıların kümesi $\mathcal{S}$ olsun. Tam sayı katsayılı bir P polinomu, her n negatif olmayan tam sayısı için

$$P(n) \in \mathcal{S} \iff n \in \mathcal{S}$$

koşulunu sağlıyorsa, P polinomunun derecesinin tek olduğunu gösteriniz.