



**TÜBİTAK**

**TÜRKİYE BİLİMSEL VE TEKNOLOJİK ARAŞTIRMA KURUMU  
BİLİM İNSANI DESTEK PROGRAMLARI BAŞKANLIĞI**

**33. ULUSAL BİLİM OLİMPİYATLARI - 2025  
BİRİNCİ AŞAMA SINAVI  
ORTAOKUL MATEMATİK**

**Soru Kitapçığı Türü**

**A**

**17 Mayıs 2025 Cumartesi, 09.30-12.30**

**ÇÖZÜMLER**

1. Bir  $ABC$  üçgeninin  $[BC]$ ,  $[AC]$ ,  $[AB]$  kenarları üzerinde sırasıyla  $K$ ,  $L$ ,  $M$  noktaları  $|BK| = |BM|$  ve  $|CK| = |CL|$  olacak şekilde alınıyor.  $s(\widehat{BAC}) = 50^\circ$  ise,  $s(\widehat{LKM})$  kaçtır?

- a)  $25^\circ$                       b)  $40^\circ$                       c)  $50^\circ$                       d)  $65^\circ$                       e)  $80^\circ$

Cevap:  $65^\circ$ .  $s(\widehat{BKM}) = s(\widehat{BMK}) = \alpha$  ve  $s(\widehat{CKL}) = s(\widehat{CLK}) = \beta$  olsun. Bu durumda  $s(\widehat{ABC}) = 180^\circ - 2\alpha$  ve  $s(\widehat{ACB}) = 180^\circ - 2\beta$  olur.  $ABC$  üçgeninin iç açıları toplamı  $180^\circ$  olduğundan  $(180^\circ - 2\alpha) + (180^\circ - 2\beta) + 50^\circ = 180^\circ$  bulunur. Buradan  $\alpha + \beta = 115^\circ$  ve  $s(\widehat{LKM}) = 180^\circ - (\alpha + \beta) = 65^\circ$  bulunur.

2.  $2025^3$  sayısının pozitif bölenlerinin kaç tanesi  $375$  sayısının bir katı değildir?

- a) 43                      b) 48                      c) 58                      d) 72                      e) 91

Cevap: 43.  $2025^3 = 3^{12} \times 5^6$  olduğu için bu sayının  $13 \times 7 = 91$  böleni vardır. Bunların arasında  $375$  ile bölünenlerin sayısı ise,  $375 = 3^1 \times 5^3$  olduğu için  $2025^3/375 = 3^{11} \times 5^3$  sayısının bölenlerinin sayısına eşittir, bu da  $12 \times 4 = 48$  dir. Buna göre, cevap  $91 - 48 = 43$  olur.

3. Bir kutudaki topların her biri kırmızı, beyaz, siyah ve mavi renklerinden birine boyalıdır. Bu kutuya, kutudaki kırmızı top sayısı kadar kırmızı top ekleniyor ve bunun sonucunda kutudaki toplam top sayısı %20 artıyor. Bundan sonra, kutuya kutudaki beyaz top sayısı kadar beyaz top ekleniyor ve bunun sonucunda kutudaki toplam top sayısı %25 artıyor. Son olarak, kutuya kutudaki siyah top sayısı kadar siyah top ekleniyor ve bunun sonucunda kutudaki toplam top sayısı %30 artıyor. Buna göre, başlangıçta kutuda bulunan topların yüzde kaç mavidir?

- a) 5                      b) 10                      c) 15                      d) 20                      e) 25

Cevap: %5. Kutuda en başta  $100a$  top olduğunu varsayalım. İlk koşula göre, kırmızı topların sayısı  $20a$ 'dır. İkinci koşula göre, beyaz topların sayısı  $120a$  topun %25'i olan  $30a$ 'dır. Son koşula göre, siyah topların sayısı  $150a$  topun %30'u olan  $45a$ 'dır. Böylece en başta kutudaki mavi top sayısı  $5a$  olarak bulunur.

4. Herhangi ikisinin boyutu birbirinden farklı olan 8 topun her biri kırmızı, beyaz ve mavi renklerinden birine, en az bir top kırmızı ve en az bir top

beyaz olmak koşuluyla kaç farklı şekilde boyanabilir?

- a) 5896                      b) 5924                      c) 5986                      d) 6050                      e) 6102

Cevap: 6050. Toplar herhangi bir koşul olmadan 3 renge  $3^8$  farklı şekilde boyanabilir. Kırmızı rengi kullanmadan  $2^8$  farklı şekilde ve beyaz rengi kullanmadan  $2^8$  farklı şekilde boyanabilir. Kırmızı ve beyaz renkleri kullanmadan ise 1 farklı şekilde boyanabilir. Buna göre, cevap  $3^8 - 2^8 - 2^8 + 1 = 6050$  olur.

5.  $AB \parallel CD$  olan bir  $ABCD$  yamuğu verilmiştir.  $[AB]$  kenarı üzerinde  $K$  ve  $L$  noktaları,  $K$  noktası  $A$  ve  $L$  noktaları arasında yer alacak ve  $2|CD| = 3|BL| = 4|AK|$  olacak şekilde alınıyor.  $\text{Alan}(ABCD) = 40$  ve  $\text{Alan}(BCD) = 12$  ise,  $\text{Alan}(KLC)$  kaçtır?

