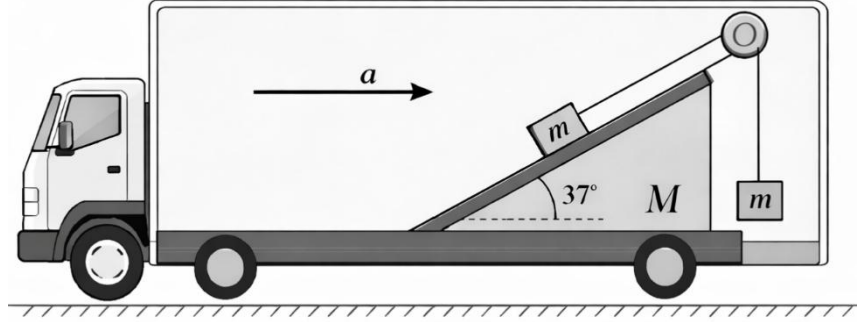


2026 Fizik Birinci Aşama Sınavı Çözümleri

Soru

Sürtünmesiz yatay zeminde sola doğru sabit hızla ilerlerken sabit a ivmesiyle ve bir süre boyunca fren yapan bir kamyon vardır. Kamyonun içine, yatayla 37° açı yapan sürtünmesiz bir eğik düzlem sabitlenmiştir. Eğik düzlem üzerinde kütlesi m olan küçük bir cisim vardır. Bu cisim, eğik düzlemin tepesindeki sürtünmesiz küçük bir makaradan geçen kütlesiz bir ip yardımıyla, kamyonun içinde düşey olarak sarkan m kütleli başka bir cisme bağlanmıştır. Her yerin sürtünmesiz olduğu bu sistem bu şekilde ivmeli iken ipin gerilmesi nedir?



- a) Hiçbiri
b) $\frac{5m(4g+a)}{2}$
c) $\frac{5m(2g+a)}{2}$
d) $\frac{2m(2g+a)}{5}$
e) $\frac{2m(4g+a)}{5}$

Çözüm

Arabayla birlikte ivmelenen referans sistemine geçelim. Bu sistem eylemsiz değildir; dolayısıyla her kütle üzerine sola doğru bir yalancı kuvvet etkir.

Her iki cismin kütlesi de m olduğundan, her biri için yalancı kuvvet büyüklüğü: ma olur.

İpi boyunca aynı büyüklükte ivme olacağı için: eğik düzlem üzerindeki cisim için ip doğrultusunda yukarı yönü pozitif, asılı cisim için yukarı yönü pozitif seçelim.

İpin kısıtından dolayı, eğik düzlem üzerindeki cisim yukarı x ivmesiyle gidiyorsa, asılı cisim aşağı x ivmesiyle gider. Yani asılı cisim için yukarı yönlü ivme: $-x$ olur

1) Eğik düzlem üzerindeki cisim

Bu cisme eğik düzlem boyunca etki eden kuvvetler:

- yukarı doğru gerilme T
- aşağı doğru yerçekimi bileşeni:

$$mg \sin 37^\circ = \frac{3mg}{5}$$

- sola doğru yalancı kuvvetin eğik düzlem boyunca aşağı yönlü bileşeni:

$$ma \cos 37^\circ = \frac{4ma}{5}$$

Dolayısıyla eğik düzlem boyunca Newton denklemi:

$$\begin{aligned} T - \frac{3mg}{5} - \frac{4ma}{5} &= mx \\ T &= mx + \frac{3mg}{5} + \frac{4ma}{5} \end{aligned} \quad (1)$$

Düşey sarkan cisim

Bu cisme etki eden kuvvetler:

- yukarı gerilme T
- aşağı ağırlık mg
- sola doğru yalancı kuvvet ma

Ancak bu cisim yalnızca düşey doğrultuda hareket edebilir. Dolayısıyla yalancı kuvvet düşey denkleme girmez; yalnızca çubuğun/rehberin yatay tepkisini değiştirir.

Yukarı yön pozitif ve ivme $-x$ olduğuna göre:

$$\begin{aligned} T - mg &= -mx \\ T &= mg - mx \end{aligned} \quad (2)$$

Denklemleri birleştirelim

(1) ve (2)'yi eşitleyelim:

$$\begin{aligned} mx + \frac{3mg}{5} + \frac{4ma}{5} &= mg - mx \\ 2mx &= mg - \frac{3mg}{5} - \frac{4ma}{5} \\ 2mx &= \frac{2mg}{5} - \frac{4ma}{5} \\ x &= \frac{g - 2a}{5} \end{aligned}$$

Bunu (2)'de yerine yazalım:

$$T = mg - m\left(\frac{g - 2a}{5}\right)$$

$$T = m\left(g - \frac{g - 2a}{5}\right)$$

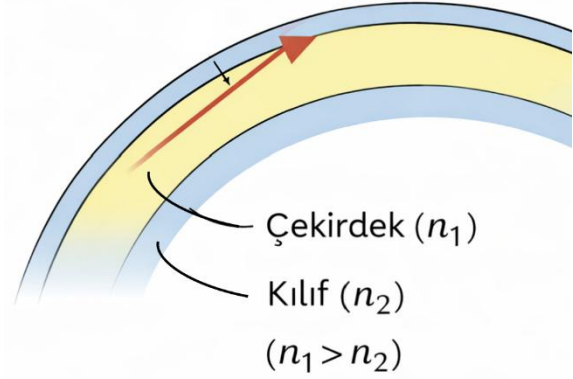
$$T = m\left(\frac{5g - g + 2a}{5}\right)$$

$$T = \frac{m(4g + 2a)}{5}$$

$$T = \frac{2m(2g + a)}{5}$$

Soru

Kırılma indisleri sırasıyla n_1 ve n_2 olan ($n_1 > n_2$) çekirdek ve kılıftan oluşan ince bir optik fiber düşünülüyor. Fiberin çekirdeğinin yarıçapı a olsun. Fiber düzken, çekirdek içinde ilerleyen bir ışın çekirdek eksenine θ açısı yapmaktadır ve çekirdek-kılıf sınırında tam yansıma yaparak ilerlemektedir. Şimdi fiber, büyük yarıçaplı bir çember yayı olacak şekilde bükülüyor. Fiber ekseninin eğrilik yarıçapı R olsun ($R \gg a$). Bükülme



nedeniyle, ışının geliş açısı θ 'dan daha az olur. Yaklaşık olarak, dış taraftaki yüzey normali ile ışının yaptığı açı, düz fiber durumuna göre $\delta \approx \frac{a}{R}$ kadar azalıyor kabul edilsin. Düz fiberde ışının çekirdek-kılıf sınırına geliş açısı ise θ olsun. Bunun sonucunda, bükülmüş fiberde ışığın kaçmaması için eğrilik yarıçapı R için minimum değer yaklaşık ne olmalıdır?

a) Hiçbiri

b) $\frac{a}{\theta - \arccos\left(\frac{n_1}{n_2}\right)}$

c) $\frac{2a}{\theta - \arcsin\left(\frac{2n_1}{n_2}\right)}$

d) $\frac{2a}{\theta - 2\arccos\left(\frac{n_2}{n_1}\right)}$

e) $\frac{a}{\theta - \arcsin\left(\frac{n_2}{n_1}\right)}$

Çözüm

Düz fiberde tam yansıma koşulu

Çekirdekten kılıfa geçişte kritik açı i_c için

$$\sin i_c = \frac{n_2}{n_1}$$

olur. Tam yansıma için gerekli koşul: $\theta > i_c$ yani

$$\theta > \arcsin\left(\frac{n_2}{n_1}\right)$$

Bükülünce kaçmama koşulu

Bükülme nedeniyle dış tarafta geliş açısı azalıyor:

$$i_{\text{yeni}} \approx \theta - \delta$$

ve

$$\delta \approx \frac{a}{R}$$

verilmiş.

Kaçmama için hâlâ tam yansıma olmalı:

$$i_{\text{yeni}} > i_c$$

yani

$$\theta - \delta > i_c$$

$$\theta - \frac{a}{R} > i_c$$

Buradan

$$\frac{a}{R} < \theta - i_c$$

ve dolayısıyla

$$R > \frac{a}{\theta - i_c}$$

elde edilir.

Bu, bükülmüş fiberde ışığın kaçmaması için gerekli yaklaşık koşuldur.

Eğrilik yarıçapı için alt sınır

Yukarıdaki sonuca göre

$$R_{\min} \approx \frac{a}{\theta - i_c}$$

olur.

Burada

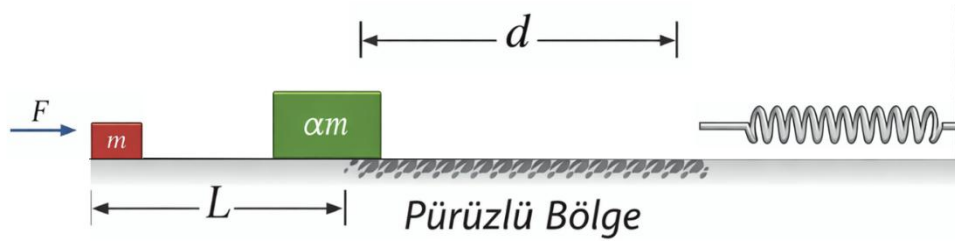
$$i_c = \arcsin \left(\frac{n_2}{n_1} \right)$$

olduğundan,

$$R_{\min} \approx \frac{a}{\theta - \arcsin \left(\frac{n_2}{n_1} \right)}$$

Soru

Yatay doğrultuda uzanan bir sistemin sadece uzunluğu $d = L/2$ olan kısmında pürüzlü bir bölge vardır. Pürüzlü bölgenin sonunda yay sabiti k olan hafif bir yay, sağdaki sabit duvara bağlıdır. Başlangıçta, solda duran m kütleli bir cisme sabit büyüklükte F kuvveti uygulanıyor. Kuvvet yalnızca L mesafesi boyunca etki ediyor; sonra kaldırılıyor. Ve tam bu anda cisim, pürüzlü bölgenin hemen başlama noktasında durmakta olan αm kütleli bir cisimle tam inelastik bir çarpışma yapıyor ve iki cisim yapışarak birlikte hareket ediyor. Birleşik cisim daha sonra pürüzlü bölgeyi geçiyor, yayı sıkıştırıyor ve yay tekrar açıldıktan sonra birleşik kütle aynı pürüzlü bölgeden geri geçiyor. Geri dönüşte pürüzlü bölgeyi tamamen geçtikten sonra, tam çarpışma noktasında anlık olarak duruyor. Pürüzlü bölgedeki kinetik sürtünme katsayısı μ olduğuna göre α aşağıdakilerden hangisidir?