- a) 10                      b) 12                      c) 14                      d) 16                      e) 18

Cevap: 14.  $|CD| = 6k$ ,  $|AK| = 3k$ ,  $|BL| = 4k$  verilmiştir.  $\text{Alan}(ADB) = \text{Alan}(ACB) = \text{Alan}(ABCD) - \text{Alan}(BCD) = 28$  olur.  $A(AKC) = 6$  ve  $A(BLC) = 8$  olduğu için  $A(KLC) = 28 - 6 - 8 = 14$  bulunur.

6. Kaç  $n$  tam sayısı için  $\frac{n^2 - 111^2}{n + 11}$  ifadesi bir tam sayıdır?

- a) 20                      b) 30                      c) 36                      d) 48                      e) 66

Cevap: 48.  $\frac{n^2 - 111^2}{n + 11} = n - 11 - \frac{111^2 - 11^2}{n + 11}$  ifadesi bir tam sayıya eşittir. Dolayısıyla  $n + 11$  sayısı  $111^2 - 11^2 = 100 \cdot 122 = 2^3 \cdot 5^2 \cdot 61$  sayısının bölenlerinden birisi olmalıdır. Bu sayının da  $2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 48$  böleni olduğu için  $n$  sayısının alabileceği 48 farklı değer bulunur.

7.  $a$  ve  $b$  verilmiş gerçel sayılar olsun.  $x_1, x_2, \dots$  dizisi her  $n$  pozitif tam sayısı için  $x_n = (a + n)^2 + (b + n)^2$  olarak tanımlanıyor.  $x_5 - x_1 = 100$  ise  $x_9 - x_5$  kaçtır?

- a) 100                      b) 108                      c) 124                      d) 148                      e) 164

Cevap: 164.  $x_n = a^2 + b^2 + 2n^2 + 2n(a + b)$  olduğuna göre  $x_n - x_m = 2n^2 - 2m^2 + 2(n - m)(a + b)$  olur. Buradan  $x_5 - x_1 = 48 + 8(a + b)$  ve  $x_9 - x_5 = 112 + 8(a + b)$  bulunur.  $48 + 8(a + b) = 100$  olduğu için  $8(a + b) = 52$  ve böylece  $x_9 - x_5 = 52 + 112 = 164$  olur.

8. Bir doğru üzerine birkaç bilye dizilmiştir. Her bilye ya kırmızı ya da beyaz renktedir. Herhangi 12 ardışık bilyeden kırmızı ve beyaz olanların sayıları birbirine eşittir, fakat herhangi 14 ardışık bilyeden kırmızı ve beyaz olanların sayıları birbirinden farklıdır. Buna göre, doğru üzerindeki toplam bilye sayısı en fazla kaç olabilir?

a) 14                      b) 18                      c) 20                      d) 24                      e) Hiçbiri

Cevap: 18. İlk 6 bilye kırmızı, sonraki 6 bilye beyaz ve son 6 bilye kırmızı olursa koşullar sağlanır. Şimdi de toplam bilye sayısının en fazla 18 olabileceğini gösterelim. Bilye sayısının en az 19 olduğunu varsayalım. Bilyeleri soldan sağa doğru numaralandıralım.  $i$  ve  $i + 12$  numaralı bilyelerin renkleri aynı olmak zorundadır, aksi takdirde  $i$  numaralı bilye ile başlayan 12 bilyenin arasındaki kırmızı bilye sayısı ile  $i + 1$  numaralı bilye ile başlayan 12 bilyenin arasındaki kırmızı bilye sayısı aynı olmaz. Genelliği bozmadan 1 numaralı bilye kırmızı olsun. O zaman 13 numaralı bilye de kırmızı renktedir. 14 numaralı bilye beyaz olursa koşullar sağlanmaz. O zaman 14 numaralı bilye ve dolayısıyla 2 numaralı bilye kırmızı renktedir. Benzer şekilde ilerleyerek ilk 7 bilyenin kırmızı renkte olduğunu elde ederiz. O zaman ilk 12 bilyeden kırmızı olanların sayısı 6 olmayacaktır.

9. Kenar uzunluğu 8 olan bir  $ABCD$  karesinin köşegenlerinin kesişim noktası  $O$  olsun.  $[AB]$  kenarı üzerinde yer alan  $K$  ve  $L$  noktaları  $|BK| - |AL| = 4$  koşulunu sağlıyor.  $[KL]$  doğru parçasının orta noktası  $M$  olmak üzere,  $|OM|$  kaçtır?

a) 4                      b)  $2\sqrt{5}$                       c) 5                      d)  $4\sqrt{2}$                       e) 6

Cevap:  $2\sqrt{5}$ .  $O$  noktasından  $AB$  doğrusuna inilen dikmenin ayağı  $N$  olsun.  $|BK| - |CL| = |BL| - |CK| = 4$  olduğundan,  $|AL| = a$  dersek  $|KL| = 8 - a - (a + 4)$  ve  $|KM| = |ML| = 2 - a$  bulunur. Yani  $|MN| = 2$  ve  $|ON| = 4$  olduğu için Pisagordan cevap  $2\sqrt{5}$  olur.