- a) $\sqrt{\frac{F}{mgu}} - 1$
b) $\sqrt{\frac{2F}{mgu}} - 1$
c) $\sqrt{\frac{F}{2mgu}} - 1$
d) Hiçbiri
e) $\sqrt{\frac{2F}{3mgu}} - 1$

Çözüm

m kütleli cisim durgun başlayıp L kadar mesafede F kuvvetiyle hızlanıyor.

Yapılan iş: $W = FL$

Bu, cismin çarpışmadan hemen önceki kinetik enerjisidir: $K_1 = FL$

Dolayısıyla

$$\frac{1}{2}mv^2 = FL \Rightarrow v^2 = \frac{2FL}{m} \quad (1)$$

Durmakta olan αm ile çarpıştıktan sonra toplam kütle $(1 + \alpha)m$ olur.

Momentum korunur:

$$mv = (1 + \alpha)mu$$

$$u = \frac{v}{1 + \alpha} \quad (2)$$

Çarpışmadan hemen sonraki kinetik enerji:

$$K_2 = \frac{1}{2}(1 + \alpha)mu^2$$

(2)'yi kullanırsak:

$$K_2 = \frac{1}{2}(1 + \alpha)m \cdot \frac{v^2}{(1 + \alpha)^2} = \frac{1}{2}m \frac{v^2}{1 + \alpha}$$

(1)'den $\frac{1}{2}mv^2 = FL$ olduğuna göre:

$$K_2 = \frac{FL}{1 + \alpha} \quad (3)$$

Birleşik cismin pürüzlü bölgedeki normal kuvveti: $N = (1 + \alpha)mg$

Sürtünme kuvveti: $f = \mu(1 + \alpha)mg$

Pürüzlü bölge uzunluğu d olduğundan: gidişte kaybedilen enerji: $W_f^{(g)} = \mu(1 + \alpha)mgd$

dönüşte kaybedilen enerji: $W_f^{(d)} = \mu(1 + \alpha)mgd$

Toplam kayıp: $W_f^{\text{toplam}} = 2\mu(1 + \alpha)mgd \quad (4)$

Soruda deniyor ki cisim geri dönüp pürüzlü bölgeyi tamamen geçtikten sonra tam çarpışma noktasında duruyor.

Bu şu anlama gelir: Çarpışmadan hemen sonraki bütün kinetik enerji, yalnızca gidiş ve dönüşte sürtünmede harcanmıştır. Çünkü yay enerjisi geri verir; net kayıp oluşturmaz.

Dolayısıyla:

$$K_2 = W_f^{\text{toplam}}$$

$$\frac{FL}{1 + \alpha} = 2\mu(1 + \alpha)mgd$$

$$FL = 2\mu mgd(1 + \alpha)^2$$

$$(1 + \alpha)^2 = \frac{FL}{2\mu mgd}$$

Buradan:

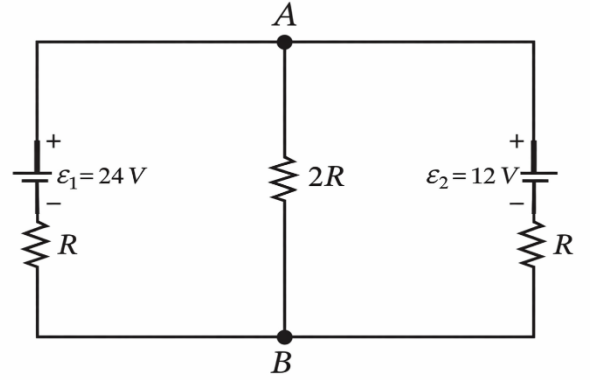
$$\alpha = \sqrt{\frac{FL}{2\mu mgd}} - 1$$

$d=L/2$ yerine koyarsak

$$\alpha = \sqrt{\frac{F}{\mu mg}} - 1$$

Soru

Şekildeki devrede sol kolda, emk'sı $\varepsilon_1 = 24\text{ V}$ olan ideal üreteç, ardından R direnci vardır. Orta kolda yalnızca $2R$ direnci vardır. Sağ kolda, ise emk'si $\varepsilon_2 = 12\text{ V}$ olan ideal üreteç, ardından R direnci vardır. Böyle bir devre çalışırken iki pilin harcadığı güçlerin büyüklükleri oranı P_1/P_2 kaçtır? Burada P_1 , 24 V 'luk pilin gücü; P_2 , 12 V 'luk pilin gücüdür.



- a) 9
- b) 12
- c) 8
- d) 4
- e) Hiçbiri

Çözüm

Pillerdeki gücü bulabilmek için önce kollardan geçen akımları bulmamız gerekir.

Akım yönlerini başlangıçta keyfi olarak yukarıdan aşağıya seçelim:

- sol kol: I_1
- orta kol: I_2
- sağ kol: I_3

Bir akım negatif çıkarsa, gerçek yönün bunun tersi olduğu anlaşılır.

Kirchhoff akım kanunu

Üst düğüm A'da:

$$I_1 + I_2 + I_3 = 0 \quad (1)$$

Sol loop denklemini

Sol kol ile orta kol arasında bir loop seçelim.

Üstten aşağı sol koldan inip, alttan yukarı orta koldan dönelim.

- sol pilden geçerken: -24
sol dirençte: $-I_1R$
orta dirençten akıma ters yönde çıkarken: $+2RI_2$

Dolayısıyla:

$$\begin{aligned} -24 - I_1R + 2RI_2 &= 0 \\ 2I_2 - I_1 &= \frac{24}{R} \quad (2) \end{aligned}$$

Sağ loop denklemi

Sağ kol ile orta kol arasında loop yazalım.

- sağ pilden: -12
sağ dirençte: $-I_3R$
orta dirençten yukarı çıkarken: $+2RI_2$

O halde:

$$\begin{aligned} -12 - I_3R + 2RI_2 &= 0 \\ 2I_2 - I_3 &= \frac{12}{R} \quad (3) \end{aligned}$$

Denklem sistemini çözelim

$$(2)'den: I_1 = 2I_2 - \frac{24}{R}$$

$$(3)'ten: I_3 = 2I_2 - \frac{12}{R}$$

Bunları (1)'de yerine yazalım:

$$\begin{aligned} \left(2I_2 - \frac{24}{R}\right) + I_2 + \left(2I_2 - \frac{12}{R}\right) &= 0 \\ 5I_2 - \frac{36}{R} &= 0 \\ I_2 &= \frac{36}{5R} \end{aligned}$$

Şimdi diğer akımları bulalım:

$$\begin{aligned} I_1 &= 2 \cdot \frac{36}{5R} - \frac{24}{R} = \frac{72}{5R} - \frac{120}{5R} = -\frac{48}{5R} \\ I_3 &= 2 \cdot \frac{36}{5R} - \frac{12}{R} = \frac{72}{5R} - \frac{60}{5R} = \frac{12}{5R} \end{aligned}$$

Demek ki:

- sol koldaki gerçek akım **alttan üste**
- sağ koldaki gerçek akım **üstten alta**

Pillerin güçleri

Sol pil (24 V)

Gerçek akım alttan üste aktığı için, akım pilin **eksi kutbundan girip artı kutbundan çıkmaktadır**. Bu pil enerji verir, yani gücü negatif olur:

$$P_1 = 24 \cdot \left(-\frac{48}{5R}\right)$$
$$P_1 = -\frac{1152}{5R}$$

Sağ pil (12 V)

Gerçek akım üstten alta aktığı için, akım pilin **artı kutbundan giriyor**. Bu pil enerji soğurur, yani gücü pozitif olur:

$$P_2 = 12 \cdot \frac{12}{5R}$$
$$P_2 = \frac{144}{5R}$$

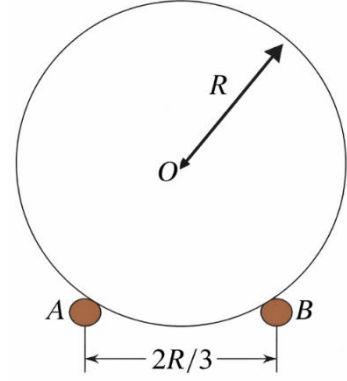
Güçlerin oranı

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{\frac{1152}{5R}}{\frac{144}{5R}} = 8$$

Sonuç: Yani 24 V'luk pil enerji verir, 12 V'luk pil enerji soğurur ve büyüklük olarak birincinin gücü ikincinin 8 katıdır.

Soru

Yarıçapı R olan düzgün bir küre, aralarındaki mesafe $2R/3$ olan birbirine paralel ve sayfa düzleminden içe doğru uzanan A ve B rayları üzerinde kaymadan yuvarlanmaktadır. Küre, sayfa düzlemine dik doğrultuda sabit hızla ilerlemektedir. Kürenin kütle merkezinin hızı v olduğuna göre küre üzerinde bir noktanın sahip olabileceği maksimum hız aşağıdakilerden hangisidir?



- a) $\frac{4+3\sqrt{2}}{4}v$
- b) $\frac{1+4\sqrt{2}}{2}v$
- c) Hiçbiri
- d) $\frac{3+2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}v$
- e) $\frac{2+3\sqrt{2}}{2}v$

Çözüm

Küre, iki paralel ray üzerinde **kaymadan** ilerliyor. Raylar sayfa düzleminden içeri doğru uzandığı için kürenin kütle merkezi de sayfaya dik doğrultuda v hızıyla gidiyor.

Aradığımız şey: **küre üzerindeki herhangi bir noktanın yere göre ulaşabileceği en büyük hız.**

Önce temas geometrisini bulalım

Raylar arası uzaklık:

$$AB = \frac{2R}{3}$$

Merkez O 'dan, temas noktalarını birleştiren doğruya olan dik uzaklığa h diyelim.

Şekilde A ve B aynı yatay düzlemde ve

$$\frac{AB}{2} = \frac{R}{3}$$

olduğundan, dik üçgenden:

$$h = \sqrt{R^2 - \left(\frac{R}{3}\right)^2}$$

$$h = \sqrt{R^2 - \frac{R^2}{9}} = \sqrt{\frac{8R^2}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}R$$

Açısal hız

Küre raylar üzerinde kaymadan yuvarlandığı için temas noktalarının anlık hızı sıfır olmalıdır.

Kürenin kütle merkezi sayfaya dik yönde v ile gidiyor. Küre bu yüzden AB doğrultusu boyunca bir eksen etrafında dönüyor. Temas noktalarının hızının sıfır olması için:

$$v = \omega h$$

olmalı.

Buradan:

$$\omega = \frac{v}{h} = \frac{v}{\frac{2\sqrt{2}}{3}R} = \frac{3v}{2\sqrt{2}R}$$

maksimum hız ise maksimum mesafede olur. Yani

$$\frac{2\sqrt{2}}{3}R + R = R \left(\frac{2\sqrt{2}}{3} + 1 \right)$$

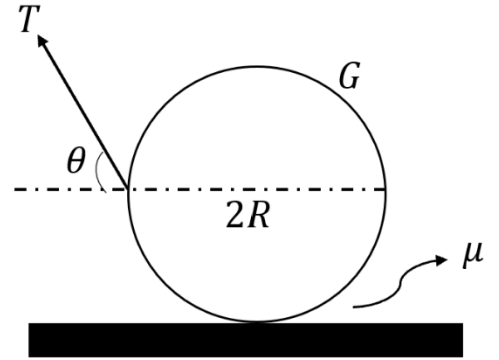
Buradan da maksimum hız:

$$\omega \cdot R \left(\frac{2\sqrt{2}}{3} + 1 \right) = \frac{2\sqrt{2} + 3}{2\sqrt{2}} v$$

Sorunun A ve D şıkları sadeleştirildiğinde aynı sonucu verdiği için çift şıklı olmasından kaynaklı olarak soru iptal edilmiştir.

Soru

Yarıçapı R , ağırlığı G olan düzgün bir silindir, pürüzlü bir yatay zemin üzerinde durmaktadır. Silindire, merkezinden geçen yatay doğrultudaki çapın sol ucuna bağlanmış hafif bir ip, yukarı doğru çekilerek silindiri dengede tutmaktadır. İpin doğrultusu yatayla θ açısı yapmaktadır ($0 < \theta < 90^\circ$) Silindir ile zemin arasındaki statik sürtünme katsayısı μ 'dür. Silindir kaymanın tam eşiğinde dengede olduğuna göre, ip gerilmesi T nedir?



- a) $\frac{\sqrt{2} \mu G}{1 + \mu}$
b) Hiçbiri
c) $\frac{2\mu G}{1 + \mu}$
d) $\frac{\sqrt{2} \mu G}{1 + \mu^2}$
e) $\frac{2\mu G}{1 + \mu^2}$

Çözüm

Sorunun püf noktası şu: Kuvvet dengesi var. Moment dengesi var. Sürtünme sınır durumunda: $f = \mu N$

Ama önce kuvvetlerin yönünü doğru kurmak lazım.

Kuvvetler

Silindire etki eden kuvvetler:

1. Ağırlık: G , merkezden aşağı
2. Zeminin tepki kuvveti: N , temas noktasından yukarı
3. Sürtünme kuvveti: f , temas noktasında yatay
4. İp gerilmesi: T , ipin bağlandığı noktadan, ip doğrultusunda

İp, sol uçtan yukarı doğru çekiliyor. Bu yüzden gerilmenin bileşenleri:

- yatay: sola doğru $T \cos \theta$
- düşey: yukarı doğru $T \sin \theta$

Moment dengesi

En temiz nokta: momenti silindirin merkezi etrafında alalım.

- Ağırlık merkezden geçtiği için momenti sıfır
- N de merkezden geçen düşey doğrultuda olduğu için momenti sıfır
- Gerilme kuvveti, çapın sol ucuna uygulanıyor. Bu noktanın merkezden konumu yatay sola doğru R 'dir.

Şimdi dikkat:

Gerilmenin **yatay bileşeni** merkeze doğrultulu olduğu için moment üretmez.

Sadece **düşey bileşen** moment üretir.

Bu momentin büyüklüğü: $\tau_T = R T \sin \theta$

Sürtünme kuvveti temas noktasında yatay uygulanır ve moment kolu R 'dir: $\tau_f = R f$

Denge için momentler eşit ve zıt olmalı:

$$Rf = RT \sin \theta$$
$$\boxed{f = T \sin \theta} \quad (1)$$

Yatay kuvvet dengesi

Sağı pozitif alalım. Yatay doğrultuda:

- sürtünme f : sağa
- ipin yatay bileşeni: sola $T \cos \theta$

Denge:

$$f - T \cos \theta = 0$$
$$\boxed{f = T \cos \theta} \quad (2)$$

(1) ve (2)'yi karşılaştıralım

$$T \sin \theta = T \cos \theta$$

$$\sin \theta = \cos \theta$$

$$\boxed{\theta = 45^\circ}$$

Bu çok önemli sonuç:

Bu geometride silindirin hem dönme hem öteleme dengede kalabilmesi için ipin açısı keyfi olamaz; yalnızca

$$\boxed{\theta = 45^\circ}$$

olmalıdır.

DüŖey kuvvet dengesi

DüŖey doğrultuda: N yukarı, $T \sin \theta$ yukarı ve G aŖađı

Dolayısıyla:

$$N + T \sin \theta - G = 0$$
$$\boxed{N = G - T \sin \theta} \quad (3)$$

Kaymanın eŖiđi

Silindir kaymanın eŖiđinde olduğuna göre: $f = \mu N$

(1) veya (2)'den, $\theta = 45^\circ$ için:

$$f = T \cos 45^\circ = \frac{T}{\sqrt{2}}$$

Ayrıca (3)'te:

$$N = G - T \sin 45^\circ = G - \frac{T}{\sqrt{2}}$$

Ŗimdi sınır Ŗartı:

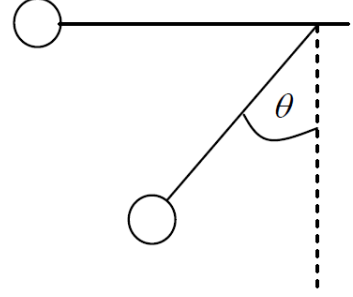
$$\frac{T}{\sqrt{2}} = \mu \left(G - \frac{T}{\sqrt{2}} \right)$$

Açalım:

$$\frac{T}{\sqrt{2}} = \mu G - \mu \frac{T}{\sqrt{2}}$$
$$\frac{T}{\sqrt{2}} (1 + \mu) = \mu G$$
$$T = \frac{\sqrt{2} \mu G}{1 + \mu}$$

Soru

Küçük bir top bir ipin ucuna asılmıştır. Başlangıçta ip yatay konumdadır ve daha sonra serbest bırakılmaktadır. Topun toplam ivmesi yatay doğrultuda olduğu anda ipin dikey eksen ile yaptığı θ açısı nedir?



- a) $\text{arccot}(1/2)$
- b) $\text{arcsin}(\sqrt{2})$
- c) $\text{arcsin}(1/\sqrt{2})$
- d) $\text{arctan}(\sqrt{2})$
- e) Hiçbiri

Çözüm

Top serbest bırakıldıktan sonra iki ivme bileşeni vardır:

- **merkezcil (radyal) ivme**
- **teğetsel ivme**

Soruda, **toplam ivmenin yatay olduğu an** soruluyor. Bu, toplam ivmenin **düşey bileşeninin sıfır** olduğu anlamına gelir.

Hızın θ açısındaki değeri

İpin boyu L olsun. Top başlangıçta yatayda, yani pivotla aynı seviyede. θ açısına geldiğinde, başlangıca göre $L \cos \theta$ kadar aşağı inmiştir.

Enerji korunumu:

$$mgL \cos \theta = \frac{1}{2}mv^2$$
$$v^2 = 2gL \cos \theta$$

İvme bileşenleri

Radyal ivme

Büüklüğü:

$$a_r = \frac{v^2}{L} = 2g \cos \theta$$

Yönü ip boyunca pivota doğrudur. Bunun düşey bileşeni:

$$(a_r)_y = \frac{v^2}{L} \cos \theta = 2g \cos^2 \theta$$

yukarı doğrudur.

Teğetsel ivme

Büyüküğü:

$$a_t = g \sin \theta$$

Bu ivme yayın teğeti boyunca aşağıya doğrudur. Bunun düşey bileşeni aşağı yönde:

$$(a_t)_y = g \sin^2 \theta$$

Toplam ivme yatay olsun

Düşey bileşen sıfır olmalı:

$$2g \cos^2 \theta - g \sin^2 \theta = 0$$

$$2 \cos^2 \theta = \sin^2 \theta$$

$$2 \cos^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta$$

$$3 \cos^2 \theta = 1$$

$$\cos^2 \theta = \frac{1}{3}$$

$$\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Dolayısıyla cevap $\arctan(\sqrt{2})$

Soru

Düzlem, $x = 0$ doğrusu ile iki bölgeye ayrılmıştır. $x < 0$ bölgesinde düzgün manyetik alan $\vec{B}_1 = B \hat{k}$ şeklinde olup sayfa düzleminden dışarı doğrudur. $x > 0$ bölgesinde ise düzgün manyetik alan $\vec{B}_2 = 2B \hat{k}$ şeklinde olup yine sayfa düzleminden dışarı doğrudur. Yüğü $+q$, kütlesi m olan pozitif bir parçacık, $x = 0$ doğrusu üzerindeki O noktasından, $+x$ yönü ile 60° açı yapacak şekilde v hızıyla $x > 0$ bölgesine giriyor. Parçacık önce $x > 0$ bölgesinde, sonra $x < 0$ bölgesinde hareket ediyor ve bir süre sonra tekrar $x = 0$ doğrusu üzerinden geçiyor. Buna göre parçacığın bu $x = 0$ doğrusunu tekrar kestiği noktanın, O noktasına göre düşey uzaklığı nedir?