10. Bir masa üzerindeki taşların bazıları kırmızı, bazıları beyaz renktedir ve kırmızı taşların sayısı beyaz taşların sayısından bir fazladır. Her taşın ağırlığı 1, 15 veya 50 gramdır. Beyaz taşların toplam ağırlığı  $B$  ve kırmızı taşların toplam ağırlığı  $K$  olsun.  $B > K$  ise,  $B - K$  sayısının alabileceği en küçük değer kaçtır?

a) 1                      b) 2                      c) 4                      d) 5                      e) 6

Cevap: 6. Her taşın ağırlığı (mod 7) de 1 sayısına eşittir. Masa üzerindeki beyaz taş sayısı  $n$  olsun. O zaman kırmızı taşların toplam ağırlığı  $K \equiv n + 1 \pmod{7}$  ve beyaz taşların toplam ağırlığı  $B \equiv n \pmod{7}$  olur. Demek ki,  $B - K \equiv 6 \pmod{7}$  dir. Masa üzerinde 15 gram ağırlığında üç kırmızı ile 1 ve 50 gram ağırlığında birer beyaz taş olursa 6 sayısına ulaşılır.

11.  $a, b, c$  pozitif gerçel sayılar olmak üzere,  $a^2 + 4b^2 + c^2 = 2ab + ac + 2bc$  eşitliği sağlanıyorsa  $\frac{a+b}{c}$  kaçtır?

- a)  $\frac{1}{2}$                       b) 1                      c)  $\frac{3}{2}$                       d) 2                      e)  $\frac{5}{2}$

Cevap:  $\frac{3}{2}$ . Verilen eşitliğin iki tarafı da 2 ile çarpılıp düzenlenirse  $2a^2 + 8b^2 + 2c^2 - 4ab - 2ac - 4bc = 0$  elde edilir. Bu eşitlik  $(a-2b)^2 + (c-2b)^2 + (a-c)^2 = 0$  şeklinde yazılabilir. Buradan  $a = c = 2b$  elde edilir ve cevap  $\frac{3}{2}$  olur.

12. Bir masa üzerinde  $m$  ve  $n$  bilye içeren iki öbek bulunuyor. İki oyuncu sırayla hamle yaparak bir oyun oynuyorlar. Sırası gelen oyuncu ya her iki öbekten birer bilye alıyor, ya sadece istediği bir öbekten bir bilye alıyor ya da istediği bir öbekten diğer öbeğe bir bilye aktarıyor. Hamle yapamayan oyuncu oyunu kaybediyor. Bu oyun  $(m, n) = (9, 21), (11, 11), (10, 33), (16, 24)$  ve  $(25, 26)$  için birer kez oynanırsa, oyuna başlayan oyuncu bu oyunlardan kaçını kazanmayı garantileyebilir?

- a) 1                      b) 2                      c) 3                      d) 4                      e) 5

Cevap: 4. Öbeklerin en az birinde tek sayıda bilye varsa sırası gelen oyuncu tek sayıda taş içeren her öbekten bir taş alarak hamle yapabilir ve oyunu kaybetmez. Ayrıca, bu hamleden sonra her iki öbekte çift sayıda bilye kalır ve toplam taş sayısı azalır, böylece rakibinin hamlesinden sonra yine en az bir öbekte tek sayıda bilye olması garantilenir. Buna göre, başlangıçta her iki öbekte de çift sayıda bilye varsa oyunu ikinci, kalan durumlarda ise oyunu birinci oyuncu kazanıyor.

13. Bir  $ABCDEFGH$  düzgün sekizgeninin iç bölgesinde  $K$  ve  $L$  noktaları ile dış bölgesinde bir  $S$  noktası,  $ABKL$  bir kare ve  $ABS$  bir eşkenar üçgen olacak şekilde alınıyor. Buna göre,  $s(\widehat{CKS})$  kaçtır?

- a)  $60^\circ$                       b)  $67.5^\circ$                       c)  $75^\circ$                       d)  $82.5^\circ$                       e)  $90^\circ$

Cevap:  $82.5^\circ$ . Düzgün sekizgenin bir iç açısı  $135^\circ$  dir.  $|BC| = |BK| = |BS|$  olduğu için  $B$  merkezli bir çember  $C, K, S$  noktalarından geçer. Bu çemberde merkez çevre açıdan  $2s(\widehat{CKS}) = s(\widehat{CBS}) = 360^\circ - s(\widehat{CBA}) - s(\widehat{ABS}) = 360^\circ - 135^\circ - 60^\circ = 165^\circ$  elde edilir. Buradan  $s(\widehat{CKS}) = 82.5^\circ$  bulunur.