- a) Hiçbiri b) $\frac{mv}{qB}$ c) $\frac{3mv}{2qB}$ d) $\frac{mv}{2qB}$ e) $\frac{2mv}{qB}$

Çözüm

Yarıçaplar:

$$r_1 = \frac{mv}{qB} (x < 0), r_2 = \frac{mv}{2qB} (x > 0)$$

$$r = \frac{mv}{qB} \text{ tanımlarsak: } r_1 = r, r_2 = \frac{r}{2}$$

Bölge 1: $x > 0$

Dönüş yönü: Pozitif yük, \vec{B} dışarı $\rightarrow \vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B} \rightarrow$ **saat yönünde.**

$$\text{Giriş hızı: } \hat{v}_0 = (\cos 60^\circ, \sin 60^\circ) = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

Saat yönünde dönüşte merkez, hızın **sağ normalinde:**

$$(v_x, v_y) \xrightarrow{-90^\circ} (v_y, -v_x) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$$

Merkez C_2 :

$$C_2 = O + r_2 \cdot \hat{n} = \frac{r}{2} \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{\sqrt{3}}{4}r, -\frac{1}{4}r\right)$$

$x = 0$ kesişimi (C_2 'den $x=0$ 'a yatay uzaklık $= \frac{\sqrt{3}}{4}r$):

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{4}r\right)^2 + \left(y + \frac{1}{4}r\right)^2 = \left(\frac{r}{2}\right)^2$$

$$\frac{3}{16}r^2 + \left(y + \frac{r}{4}\right)^2 = \frac{r^2}{4}$$

$$\left(y + \frac{r}{4}\right)^2 = \frac{r^2}{16} \Rightarrow y + \frac{r}{4} = \pm \frac{r}{4}$$

- $y = 0 \rightarrow$ O noktası (giriş)
- $y = -\frac{r}{2} \rightarrow$ **ÇIKIŞ NOKTASI** $A = \left(0, -\frac{r}{2}\right)$

A Noktasındaki Hız Yönü

$$\overrightarrow{C_2A} = A - C_2 = \left(-\frac{\sqrt{3}}{4}r, -\frac{1}{4}r\right) \propto (-\sqrt{3}, -1)$$

Normalize: $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$

Saat yönünde hız = bu vektörü **-90°** döndür: $(x, y) \rightarrow (y, -x)$

$$\hat{v}_A = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

Bölge 2: $x < 0$

Hız $\hat{v}_A = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, manyetik alan hâlâ dışarı, yük pozitif \rightarrow **saat yönünde** dönüş devam eder.

Sağ normal:

$$(v_x, v_y) \xrightarrow{-90^\circ} (v_y, -v_x) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

Merkez C_1 :

$$C_1 = A + r_1 \cdot \hat{n} = \left(0, -\frac{r}{2}\right) + r \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}r, 0\right)$$

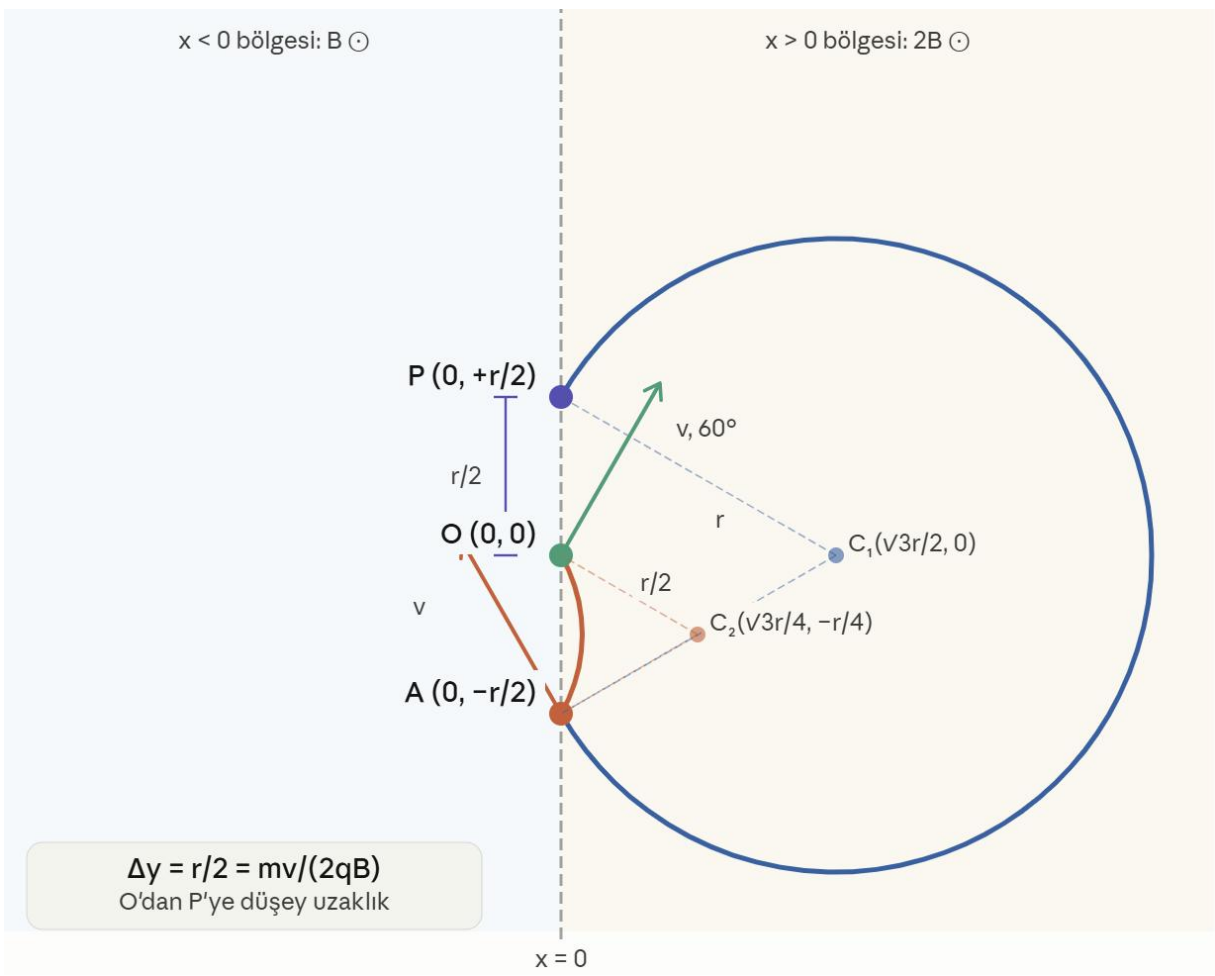
x = 0 kesişimi (C_1 'den $x=0$ 'a yatay uzaklık = $\frac{\sqrt{3}}{2}r$):

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}r\right)^2 + y^2 = r^2$$

$$\frac{3}{4}r^2 + y^2 = r^2 \Rightarrow y^2 = \frac{r^2}{4} \Rightarrow y = \pm \frac{r}{2}$$

- $y = -\frac{r}{2} \rightarrow$ A noktası (giriş)
- $y = +\frac{r}{2} \rightarrow$ **Son nokta** $P = \left(0, +\frac{r}{2}\right)$

Sonuç



O noktası $(0, 0)$, son nokta $P = \left(0, +\frac{r}{2}\right)$:

$$\Delta y = \frac{r}{2} = \frac{mv}{2qB}$$

Soru

İç kenar uzunluğu $2h$ olan, çok ince duvarlı küp biçiminde bir metal kap bulunmaktadır. Kabin içine, başlangıçta kabın tam yarısına kadar, yoğunluğu d olan bir sıvı doldurulmuştur. Kabin tavanının tam ortasından, ısı genleşmesi ihmal edilebilen hafif bir ip ile, taban alanı A ($A \ll h^2$), yüksekliği h olan dolu silindir biçimli bir cisim aşağı sarkıtılıyor. Silindirin yoğunluğu da başlangıçta d 'dir. İpin boyu öyle ayarlanmıştır ki, başlangıçta silindirin sıvı içinde kalan yüksekliği tam $h/2$ olmaktadır. Kap ile silindir aynı metalden yapılmıştır ve bu metalin doğrusal genleşme katsayısı $\alpha = 10^{-3} \text{ C}^{-1}$ dir. Sıvının hacimsel genleşme katsayısı ise $\beta = 5 \times 10^{-3} \text{ C}^{-1}$ dir. Tüm sistemin sıcaklığı 10°C artırılıyor. Isınma sonunda kap genişliyor, sıvı genişliyor, silindir genişliyor ve ipin boyu ise değişmiyor ise buna göre ip gerilmesi ilk duruma göre yüzde kaç değişmiştir?

- a) Hiçbiri
- b) %0.1
- c) %5
- d) %10
- e) %3

Çözüm

Verilen:

- Küp kenar: $2h$, taban alanı $S = (2h)^2 = 4h^2$
- Sıvı yoğunluğu: d , başlangıçta h yüksekliğine kadar dolu (küpün yarısı)
- Silindir: taban alanı A , yükseklik h , yoğunluk d ($A \ll h^2$)
- Başlangıçta silindirin $h/2$ 'si sıvı içinde
- $\alpha = 10^{-3} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$, $\beta = 5 \times 10^{-3} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$, $\Delta T = 10^\circ\text{C}$

Başlangıç Gerilmesi $T_0 = W - F_k = dAhg - d \cdot A \cdot \frac{h}{2} \cdot g = \frac{dAhg}{2}$

Isınma Sonrası — Her Değişkeni Ayrı Hesaplayalım

1) Sıvının yeni yüksekliği

Sıvı başlangıç hacmi (silindir ihmal, $A \ll h^2$):

$$V_0 = 4h^2 \cdot h = 4h^3$$

Isınma sonrası sıvı hacmi:

$$V'_0 = 4h^3(1 + \beta\Delta T) = 4h^3(1 + 0.05)$$

Isınma sonrası kap taban alanı:

$$S' = 4h^2(1 + 2\alpha\Delta T) = 4h^2(1 + 0.02)$$

Yeni sıvı yüksekliği:

$$H' = \frac{V'_0}{S'} = h \cdot \frac{1 + 0.05}{1 + 0.02} \approx h(1 + 0.03)$$

2) Silindirin alt ucunun yeni yüksekliği

İpin boyu sabit = ℓ .

Başlangıçta:

- Tavan yüksekliği: $2h$
- Silindirin üst ucu: $2h - \ell$
- Silindirin alt ucu: $2h - \ell - h = h - \ell$

Sıvı yüzeyi h , alt uç $h - \ell \rightarrow$ batık kısım = $\ell \dots$

Hayır, daha temiz düşünelim. Başlangıçta:

- Silindirin alt ucu yerden y_0 yükseklikte
- Sıvı yüzeyi h
- Batık yükseklik = $h - y_0 = h/2 \rightarrow y_0 = h/2$

İp boyu: $\ell = 2h - (y_0 + h) = 2h - 3h/2 = h/2$

Isınma sonrası tavan yüksekliği:

$$2h' = 2h(1 + \alpha\Delta T) = 2h(1 + 0.01)$$

İp boyu değişmez \rightarrow silindirin **üst ucu** tavandan ℓ aşağıda:

Silindirin üst ucu: $2h(1 + 0.01) - h/2$

Silindirin yeni yüksekliği: $h' = h(1 + \alpha\Delta T) = h(1 + 0.01)$

Silindirin **alt ucunun** yeni yüksekliği:

$$y'_{alt} = 2h(1 + 0.01) - \frac{h}{2} - h(1 + 0.01) = h(1 + 0.01) - \frac{h}{2}$$

$$y'_{alt} = h + 0.01h - 0.5h = 0.5h + 0.01h$$

Başlangıçta: $y_{alt,0} = h/2 = 0.5h$

\rightarrow Alt uç $0.01h$ yukarı çıktı.