14.  $\overline{AB}$  ve  $\overline{CD}$  iki basamaklı sayılar olmak üzere, dört basamaklı  $\overline{ABCD}$  sayısı  $\overline{AB} \cdot \overline{CD}$  sayısı ile tam bölünmektedir. Buna göre,  $\overline{ABCD}$  sayısı kaç farklı değer alabilir?

a) 1                      b) 2                      c) 3                      d) 6                      e) 8

Cevap: 2.  $x = \overline{AB}$  ve  $y = \overline{CD}$  olsun. Sorudaki koşuldan dolayı  $xy \mid 100x + y$  bulunur. Buradan da  $x \mid y$  ve  $y \mid 100x$  elde edilir. Bir  $k$  pozitif tam sayısı için  $y = xk$  olsun.  $xk \mid 100x$  olduğu için  $k \mid 100$  bulunur.  $x$  ve  $y$  iki basamaklı tam sayılar oldukları için  $k \geq 10$  olamaz, tüm olası değerler  $k = 1, 2, 4, 5$  olarak bulunur. Öte yandan,  $xy \mid 100x + y$  olduğu için  $kx^2 \mid (100 + k)x$  ve böylece  $x \mid \frac{100+k}{k}$  bulunur.  $k = 1, 2, 4, 5$  durumlarını incelersek,  $x$  ve  $y$  sayıları iki basamaklı olacak şekildeki tek çözümlerin  $k = 2, x = 17, y = 34$  ve  $k = 4, x = 13, y = 52$  olduğu görülür. Dolayısıyla  $\overline{ABCD} = 1734$  ve  $\overline{ABCD} = 1352$  olmak üzere iki farklı çözüm vardır.

15. Bir masa üzerinde her biri 10 toptan oluşan 3 öbek bulunuyor. Bu 30 topun her biri kırmızı veya beyaz renktedir. Aynı renkli topların ağırlıkları birbirine eşit olup bir kırmızı top bir beyaz toptan daha ağırdır. Bu öbeklerdeki topların toplam ağırlıkları 12, 116 ve 129 ise, bu 3 öbekte toplam kaç tane kırmızı top vardır?

a) 15                      b) 16                      c) 17                      d) 18                      e) 19

Cevap: 17. Kırmızı ve beyaz topun ağırlıklarının farkı  $x$  olsun.  $\frac{129-12}{10} = 11.7$  olduğundan  $x \geq 11.7$  dir.  $11.7 < 129 - 116 < 2 \cdot 11.7$  olduğundan ağırlığı 129 olan öbekteki kırmızı top sayısı, ağırlığı 116 olan öbekteki kırmızı top sayısından 1 fazladır ve dolayısıyla  $x = 13$  bulunur.  $12 < 13$  olduğundan ağırlığı 12 olan öbekteki tüm toplar beyazdır ve sonuç olarak beyaz topun ağırlığı  $\frac{12}{10} = 1.2$  ve kırmızı topun ağırlığı  $\frac{12}{10} + 13 = 14.2$  dir. Dolayısıyla öbeklerde 0, 8 ve 9 tane kırmızı top vardır ve cevap 17 dir.

16. Bir tahtaya başlangıçta  $1, 2, \dots, 2025$  sayıları yazılmıştır. Her işlemde tahtada yazılı bulunan iki sayı silinip tahtaya bu iki sayının toplamı yazılıyor.  $N$  işlem sonucunda tahtada toplamaları 2025 olan bir veya birkaç sayı bulunmuyorsa,  $N$  sayısının alabileceği en küçük değer kaçtır?

- a) 405                      b) 498                      c) 507                      d) 582                      e) Hiçbiri

Cevap: 507.  $N$  işlem sonucunda tahtada  $(1, 2024), (2, 2023), \dots, (1012, 1013)$  ikililerinden hiçbirisi ve 2025 sayısı bulunmamalıdır. İkili sayısı 1012 olduğuna göre, toplamda en az 1013 sayı silmek ve dolayısıyla en az 507 işlem gereklidir. Öte yandan, 507 işlem yeterlidir: 506 işlemi tahtada bulunan 2025'ten küçük tek sayıları herhangi bir şekilde ikili gruplara ayırıp uygulayalım ve son işlemi de  $(2, 2025)$  ikilisine uygulayalım. Tahtada 2027 dışında tüm sayılar çift olur ve böylece istenen koşul sağlanır.

17.  $l_1$  ve  $l_2$  birbirlerine paralel olan iki farklı doğru olsun.  $l_1$  doğrusu üzerinde  $P, R, S, T$  noktaları bu sırayla yer alan noktalar olsun.  $l_2$  doğrusu üzerindeki  $L$  ve  $K$  noktaları  $|LP| = |LR|, |KL| = |KR|, |SR| = |SK|, |TS| = |TK|$  ve  $PL \parallel KT$  koşullarını sağlamaktadır. Buna göre,  $s(\widehat{LRS})$  kaçtır?

- a)  $100^\circ$                       b)  $110^\circ$                       c)  $120^\circ$                       d)  $130^\circ$                       e)  $140^\circ$

Cevap: 100.  $s(\widehat{PLR}) = 2\alpha$  olsun.  $|LP| = |LR|$  olduğu için  $s(\widehat{LPR}) = s(\widehat{LRP}) = 90^\circ - \alpha$  olur.  $|KL| = |KR|$  olduğu için  $s(\widehat{RLK}) = s(\widehat{LRK}) = 90^\circ - \alpha$  ve  $s(\widehat{RKL}) = 2\alpha$  olur.  $|SR| = |SK|$  olduğu için  $s(\widehat{SRK}) = s(\widehat{SKR}) = 2\alpha$  olur.  $|TS| = |TK|$  olduğu için  $s(\widehat{TSK}) = s(\widehat{TKS}) = 4\alpha$  olur.  $PL \parallel KT$  olduğu için  $s(\widehat{PLK}) + s(\widehat{TKL}) = (90^\circ + \alpha) + 8\alpha = 180^\circ$  olur ve buradan  $\alpha = 10^\circ$  ve  $s(\widehat{LRS}) = 90^\circ + \alpha = 100^\circ$  bulunur.

18. Bir tahtada hiçbirisi 2025 ten büyük olmayan  $N$  farklı pozitif tam sayı vardır. Tahtadaki birbirinden farklı herhangi  $a$  ve  $b$  sayıları için  $a - b$  sayısı  $a + b$  sayısını bölmüyorsa,  $N$  en fazla kaç olabilir?

- a) 405                      b) 506                      c) 675                      d) 836                      e) 1024

Cevap: 675. Koşullara göre, tahtaya  $a, a + 1, a + 2$  sayılarından en fazla biri yazılabilir. Buna göre,  $N \leq 2025/3 = 675$  olur. Diğer taraftan tahtaya  $1, 4, 7, \dots, 2023$  sayıları yazılırsa koşullar sağlanır:  $a = 3m + 1$  ve  $b = 3n + 1$  ise  $a - b$  sayısı 3 ün bir katıdır ve  $a + b$  sayısı 3 ün bir katı değildir.

19.  $x = \sqrt{2 + \sqrt{9 + 4\sqrt{2}}}$  olmak üzere,  $\frac{x^3 - 3x^2 + x - 2}{x^2 - 2x + 2}$  kaçtır?

- a)  $-\sqrt{2}$                       b)  $-1$                       c)  $0$                       d)  $1$                       e)  $\sqrt{2}$

Cevap:  $-1$ .  $9+4\sqrt{2} = (1+2\sqrt{2})^2$  olduğu için  $x = \sqrt{3+2\sqrt{2}}$  olur.  $3+2\sqrt{2} = (1+\sqrt{2})^2$  olduğu için  $x = 1+\sqrt{2}$  bulunur. Buna göre,  $(x-1)^2 = x^2-2x+1 = 2$ , yani  $x^2-2x = 1$  bulunur.  $x^3-3x^2+x-2 = x(x^2-2x) - x^2+x-2 = -x^2+2x-2 = -3$  bulunur.  $x^2-2x+2 = 3$  bulunur. Bu durumda istenilen ifade  $-1$  olarak bulunur.

20.  $4 \times 4$  satranç tahtasının her birim karesine bir sayı,  $2 \times 2$  boyutlarındaki her karede birbirine eşit iki sayı bulunacak şekilde yazılmıştır. Buna göre, bu satranç tahtasında en fazla kaç farklı sayı bulunabilir?

a) 9                      b) 10                      c) 11                      d) 12                      e) 13

Cevap: 11. Sorudaki koşulu sağlayan ve  $N$  farklı sayı içeren bir tahta bulunduğunu varsayalım. Sol üst birim kareyi, sağ üst birim kareyi, sol alt birim kareyi ve sağ alt birim kareyi içeren dört tane ayrı  $2 \times 2$  boyutlarındaki karenin her birinde en fazla üç farklı sayı vardır, böylece  $N \leq 12$  olmalıdır.  $N = 12$  olması için bu dört karenin her birinde üç farklı sayı olmalıdır ve herhangi ikisinin içerdiği ortak bir sayı olmamalıdır. Fakat bu durumda merkezde bulunan  $2 \times 2$  boyutlarındaki karede birbirine eşit olan iki sayı bulunamaz. Buna göre,  $N \leq 11$  olur.  $N = 11$  için koşulu sağlayan bir örnek bulunur: Soldan sağa doğru ilk satıra 1,2,3,4; ikinci satıra 5,5,5,5; üçüncü satıra 6,7,8,9; dördüncü satıra 10,7,8,11 sayıları yazılırsa koşullar sağlanır.