3) Yeni batık yükseklik

$$x' = H' - y'_{alt} = h(1 + 0.03) - (0.5h + 0.01h)$$

$$x' = h + 0.03h - 0.5h - 0.01h = 0.5h + 0.02h$$

Başlangıçta: $x_0 = h/2 = 0.5h$

\rightarrow Batık yükseklik $0.02h$ arttı.

4) Yeni kaldırma kuvveti

$$F'_k = d' \cdot A' \cdot x' \cdot g$$

Her birini ayrı hesaplayalım (birinci dereceden):

$$d' = d(1 - \beta\Delta T) = d(1 - 0.05)$$

$$A' = A(1 + 2\alpha\Delta T) = A(1 + 0.02)$$

$$x' = \frac{h}{2}(1 + 0.04) \left[\text{çünkü } x' = 0.5h + 0.02h = \frac{h}{2}(1 + 0.04) \right]$$

$$F'_k = d(1 - 0.05) \cdot A(1 + 0.02) \cdot \frac{h}{2}(1 + 0.04) \cdot g$$

Birinci dereceden:

$$F'_k = \frac{dAhg}{2} (1 - 0.05 + 0.02 + 0.04)$$

$$F'_k = \frac{dAhg}{2} (1 + 0.01)$$

5) Yeni gerilme

$$T' = W - F'_k = dAhg - \frac{dAhg}{2} (1 + 0.01)$$

$$T' = dAhg \left(1 - \frac{1 + 0.01}{2} \right) = dAhg \cdot \frac{2 - 1 - 0.01}{2} = dAhg \cdot \frac{0.99}{2}$$

$$T_0 = \frac{dAhg}{2}$$

6) Yüzdesele değişim

$$\frac{T' - T_0}{T_0} = \frac{\frac{dAhg}{2} (0.99) - \frac{dAhg}{2}}{\frac{dAhg}{2}} = 0.99 - 1 = -0.01$$

Sonuç: %1 azalır

Cevap: Hiçbiri

Soru

Genişliği L olan bir nehirde akıntı hızı kıyıya paralel ve sabit u 'dur. Alt kıyıda ki A noktasından birinci yüzücü $t = 0$ anında suya giriyor. Bu yüzücünün suya göre hız büyüklüğü sabit V 'dir ($V > u$) ve yüzücü, akıntıyı dengeleyecek şekilde yüzerek A 'nın tam karşı kıyısındaki B noktasına ulaşacak şekilde yüzüyor. İkinci yüzücü ise üst kıyıda, B noktasının akıntıya karşı yönünde $L/6$ kadar uzağındaki C noktasından, ilk yüzücünün suya girme anına göre Δt süre kadar gecikmeli olarak suya giriyor. Onun da suya göre hız büyüklüğü V 'dir ve o, suya göre kıyıya dik doğrultuda yüzmektedir. İki yüzücü nehir içinde P noktasında karşılaşıyorlar. Bu noktanın, alt kıyıya olan dik uzaklığı üst kıyıya olan dik uzaklığının 2 katıdır. Buna göre ikinci yüzücünün Δt gecikme süresi aşağıdakilerden hangisidir?

a) $\frac{L}{V} \left(\frac{5}{\sqrt{3}} - 1 \right)$

b) $\frac{L}{3V} \left(\frac{4}{\sqrt{3}} - 1 \right)$

c) $\frac{L}{2V} \left(\frac{2}{\sqrt{3}} - 1 \right)$

d) Hiçbiri

e) $\frac{L}{4V} \left(\frac{2}{\sqrt{3}} - 1 \right)$

Çözüm

Nehri dik doğrultuda yekseni, akıntı yönünü x ekseni alalım.

- Alt kıyı: $y = 0$
- Üst kıyı: $y = L$

A noktası $(0, 0)$, B noktası $(0, L)$ olsun. Akıntı $+x$ yönünde ve büyüklüğü u .

Birinci yüzücü

Birinci yüzücü A 'dan çıkıyor ve **tam karşıya**, yani B 'ye gitmek istiyor. Bu yüzden suya göre hızının x bileşeni akıntıyı dengelemelidir:

$$v_{1x} = -u$$

Suya göre hız büyüklüğü V olduğundan, karşı kıyıya doğru olan bileşen:

$$v_{1y} = \sqrt{V^2 - u^2}$$

Dolayısıyla yere göre net hızı sadece dikeydir:

$$\vec{v}_1 = (0, \sqrt{V^2 - u^2})$$

Yani birinci yüzücü düz bir çizgiyle A'dan B'ye gider.

Karşılaşma noktasının yeri

P noktasının alt kıyıya uzaklığı, üst kıyıya uzaklığının 2 katı.

Yani:

$$y_P = 2(L - y_P)$$

$$y_P = 2L - 2y_P$$

$$3y_P = 2L$$

$$y_P = \frac{2L}{3}$$

Demek ki karşılaşma noktası P, nehrin alt kıyısından $\frac{2L}{3}$ yüksekte.

Birinci yüzücünün P'ye varış süresi

Birinci yüzücünün dikey hızı:

$$\sqrt{V^2 - u^2}$$

olduğuna göre, A'dan P'ye gelme süresi:

$$t_P = \frac{2L/3}{\sqrt{V^2 - u^2}} \quad (1)$$

İkinci yüzücü

İkinci yüzücü üst kıyıda, B'nin akıntıya karşı yönünde $L/6$ kadar uzağındaki C noktasından başlıyor.

Akıntı $+x$ yönünde olduğuna göre, akıntıya karşı yön $-x$ 'tir.

Bu yüzden:

$$C = \left(-\frac{L}{6}, L\right)$$

İkinci yüzücü suya göre kıyıya dik yüzüyor; yani suya göre hızı yalnızca aşağı yönde:

$$(0, -V)$$

Akıntı nedeniyle yere göre hızı:

$$\vec{v}_2 = (u, -V)$$

olsun.

P noktasının x koordinatı

Birinci yüzücü A'dan B'ye doğruca gittiği için onun izlediği yol $x = 0$ doğrusu üzerindedir. Karşılaşma noktası da bu doğru üzerinde olmalıdır:

$$x_p = 0$$

İkinci yüzücü C'den başlayıp x doğrultusunda akıntıyla sürüklendiğine göre, P'ye gelene kadar yatayda aldığı yol:

$$\Delta x = 0 - \left(-\frac{L}{6} \right) = \frac{L}{6}$$

Yatay hızı u olduğundan, ikinci yüzücünün suda kaldığı süre:

$$\tau = \frac{L/6}{u} = \frac{L}{6u} \quad (2)$$

Bunu düşey hareketten de kontrol edebiliriz:

C'den $y = L$ 'den $y = 2L/3$ 'e geliyor, yani düşeyde

$$\frac{L}{3}$$

kadar iner. Düşey hız büyüklüğü V , o hâlde:

$$\tau = \frac{L/3}{V}$$

Buradan ayrıca

$$\frac{L}{6u} = \frac{L}{3V} \Rightarrow V = 2u \quad (3)$$

Birinci yüzücünün P'ye geliş süresi

(3)'ten:

$$V = 2u$$

Bu yüzden birinci yüzücünün dikey hızı:

$$\sqrt{V^2 - u^2} = \sqrt{4u^2 - u^2} = \sqrt{3} u$$

(1)'de yerine yazalım:

$$t_p = \frac{2L/3}{\sqrt{3} u} = \frac{2L}{3\sqrt{3} u} \quad (4)$$

Gecikme süresi

İkinci yüzücü suya daha geç giriyor. Gecikme süresine Δt diyelim.

Karşılaşma anına kadar ikinci yüzücünün suda kalma süresi $\tau = \frac{L}{6u}$ idi.

Dolayısıyla:

$$\begin{aligned} \Delta t &= t_p - \tau \\ \Delta t &= \frac{2L}{3\sqrt{3} u} - \frac{L}{6u} \end{aligned}$$

Payda düzenleyelim:

$$\Delta t = \frac{L}{6u} \left(\frac{4}{\sqrt{3}} - 1 \right)$$

İstersek rasyonelleştirelim:

$$\frac{4}{\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

o halde

$$\Delta t = \frac{L}{6u} \left(\frac{4\sqrt{3}}{3} - 1 \right)$$

veya daha sade halinde:

$$\Delta t = \frac{L(4\sqrt{3} - 3)}{9V}$$

Soru

Kırılma indisleri sırasıyla n_1 ve n_2 olan iki saydam ortam, tepe noktası V ve merkezi O olan küresel bir yüzey ile ayrılmaktadır. Yüzeyin yarıçapı R olsun. Yüzey, n_1 ortamından bakıldığında dışbükey görünsün; yani merkez O noktası, n_2 tarafındadır. Asal eksen üzerinde, n_1 ortamında, tepe noktasına uzaklığı s olan noktasal bir cisim vardır. Bu cisimden çıkan paraksiyel ışınlar kırılıp n_2 ortamında bir görüntü oluşturuyor. Bu durumda oluşan görüntü, O ile V arasındaki doğru parçasının tam orta noktasında oluşmaktadır. Bu durumda görüntü enine büyütme oranı kaçtır?

- a) $-\frac{2n_1+n_2}{2n_1}$
- b) $-\frac{n_1+n_2}{2n_2}$
- c) $-\frac{n_1+2n_2}{2n_2}$
- d) $-\frac{n_1+n_2}{2n_1}$
- e) Hiçbiri

Çözüm

Bu soru iptal edilmiştir.

Soru

Aynı x -doğrultusu üzerinde hareket eden iki cisim vardır. A cisimi $x = 0$ noktasından durgun halden başlayarak sabit a ivmesiyle sağa doğru hızlanarak hareket ediyor. B cisimi ise aynı anda $x = L$ noktasından başlayıp A'ya doğru sabit bir hızla hareket etmektedir. A ve B ilk kez karşılaştıkları anda A cisminin hız büyüklüğü ile B cisminin hız büyüklüğü eşittir. Bu karşılaşmadan hemen sonra A cisimi o andaki hızı ile sabit hızlı olarak hareketine devam ederken B cisimi ise sürekli olarak sağa doğru bir a ivme büyüklüğüne sahip olacak şekilde hareketine devam ediyor. İki cisim ikinci kez karşılaştıklarında A cisminin hız büyüklüğünün B cisminin hız büyüklüğüne oranı ne olur?