21. Bir  $ABC$  üçgeninin  $[AC]$  kenarı üzerinde bir  $D$  noktası veriliyor.  $|AB| = |AD| = 13$ ,  $|BD| = 10$  ve  $C$  köşesinden  $[AB]$  kenarına inilen yüksekliğin uzunluğu 16 ise,  $[CD]$  kaçtır?

a) 7                      b) 8                      c)  $\frac{13}{2}$                       d)  $\frac{76}{9}$                       e) Hiçbiri

Cevap:  $\frac{143}{15}$ .  $ABC$  üçgeninin bir kenarının uzunluğu 13 ve o kenara inilen yüksekliğinin uzunluğu 16 olduğu için alanı 104 olur. Öte yandan,  $ADB$  bir ikizkenar üçgen olduğu için,  $[BD]$  kenarının orta noktasına  $E$  dersin  $AE \perp BD$  olur. Ayrıca  $|BE| = |DE| = 5$  ve  $|AB| = 13$  olduğu için  $|AE| = 12$  bulunur. Buradan  $ADB$  üçgeninin alanı 60 olarak hesaplanır ve  $ABC$  nin alanı 104 olduğu için  $BCD$  nin alanı 44 bulunur.  $ADB$  ve  $BCD$  üçgenlerinin alanlarının oranı tabanlarının uzunluklarının oranına eşit olacağı için  $\frac{x}{13} = \frac{44}{60}$  ve  $x = \frac{143}{15}$  bulunur.

22. Bir  $a$  pozitif tam sayısı için, hem  $a = m + n + ebob(m, n) + ekok(m, n)$  olacak şekilde  $m$  ve  $n$  pozitif tam sayıları, hem de  $a = p^k$  olacak şekilde

$p$  asal sayısı ve  $k$  pozitif tam sayısı bulunuyorsa  $a$  sayısına *güzel* diyelim. 2025'ten küçük kaç güzel sayı vardır?

- a) 9                      b) 11                      c) 13                      d) 15                      e) Hiçbiri

Cevap: 9.  $m = dx$ ,  $n = dy$  ve  $ebob(x, y) = 1$  dersek ifade  $p^k = d(x+1)(y+1)$ , haline gelir.  $x$  ve  $y$  aralarında asal oldukları için ikisi aynı anda çift olamaz ve en az biri çift olmalıdır, böylece  $p^k$  ifadesinin çift olduğunu ve  $p = 2$  olduğu bulunur.  $x, y$  en az 1 oldukları için de  $2^k \geq 4$  ve  $k \geq 2$  bulunur. Bu durumda ise  $m = n = 2^{k-2}$  verilirse tüm  $2^k$  sayıları için örnek kurulabilir. Böylece, 2025'ten küçük güzel sayılar  $2^2, 2^3, \dots, 2^{10}$  olmak üzere 9 tanedir.

23.  $P(x) = 2x^2 - 3ax + a - 10$  ve  $Q(x) = x^2 - 2ax + a^2 - 5$  polinomlarının her ikisinin de kökü olan bir gerçel sayı bulunmasını sağlayan  $a$  gerçel sayılarının toplamı kaçtır?

- a) -2                      b) -1                      c) 0                      d) 1                      e) 2

Cevap: 2. Bu iki polinomun ortak kökü  $t$  olsun.  $P(t) - 2Q(t) = at - 2a^2 + a = 0$  olacağı için ya  $a = 0$  ya da  $t = 2a - 1$  bulunur.  $t = 2a - 1$  ise,  $Q(2a - 1) = a^2 - 2a - 4 = 0$  olduğu için de  $a$  sayısının olası değerleri  $1 + \sqrt{5}$  ve  $1 - \sqrt{5}$  olarak bulunur ve koşulları sağlayan tüm değerlerin toplamı  $0 + 1 + \sqrt{5} + 1 - \sqrt{5} = 2$ 'dir.

24. Bir masa üzerinde sırasıyla 55, 60, 65, 70, 75, 80 bilye içeren 6 kutu vardır. Her işlemde en az 5 bilye içeren bir kutu seçiliyor ve bu kutudan 5 bilye alınıp diğer kutuların her birine birer bilye dağıtılıyor. Birkaç işlem sonucunda  $N$  bilye içeren bir kutu elde edilebiliyorsa  $N$  sayısının alabileceği en büyük değer kaçtır?

- a) 385                      b) 390                      c) 395                      d) 400                      e) 405

Cevap: 395. Başlangıçta herhangi iki kutudaki bilye sayısı (mod 6)'da birbirlerinden farklıdır. Her işlemde herhangi bir kutudaki top sayısı ya 5 azalıp ya da 1 arttığı için, herhangi bir işlemde sonra tüm kutulardaki bilye sayıları (mod 6)'da birbirlerinden farklı olacaktır. Buna göre, herhangi 5 farklı kutudaki bilye sayısı en az  $0 + 1 + 2 + 3 + 4 = 10$  olabilir ve bu sebeple bir kutudaki bilye sayısı en fazla  $55 + 60 + 65 + 70 + 75 + 80 - 10 = 395$  olabilir. Şimdi de bir kutuda 395 bilye olabileceğini gösterelim. Herhangi bir kutudan hiç bilye almayıp her defa en az 5 bilye içeren herhangi bir kutudan 5 bilye alıp diğerlerine dağıtırsak sonlu işlem sonucunda bu 5 kutuda en fazla  $0 + 1 + 2 + 3 + 4 = 10$  bilye kalacaktır.

25. Bir  $ABC$  üçgeninde  $|AB| = |BC| = 8$  ve  $|AC| = 12$  olsun. Bu üçgenin  $s(\widehat{BAC})$  açısının dış açıortayı ile  $C$  noktası ve  $[AB]$  kenarının orta noktasından geçen doğrunun kesişim noktası  $D$  ise,  $|AD|$  kaçtır?

- a)  $\frac{9\sqrt{2}}{4}$       b)  $3\sqrt{2}$       c)  $4\sqrt{2}$       d)  $2\sqrt{3}$       e)  $4\sqrt{3}$

Cevap:  $3\sqrt{2}$ .  $A$  köşesine ait dış açıortayın  $BC$  yi kestiği nokta  $E$ , ve  $AB$  kenarının orta noktası  $N$  olsun. Dış açıortay teoreminden  $\frac{|EB|}{|EC|} = \frac{|AB|}{|AC|}$  ve  $|EA|^2 = |EB| \cdot |EC| - |AB| \cdot |AC|$  olduğu için  $|EB| = 16$  ve  $|AE| = 12\sqrt{2}$  bulunur. Menelaus teoreminden  $\frac{|CB|}{|CE|} \cdot \frac{|ED|}{|DA|} \cdot \frac{|AN|}{|NB|} = 1$  olduğu için  $\frac{|ED|}{|DA|} = 3$  gelir. Buna göre,  $|ED| = 9\sqrt{2}$  ve  $|AD| = 3\sqrt{2}$  olur.

26.  $a_1, a_2, \dots, a_{2025}$  pozitif bileşik sayılar olmak üzere,  $a_1 + a_2 + \dots + a_{2025}$  şeklinde gösterilemeyen en büyük tam sayı kaçtır?

- a) 8096      b) 8101      c) 8103      d) 8112      e) 8115

Cevap: 8103.  $n$  pozitif bileşik sayının toplamı şeklinde gösterilemeyen en büyük tam sayının  $4n + 3$  olduğunu gösterelim. En küçük bileşik çift sayı 4, en küçük bileşik tek sayı ise 9 dur.  $4n + 3 = a_1 + a_2 + \dots + a_n$  ise,  $4n + 3$  bir tek sayı olduğundan terimlerin en az bir tanesi 9 olmak zorundadır. Bu durumda  $9 + 4(n - 1) > 4n + 3$  olduğu için çelişki elde ederiz.  $M > 4n + 3$  bir çift sayı ise,  $a \geq 8$  bir çift sayı olmak üzere,  $M$  sayısı  $a$  ve  $n - 1$  tane 4 sayısının toplamı şeklinde gösterilebilir.  $M > 4n + 3$  bir tek sayı ise,  $b \geq 4$  bir çift sayı olmak üzere,  $M$  sayısı 9,  $b$  ve  $n - 2$  tane 4 sayısının toplamı şeklinde gösterilebilir. Sonuç olarak  $n = 2025$  durumunda cevap  $4 \cdot 2025 + 3 = 8103$  olur.

27.  $x, y, z$  gerçel sayıları

$$(x - 1)(y - 2) = 3$$

$$(y - 1)(z - 2) = 3$$

$$(z - 1)(x - 2) = 1$$

denklem sistemini sağlıyorsa,  $x + y + z$  ifadesinin alabileceği en büyük değer kaçtır?

- a)  $\frac{19}{2}$       b) 11      c)  $\frac{14}{3}$       d) 0      e) Hiçbiri

Cevap:  $\frac{19}{2}$ . İlk iki denklemden sırasıyla  $x = \frac{3}{y-2} + 1$  ve  $z = \frac{3}{y-1} + 2$  bulunur. Bunlar üçüncü denklemde yerine koyulursa

$$(z-1)(x-2) = \left(\frac{3}{y-1} + 1\right) \left(\frac{3}{y-2} - 2\right) = 0$$

elde edilir. Bu denklem sadeleştirilirse  $y^2 - 3y - 4 = 0$  bulunur. Dolayısıyla  $y = -1$  veya  $y = 4$  olabilir. Böylece  $x = 0$ ,  $y = -1$ ,  $z = -1/2$  ve  $x = 5/2$ ,  $y = 4$ ,  $z = 3$  çözümleri bulunur. Buna göre,  $x + y + z$  ifadesinin alabileceği en büyük değer  $\frac{19}{2}$  olur.

28. 33 öğrencinin katıldığı bir satranç turnuvasında her öğrenci ikilisi arasında tam olarak bir maç yapılmıştır. Her maçta kazanan 1, kaybedene 0, berabere kalanların her birine 1/2 puan veriliyorsa, turnuvada tam olarak 7 puan toplayan öğrenci sayısı en fazla kaç olabilir?

a) 14                      b) 15                      c) 16                      d) 17                      e) 18

Cevap: 15. Turnuvada 7 puan toplayan öğrenci sayısı  $n$  olsun. Bu  $n$  öğrenci kendi aralarında  $\frac{n(n-1)}{2}$  maç yaptığına ve her maçta toplam 1 puan dağıtıldığına göre,  $\frac{n(n-1)}{2} \leq 7n$  ve buradan  $n \leq 15$  elde edilir.  $n = 15$  durumu mümkündür: Öğrencileri 15 ve 18 öğrenciden oluşan iki gruba ayıralım. 15 kişilik gruptaki her öğrenci kendisiyle aynı grupta olan tüm öğrencilerle berabere kalıp kalan tüm maçlarını kaybederse bu 15 kişinin tamamı 7 puan toplamış olur.