- a) 3
- b) 2
- c) 1/2
- d) 1/3
- e) Hiçbiri

Çözüm

İlk karşılaşma

A cisimi: $x = 0$ 'dan başlıyor ve ilk bölümde durgun halden sabit a ivmesiyle sağa gidiyor

Dolayısıyla

$$x_A = \frac{1}{2}at^2, v_A = at$$

B cisimi: $x = L$ 'den başlıyor ve A'ya doğru sabit hızla sola gidiyor

B'nin hız büyüklüğüne u diyelim. O zaman

$$x_B = L - ut$$

İlk karşılaşma anında konumlar eşit:

$$\frac{1}{2}at^2 = L - ut \quad (1)$$

Ayrıca bu anda hız büyüklükleri eşit denmiş:

$$v_A = u$$

ama $v_A = at$ olduğundan $u = at$ (2)

(2)'yi (1)'de yerine yazalım: $\frac{1}{2}at^2 = L - at^2$

$$\frac{3}{2}at^2 = L$$

$$at^2 = \frac{2L}{3} \quad (3)$$

İlk karşılaşma anındaki ortak hız büyüklüğü:

$$v_0 = at$$

ve buradan

$$v_0^2 = a^2 t^2 = a(at^2) = a \cdot \frac{2L}{3}$$
$$v_0^2 = \frac{2aL}{3} \quad (4)$$

İlk karşılaşma noktası:

$$x_1 = \frac{1}{2} at^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{2L}{3} = \frac{L}{3}$$

İlk karşılaşmadan sonraki hareket

Bu andan hemen sonra:

- A, o andaki hızıyla sabit hızlı gidiyor
- B, sürekli sağa doğru a ivmeyle gidiyor

İlk karşılaşma anını yeni başlangıç anı alalım.

A için: Başlangıç konumu $x_1 = L/3$, sabit hızı v_0 :

$$x'_A = \frac{L}{3} + v_0 t$$

B için: B ilk karşılaşma anında sola doğru v_0 hızla gidiyordu. Sonra sağa doğru a ivmesi var. Yani başlangıç hızı: $-v_0$ ve başlangıç konumu yine $L/3$. Bu yüzden

$$x'_B = \frac{L}{3} - v_0 t + \frac{1}{2} at^2$$

İkinci karşılaşma

İkinci kez karşılaştıklarında

$$x'_A = x'_B$$
$$\frac{L}{3} + v_0 t = \frac{L}{3} - v_0 t + \frac{1}{2} at^2$$
$$2v_0 t = \frac{1}{2} at^2$$
$$4v_0 t = at^2$$
$$t = \frac{4v_0}{a} (t \neq 0) \quad (5)$$

İkinci karşılaşma anındaki hızlar

A'nın hızı: A sabit hızlı gittiği için: $v_A = v_0$

B'nin hızı: $v_B = -v_0 + at$

(5)'i kullanalım:

$$v_B = -v_0 + a \cdot \frac{4v_0}{a} = 3v_0$$

Dolayısıyla ikinci karşılaşmada hız büyüklükleri:

$$|v_A| = v_0, |v_B| = 3v_0$$

İstenen oran:

$$\frac{|v_A|}{|v_B|} = \frac{v_0}{3v_0} = \frac{1}{3}$$

Soru

Yerden v_0 hızıyla bir cisim toplam yataydaki menzili $4L$ olacak şekilde yatayla belli bir açı yaparak fırlatılıyor. Atış noktasından yatayda L uzaklıkta bir düşey duvar vardır. Cisim ilk olarak duvara çarpıyor. Duvar çarpışmasında yatay hızın büyüklüğü k katına çıkıyor, düşey hız ise değişmiyor. Daha sonra cisim zemine çarpıyor. Zemin çarpışmasında düşey hızın büyüklüğü k katına çıkıyor, yatay hız ise değişmiyor. Bundan sonra cisim tekrar yükseliyor ve tam atış noktasına geri dönüyor ise k değeri kaçtır?

- a) Hiçbiri
- b) 1/4
- c) 1/3
- d) 1/2
- e) 2/3

Çözüm

Başlangıç hızının bileşenleri: $v_{0x} = u$, $v_{0y} = w$ olsun.

Verilen bilgiye göre, cisim yere hiç engel olmadan düşseydi toplam menzil $4L$ olacaktı. Eğik atış menzili:

$$R = \frac{2uw}{g}$$

olduğundan

$$\frac{2uw}{g} = 4L$$
$$uw = 2Lg \quad (1)$$

Cisim duvara çarptığı andaki durum

Duvar, atış noktasından yatayda L uzakta. Duvara ulaşma süresi:

$$t_1 = \frac{L}{u}$$

Bu anda yüksekliği:

$$y_1 = wt_1 - \frac{1}{2}gt_1^2$$
$$y_1 = w \frac{L}{u} - \frac{1}{2}g \frac{L^2}{u^2}$$

(1)'den $w = \frac{2Lg}{u}$, yerine yazalım:

$$y_1 = \frac{2Lg}{u} \cdot \frac{L}{u} - \frac{1}{2}g \frac{L^2}{u^2}$$
$$y_1 = \frac{2gL^2}{u^2} - \frac{1}{2} \frac{gL^2}{u^2} = \frac{3}{2} \frac{gL^2}{u^2} \quad (2)$$

Duvara çarpmadan hemen önce düşey hız: $v_{y1} = w - gt_1$

$$v_{y1} = \frac{2Lg}{u} - g \frac{L}{u} = \frac{gL}{u} \quad (3)$$

Yatay hız duvarda yön değiştirir ve büyüklüğü k katına çıkar: $v'_{x1} = -ku$

Düşey hız değişmez:

$$v'_{y1} = \frac{gL}{u}$$

Duvardan çıktıktan sonra zemine çarpma kadar

Başlangıç yüksekliği y_1 , başlangıç düşey hızı $\frac{gL}{u}$.

Zemine ulaşma süresi t_2 için:

$$0 = y_1 + v'_{y1}t_2 - \frac{1}{2}gt_2^2$$

(2) ve (3)'ü yazalım:

$$0 = \frac{3gL^2}{2u^2} + \frac{gL}{u}t_2 - \frac{1}{2}gt_2^2$$

g ile sadeleştirip 2 ile çarpalım:

$$0 = 3\frac{L^2}{u^2} + 2\frac{L}{u}t_2 - t_2^2$$

Bunun pozitif kökü:

$$t_2 = 3\frac{L}{u}$$

Bu sürede yatay yer değiştirme:

$$\Delta x_2 = (-ku) \cdot 3\frac{L}{u} = -3kL$$

Dolayısıyla cismin zemine çarptığı nokta:

$$x_2 = L - 3kL \quad (4)$$

Zemine çarpmadan hemen önce düşey hız:

$$v_{y2} = \frac{gL}{u} - g \cdot 3\frac{L}{u} = -2\frac{gL}{u}$$

Zemin çarpışmasından sonra düşey hız yön değiştirip büyüklüğü k katına çıkar:

$$v'_{y2} = +2k\frac{gL}{u}$$

Yatay hız değişmez: $v'_{x2} = -ku$

Zemin çarpışmasından sonra tekrar atış noktasına dönmesi

Bu andan sonra cisim yerden tekrar fırlamış gibi düşünülür. Başlangıç noktası yer seviyesinde olduğundan, tekrar yere dönme süresi:

$$t_3 = \frac{2v'_{y2}}{g} = \frac{2 \cdot 2k(gL/u)}{g} = 4k \frac{L}{u}$$

Bu sürede yatay yer değiştirme:

$$\Delta x_3 = (-ku) \cdot 4k \frac{L}{u} = -4k^2 L$$

Cisim tam atış noktasına, yani $x = 0$ 'a dönüyor. O hâlde:

$$x_2 + \Delta x_3 = 0$$

$$(L - 3kL) - 4k^2 L = 0$$

$$1 - 3k - 4k^2 = 0$$

$$4k^2 + 3k - 1 = 0$$

$$k = \frac{-3 \pm 5}{8}$$

Pozitif kök alınır:

$$k = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

Soru

Kesit alanı A , toplam uzunluğu $3L$ olan yatay bir kap, sürtünmesiz ve sızdırmaz iki ağırlıksız pistonla üç bölmeye ayrılmıştır. Başlangıçta her bölmenin uzunluğu L 'dir. Sol ve sağ bölmelerde ayrı ayrı n mol T sıcaklığında ideal gaz vardır. Orta bölme ise başlangıçta boştur. İki piston, orta bölmenin içinde bulunan ağırlıksız bir yay ile birbirine bağlanmıştır. Bu yayın yay sabiti k , doğal boyu $2L$ 'dir. Başlangıçta sistem dengededir. Daha sonra orta bölmeye, sıcaklığı yine T olan ideal bir gaz yavaşça ekleniyor. Eklenen gaz miktarı N mol olsun. Bir süre sonra sistem tüm bölmelerin sıcaklıkları T olacak şekilde yeniden denge durumuna geliyor ve bu durumda yayın doğal boyuna ulaştığı gözlemleniyor. Bu durumdan sonra pistonların arasına, ilk yaya paralel olacak şekilde, yay sabiti yine k olan ikinci bir yay daha bağlanıyor. Bu ikinci yayın doğal boyu ise $\frac{L}{2}$ 'dir. Ardından orta bölmedeki gazdan bir miktar yavaşça dışarı alınıyor ve sıcaklık yine tüm bölmelerde T olarak sabit tutuluyor. Son durumda, tüm bölmelerde gaz basıncının aynı olduğu gözleniyor. Buna göre son durumda orta bölmede kalan gaz miktarı aşağıdakilerden hangisidir?

- a) $2n/3$
- b) $16n/5$
- c) $9n/4$
- d) $10n/7$
- e) Hiçbiri

Çözüm

Orta bölmeye ilk kez gaz eklenmesi

Başlangıçta sol ve sağ bölmelerin her biri L uzunlukta olduğundan, her birinin hacmi $V_0 = AL$ olur. Dolayısıyla başlangıç basıncı

$$P_0 = \frac{nRT}{AL}$$

Başlangıçta orta bölme boştur. 1. yayın doğal boyu $2L$, gerçek boyu ise orta bölmenin boyu olan L 'dir. Bu yüzden başlangıç sıkışması

$$x_0 = 2L - L = L$$

olur. Yayın uyguladığı kuvvet $F_0 = kL$ dir.