29. Dar açılı bir  $ABC$  üçgeninde  $A$  köşesinden  $[BC]$  kenarına inilen yüksekliğin ayağı  $D$  olsun.  $D$  noktasından  $AB$  doğrusuna inilen dikmenin ayağı  $E$  olsun.  $CE$  ve  $AD$  doğrularının kesişim noktası  $F$  olmak üzere,  $|BE| = 9$ ,  $|AE| = 16$  ve  $|CD| = 12$  ise,  $|AF|$  kaçtır?

a) 10                      b) 12                      c) 15                      d) 16                      e) 18

Cevap: 16.  $AB$  çap olduğu için  $BE \perp AC$  olur. Öklid teoreminden  $|BC| = 15$  ve Pisagor teoreminden  $|AB| = 20$  bulunur. Menelaus teoreminden  $\frac{|DB|}{|DC|} \cdot \frac{|CE|}{|AE|} \cdot \frac{|AF|}{|FB|} = 1$  olur ve buradan  $\frac{|AF|}{|FB|} = 4$  elde edilir.  $|AF| + |FB| = 20$  olduğu için  $|AF| = 16$  bulunur.

**30.**  $33^{33}$  sayısının, 8 ile bölümünden kalanı 3 olan kaç tane pozitif böleni vardır?

- a) 289                      b) 306                      c) 450                      d) 510                      e) 578

Cevap: 578.  $33^{33} = 3^{33}11^{33}$  olduğu için bu sayının herhangi bir pozitif böleni  $3^x11^y$  formundadır.  $11 \equiv 3 \pmod{8}$  olduğu için, bu sayı  $\pmod{8}$ 'da  $3^{x+y}$  sayısına denktir. 3 sayısının kuvvetleri  $\pmod{8}$ 'da 3,1,3,1,... olarak ilerlediği için  $x+y$  tek olmalıdır. Bu durumda ya  $x$  çift  $y$  tek, ya da  $x$  tek  $y$  çift olacaktır.  $x$  ve  $y$  sayıları 0,1,...,33 değerlerini alabilir, bunların arasında da 17 çift ve 17 tek sayı olduğu için cevap  $2 \cdot 17^2 = 578$  olur.

**31.**  $a$  ve  $b$  pozitif gerçel sayılar olmak üzere,  $\frac{(a^2 + 3)(b^3 + 2)(a^4 + 9b^4)}{a^3b^3}$  ifadesinin alabileceği en küçük değer kaçtır?

- a) 48                      b)  $36\sqrt{3}$                       c)  $48\sqrt{2}$                       d) 120                      e) Hiçbiri

Cevap:  $36\sqrt{3}$ . Aritmetik-Geometrik ortalama eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} a^2 + 3 &\geq 2\sqrt{3}a \\ b^3 + 1 + 1 &\geq 3b \\ a^4 + 9b^4 &\geq 6a^2b^2 \end{aligned}$$

bulunur. Bu eşitsizlikler taraf tarafa çarpılırsa  $(a^2 + 3)(b^3 + 2)(a^4 + 9b^4) \geq 36\sqrt{3}a^3b^3$  bulunur. Dolayısıyla  $\frac{(a^2 + 3)(b^3 + 2)(a^4 + 9b^4)}{a^3b^3}$  ifadesinin alabileceği en küçük değer  $36\sqrt{3}$  olur.  $a = \sqrt{3}$  ve  $b = 1$  olduğunda ise eşitlik durumunu sağlar.

**32.**  $50 \times 50$  satranç tahtasının her birim karesi kırmızı ve mavi renklerinden birine boyanmıştır. En az 26 birim karesi kırmızı renkte olan satır sayısı ile en az 26 birim karesi mavi olan sütun sayısının toplamı en fazla kaç olabilir?

- a) 93                      b) 94                      c) 95                      d) 96                      e) 98

Cevap: 96. En az 26 birim karesi kırmızı renkte olan satır sayısı  $x$ , en az 26 birim karesi mavi renkte olan sütun sayısı  $y$  olsun. O zaman tahtada en az  $26x$  tane kırmızı ve  $26y$  tane mavi birim kare vardır. Buna göre  $26x + 26y \leq 50^2$  olmalıdır ve buradan  $x + y \leq 96$  bulunur.  $x + y = 96$  olacak şekilde örnek bulunur: Satranç tahtasının en sağ iki sütunun tüm birim kareleri kırmızıya boyayalım ve en üst iki satırının kırmızıya boyanmamış tüm birim karelerini maviye boyayalım. Kalan birim kareleri ise satranç tahtası kuralında olduğu

33. Bilim Olimpiyatları Birinci Aşama Sınavı - Öğrenci - Ortaokul Matematik **A**

gibi kırmızı ve mavi renklere boyayalım. Bu durumda  $x + y = 48 + 48 = 96$  olur.