Piston dengesi için bu kuvvet, gazın uyguladığı basınç kuvvetine eşit olmalıdır:

$$\begin{aligned} P_0 A &= kL \\ \frac{nRT}{AL} A &= kL \end{aligned}$$

$$\frac{nRT}{L} = kL$$

$$k = \frac{nRT}{L^2} \quad (1)$$

Şimdi orta bölmeye gaz eklendiğinde, 1. yayın tam doğal boyuna ulaştığı söyleniyor. Yani orta bölmenin boyu artık $2L$ olmuştur. Kabın toplam boyu $3L$ olduğuna göre, iki yan bölmenin toplam boyu L olur. Simetriden dolayı her biri $\frac{L}{2}$ uzunluktadır.

Bu durumda yan bölmelerdeki basınç:

$$P_y = \frac{nRT}{A(L/2)} = \frac{2nRT}{AL}$$

İlk yay doğal boyunda olduğundan kuvveti sıfırdır. O halde piston dengesi için orta bölme basıncı da aynı olmalıdır:

$$P_m = P_y = \frac{2nRT}{AL}$$

Orta bölmenin hacmi $V_m = 2AL$ olduğundan, eklenen gaz miktarı N için

$$P_m = \frac{NRT}{2AL}$$

yazılır. Buradan

$$\frac{NRT}{2AL} = \frac{2nRT}{AL}$$

$$\frac{N}{2} = 2n$$

$$N = 4n$$

Yani ilk aşamanın sonunda orta bölmede $4n$ mol gaz vardır.

İkinci yayın eklenmesi ve gazın bir kısmının alınması

Şimdi 2. yay ekleniyor. 1. yayın doğal boyu: $2L$ ve 2. yayın doğal boyu: $\frac{L}{2}$

Son durumda orta bölmenin uzunluğu y olsun. O zaman simetriden, her bir yan bölmenin uzunluğu

$$x = \frac{3L - y}{2}$$

Soruda son durumda orta basıncın yan basınca eşit olduğu veriliyor:

$$P_m = P_y \quad (2)$$

Bu durumda bir piston üzerindeki gaz basınçları birbirini dengeler. O halde pistonun dengede kalabilmesi için yaylardan gelen net kuvvetin sıfır olması gerekir.

1. yay: Doğal boyu $2L$, son boyu y . Son durumda $y < 2L$ olacağından sıkışmıştır. Kuvvet büyüklüğü: $F_1 = k(2L - y)$

2. Yay: Doğal boyu $\frac{L}{2}$, son boyu y . Son durumda $y > \frac{L}{2}$ olduğundan uzamıştır. Kuvvet büyüklüğü:

$$F_2 = k \left(y - \frac{L}{2} \right)$$

Basınçlar eşit olduğuna göre piston üzerindeki net yay kuvveti sıfır olmalıdır:

$$F_1 = F_2$$

$$k(2L - y) = k \left(y - \frac{L}{2} \right)$$

k 'lar sadeleşir:

$$2L - y = y - \frac{L}{2}$$

$$\frac{5L}{2} = 2y$$

$$y = \frac{5L}{4}$$

Yani son durumda orta bölmenin uzunluğu $\frac{5L}{4}$ olur.

Buna göre yan bölmelerin her birinin uzunluğu

$$x = \frac{3L - \frac{5L}{4}}{2} = \frac{\frac{12L}{4} - \frac{5L}{4}}{2} = \frac{7L}{8}$$

Son durumda orta bölmede kalan gaz miktarı

Son durumda basınçlar eşit: $P_y = P_m$

Yan bölmede n mol gaz olduğundan

$$P_y = \frac{nRT}{A(7L/8)} = \frac{8nRT}{7AL}$$

Orta bölmede kalan mol sayısı n_m olsun. O zaman

$$P_m = \frac{n_m RT}{A(5L/4)} = \frac{4n_m RT}{5AL}$$

Eşitleyelim:

$$\frac{4n_m RT}{5AL} = \frac{8nRT}{7AL}$$

$$\frac{4n_m}{5} = \frac{8n}{7}$$

$$4n_m = \frac{40n}{7}$$

$$n_m = \frac{10n}{7}$$

Soru

Düşey kesiti dikdörtgen olan bir kap, ortasındaki düşey ve ince bir levha ile iki bölmeye ayrılmıştır. Levhanın yüksekliği $2L$, genişliği ise fazla olup dönmeye engel durumdadır. Levha dönemese bile yatayda hareket edebilme noktasında serbest ve sürtünmesizdir. Levhanın sol tarafı, yoğunluğu $\frac{3\rho}{2}$ olan bir sıvı ile $2L$ yüksekliğine kadar dolduruluyor. Levhanın sağ tarafında ise h yüksekliğinde yoğunluğu 3ρ olan sıvı ve onun üstüne de yoğunluğu ρ olan başka bir sıvı konuluyor. Sağ taraftaki toplam sıvı yüksekliği yine $2L$ oluyor. Levha dengede kaldığına göre h/L kaçtır?

- a) 1/2
- b) 2/3
- c) Hiçbiri
- d) 3/4
- e) 1

Çözüm

Levha dengede olduğuna göre, sol taraftan levhaya etki eden yatay hidrostatik kuvvet ile sağ taraftan etki eden yatay hidrostatik kuvvet eşit olmalıdır. Dönemediği için moment hesabına gerek yok; sadece toplam yatay kuvvetleri eşitleriz.

Sol taraftaki kuvvet

Sol tarafta sıvı yoğunluğu: $\frac{3\rho}{2}$ yükseklik ise $2L$

Bir düşey yüzeye, yüksekliği H olan tek sıvının uyguladığı toplam kuvvet:

$$F = \frac{1}{2} \rho g b H^2$$

Burada b , levhanın sayfa düzlemine dik genişliği. Her iki tarafta da aynı olduğundan sadeleşecek.

Sol taraf için:

$$F_L = \frac{1}{2} \cdot \frac{3\rho}{2} \cdot g \cdot b \cdot (2L)^2$$

$$F_L = \frac{1}{2} \cdot \frac{3\rho}{2} \cdot g \cdot b \cdot 4L^2$$

$$F_L = 3\rho g b L^2$$

Sağ taraftaki kuvvet

Sağ tarafta iki sıvı var:

- altta: yoğunluk 3ρ , yükseklik h
- üstte: yoğunluk ρ , yükseklik $2L - h$

Toplam kuvveti iki parçaya ayıralım.

Üstteki ρ yoğunluklu sıvının etkisi

Yüksekliği $2L - h$ olan sıvının uyguladığı kuvvet:

$$F_1 = \frac{1}{2} \rho g b (2L - h)^2$$

Altta 3ρ yoğunluklu sıvının ek etkisi

Altta tabaka, yalnızca h yüksekliğinde ek basınç oluşturur. Bu ek basınç, üstteki sıvınıninkine ilave gelir. Alt tabakanın “ek” basıncı derinlikle doğrusal artar:

$$\Delta\rho = 3\rho - \rho = 2\rho$$

Dolayısıyla bu kısmın kuvveti:

$$F_2 = \frac{1}{2} (2\rho) g b h^2 = \rho g b h^2$$

Ayrıca üstteki sıvının sabit taban basıncı alt bölgede de etki eder; bunu tek parçada yazmak daha güvenli olur. En temiz yol doğrudan toplamı yazmaktır:

Sağ taraftaki toplam kuvvet:

$$F_R = \rho g b (2L^2 + h^2)$$

Denge şartı

$$\begin{aligned} F_L &= F_R \\ 3\rho g b L^2 &= \rho g b (2L^2 + h^2) \\ 3L^2 &= 2L^2 + h^2 \\ h^2 &= L^2 \\ h &= L \end{aligned}$$

Çünkü yükseklik pozitif olduğundan:

$$\boxed{\frac{h}{L} = 1}$$

Soru

Isıca yalıtılmış bir kapta başlangıçta m kütleli 20°C sıcaklığında X sıvısı ile yine m kütleli -20°C sıcaklığında X katısı bulunmaktadır. Kap içerisinde ayrıca sabit güçlü bir ısıtıcı vardır ve deney boyunca sürekli P gücüyle çalışmaktadır. X sıvısının öz ısısı c , ve bu sıvının donunca dönüştüğü X katısının öz ısısı $\frac{c}{2}$, ve bu katının erime ısısı ise $L = \lambda c$ şeklindedir. Bu bahsedilen sıvı ve katı aynı kaba konduktan hemen sonra ısıtıcı $t = 0$ anında çalıştırılıyor. Deney sırasında sistemin sıcaklığının önce 0°C 'ye ulaştığı ve bu anda başlangıçtaki X katısının tam olarak yarısının hâlâ erimemiş olduğu gözleniyor. Sistem daha sonra bir süre 0°C 'de kalıyor; sıcaklığın sabit kaldığı bu süreye t_1 deniyor. Tüm X katısı eridikten sonra sıcaklık yeniden artıyor ve sistem 20°C 'ye ulaşıyor. Başlangıçtan bu ana kadar geçen toplam süreye t_2 deniyor. Deneysel olarak $t_2/t_1 = 3$ olduğu ölçülüyor ise λ değeri kaçtır?

- a) 20
- b) 30
- c) 60
- d) 80
- e) Hiçbiri

Çözüm

Sistemi üç evreye ayırmak en temiz yol:

1. **Başlangıçtan sıcaklık ilk kez 0°C 'ye gelene kadar**
2. **Sıcaklığın 0°C 'de sabit kaldığı erime süreci (t_1)**
3. **Tüm katı eridikten sonra 0°C 'den 20°C 'ye çıkma süreci**

Verilenler:

- Başlangıçta:
 - m kütleli 20°C sıvı
 - m kütleli -20°C katı
- Sıvının öz ısısı: c
- Katının öz ısısı: $\frac{c}{2}$
- Erime ısısı: $L = \lambda c$
- Isıtıcı gücü: P
- Ölçülen oran: $\frac{t_2}{t_1} = 3$

Sistem ilk kez 0°C'ye geldiği an

Bu anda gözlenen şey: başlangıçtaki katının **yarısı hâlâ erimemiş** yani **yarısı erimiş**: $\frac{m}{2}$

Bu ana kadar olan enerji alışverişleri

Sıvı soğuyor:

m kütleli sıvı 20°C'den 0°C'ye iner:

$$Q_{\text{sıvı verir}} = mc(20) = 20mc$$

Katı ısınıyor:

m kütleli katı -20°C'den 0°C'ye gelir:

$$Q_{\text{katı alır}} = m \cdot \frac{c}{2} \cdot 20 = 10mc$$

Katının yarısı eriyor:

$$Q_{\text{erime}} = \frac{m}{2}L = \frac{m}{2}\lambda c$$

Isıtıcının verdiği enerji

Bu ilk evrenin süresine t_a diyelim:

$$Q_{\text{ısıtıcı}} = Pt_a$$

Enerji korunumu:

$$20mc + Pt_a = 10mc + \frac{m}{2}\lambda c$$

Buradan:

$$Pt_a = mc \left(\frac{\lambda}{2} - 10 \right)$$

0°C'de sabit kalan süre: t_1

Bu evrede sıcaklık değişmiyor, sadece kalan katı eriyor. Kalan katı miktarı: $\frac{m}{2}$

Bunun tamamen erimesi için gereken enerji:

$$Pt_1 = \frac{m}{2}L = \frac{m}{2}\lambda c$$

Dolayısıyla:

$$t_1 = \frac{m\lambda c}{2P}$$

Tüm katı eridikten sonra 0°C'den 20°C'ye çıkma

Artık toplam kütle: $2m$ ve tamamı sıvı.

0°C'den 20°C'ye ısıtmak için gereken enerji:

$$Q = (2m)c(20) = 40mc$$

Bu evrenin süresi t_b olsun:

$$Pt_b = 40mc$$
$$t_b = \frac{40mc}{P}$$

Toplam süre t_2

$$t_2 = t_a + t_1 + t_b$$

Şimdi hepsini t_1 cinsinden yazalım.

$$t_a/t_1$$

$$Pt_a = mc \left(\frac{\lambda}{2} - 10 \right) \Rightarrow t_a = \frac{mc}{P} \left(\frac{\lambda}{2} - 10 \right)$$
$$t_1 = \frac{m\lambda c}{2P}$$

Oran:

$$\frac{t_a}{t_1} = \frac{\frac{mc}{P} \left(\frac{\lambda}{2} - 10 \right)}{\frac{m\lambda c}{2P}} = \frac{\lambda - 20}{\lambda}$$

$$t_b/t_1$$

$$\frac{t_b}{t_1} = \frac{40mc/P}{m\lambda c/(2P)} = \frac{80}{\lambda}$$

O hâlde:

$$\frac{t_2}{t_1} = \frac{t_a + t_1 + t_b}{t_1} = \frac{t_a}{t_1} + 1 + \frac{t_b}{t_1}$$
$$\frac{t_2}{t_1} = \frac{\lambda - 20}{\lambda} + 1 + \frac{80}{\lambda}$$
$$\frac{t_2}{t_1} = 1 + \frac{\lambda + 60}{\lambda} = 2 + \frac{60}{\lambda}$$

$$\frac{t_2}{t_1} = 3$$

Dolayısıyla:

$$2 + \frac{60}{\lambda} = 3$$

$$\frac{60}{\lambda} = 1$$

$$\boxed{\lambda = 60}$$

Soru

Sürtünmesiz yatay düzlem üzerinde $2m$ kütleli yatayla α açısı yapan bir eğik düzlem durmaktadır. Eğik düzlemin eğik yüzeyi üzerinde, tepesine çok yakın bir noktada, m kütleli küçük bir cisim durmaktadır. Eğik düzlem başlangıçta serbesttir; yani zemin üzerinde sağa-sola hareket edebilir. Küçük cisme, eğik düzlem boyunca aşağı yönde çok kısa süreli bir darbe verilerek cisme eğik düzlem yüzeyine göre u hızı kazandırılıyor. Darbeden hemen sonra ise cisim eğik düzlem boyunca kaymaya başlıyor, aynı zamanda eğik düzlem de serbestçe hareket ediyor. Yüzeylerin hepsi sürtünmesizdir. Darbeden hemen sonra cismin yere göre hız büyüklüğünün eğik düzlemin yere göre hız büyüklüğüne oranı nedir?

- a) Hiçbiri
- b) $\sqrt{4 + 9\tan^2 \alpha}$
- c) $\sqrt{4\tan^2 \alpha + 9}$
- d) $\sqrt{4\cos^2 \alpha + 9\sin^2 \alpha}$
- e) $\sqrt{4\sin^2 \alpha + 9\cos^2 \alpha}$

Çözüm

Buradaki kritik nokta şu, darbeden hemen sonra dendiği için; sistem yatay doğrultuda dış kuvvet almaz. Bu yüzden yatay doğrultuda toplam momentum korunur. Ayrıca verilen u hızı, cismin eğik düzleme göre eğik düzlem doğrultusundaki hızıdır.

Eğik düzlemin yere göre yatay hızına V diyelim.

Küçük cismin eğik düzleme göre hızı eğik düzlem boyunca aşağı yönlü ve büyüklüğü u olduğuna göre, bunun bileşenleri:

- yatay bileşen: $u\cos \alpha$
- düşey bileşen: $u\sin \alpha$

Ancak cisim eğik düzlemde aşağı inerken sola mı sağa mı gidiyor? Şekli standart alalım: eğik düzlem sağa doğru yükseliyor olsun. O zaman aşağı kayış yönü sola-aşağı olur.

Dolayısıyla cismin eğik düzleme göre hız bileşenleri:

$$(-u\cos \alpha, -u\sin \alpha)$$

Eğik düzlem de yere göre V hızıyla yatay gidiyor olsun. O halde cismin yere göre hız bileşenleri:

$$(v_x, v_y) = (V - u\cos \alpha, -u\sin \alpha)$$

Başlangıçta sistem duruyordu. Darbe iç etki gibi düşünülduğünde toplam yatay momentum hemen sonra da sıfır olmalıdır. Toplam yatay momentum:

- eğik düzlem: $2mV$
- küçük cisim: $m(V - u \cos \alpha)$

Toplam sıfır:

$$2mV + m(V - u \cos \alpha) = 0$$

$$3V - u \cos \alpha = 0$$

$$V = \frac{u \cos \alpha}{3}$$

Bu eğik düzlemin sağa doğru hızıdır.

Şimdi cismin yere göre hız bileşenleri:

$$v_x = V - u \cos \alpha$$

$$v_x = \frac{u \cos \alpha}{3} - u \cos \alpha = -\frac{2u \cos \alpha}{3}$$

Ve $v_y = -u \sin \alpha$

Dolayısıyla hız büyüklüğü:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

$$v = \sqrt{\left(\frac{2u \cos \alpha}{3}\right)^2 + (u \sin \alpha)^2}$$

$$v = u \sqrt{\frac{4 \cos^2 \alpha}{9} + \sin^2 \alpha}$$

$$v = u \sqrt{\frac{4 \cos^2 \alpha + 9 \sin^2 \alpha}{9}}$$

$$v = \frac{u}{3} \sqrt{4 \cos^2 \alpha + 9 \sin^2 \alpha}$$

Sonuç: eğik düzlemin yere göre hızının büyüklüğü

$$V = \frac{u \cos \alpha}{3}$$

Küçük cismin yere göre hızının büyüklüğü

$$v = \frac{u}{3} \sqrt{4 \cos^2 \alpha + 9 \sin^2 \alpha}$$

Cevap: $\sqrt{4 + 9 \tan^2 \alpha}$

Soru

x -ekseni üzerinde sabit tutulan iki noktasal yük vardır. İlk yük $x = -a$ noktasında $+Q$ ve ikinci yük ise $x = +a$ noktasında $+4Q$ değerindedir. Bu iki yük arasında, x -ekseni üzerinde serbestçe ve sürtünmesizce hareket edebilen, kütlesi m ve yükü $+q$ olan küçük bir tanecik bulunmaktadır. Tanecik yalnızca x -ekseni boyunca hareket edebilmektedir. Tanecik başlangıçta $x = 0$ noktasında durgun halde bırakılıyor ve harekete geçiyor. Taneciğin harekete başladıktan sonra hızının ilk kez sıfır olduğu nokta orijinden ne kadar uzaktadır?

- a) $a/2$
- b) $3a/4$
- c) $3a/5$
- d) Hiçbiri
- e) $2a/3$

Çözüm

Dönüş noktasında hız tekrar sıfır olur. Yani toplam enerji yine başlangıçtaki enerjiye eşit olmalıdır:

$$U(x) = U(0) = 5 \frac{kQq}{a}$$

Potansiyel enerji ifadesini yazalım:

$$\begin{aligned} kQq \left(\frac{1}{x+a} + \frac{4}{a-x} \right) &= 5 \frac{kQq}{a} \\ \frac{1}{x+a} + \frac{4}{a-x} &= \frac{5}{a} \\ \frac{(a-x) + 4(x+a)}{(x+a)(a-x)} &= \frac{5}{a} \\ \frac{a-x+4x+4a}{a^2-x^2} &= \frac{5}{a} \\ \frac{5a+3x}{a^2-x^2} &= \frac{5}{a} \\ a(5a+3x) &= 5(a^2-x^2) \\ 5a^2+3ax &= 5a^2-5x^2 \\ 3ax &= -5x^2 \\ x(3a+5x) &= 0 \end{aligned}$$

Buradan iki kök gelir: $x = 0$ ve $x = -\frac{3a}{5}$

$x = 0$ başlangıç noktasıdır. Gerçek dönüş noktası soldaki diğer çözümdür: $x = -\frac{3a}{5}$

Soru

Yatay ve sürtünmesiz bir düzlemde, başlangıçta durmakta olan m kütleli bir cisme sabit güç veren bir motor bağlanmıştır. Motor çalıştığı sürece cisme sürekli P gücü aktarır. Bu cisim yol üzerinde durmakta olan özdeş M kütleli küçük cisimlerle art arda tam esnek olmayan merkezi çarpışmalar gerçekleştirmektedir. Her çarpışmadan sonra cisimler yapışarak birlikte hareket etmektedir. Başlangıç anı ile birinci çarpışma arasındaki süre, birinci ve ikinci çarpışma arasındaki süreye eşittir. Birinci çarpışmadan hemen önceki hız V_1 , ikinci çarpışmadan hemen önceki hız V_2 ise V_2/V_1 oranı aşağıdakilerden hangisidir?

a) $\sqrt{\frac{m}{m+M}}$

b) $\sqrt{\frac{m(2m+M)}{(m+M)^2}}$

c) $\frac{2m+M}{m+M}$

d) $\sqrt{\frac{2m+M}{m+M}}$

e) Hiçbiri

Çözüm

İlk çarpışmaya kadar geçen süreye t diyelim. Motor sabit güç verdiği için, bu sürede verilen enerji:

$$Pt = \frac{1}{2}mV_1^2 \quad (1)$$

Birinci çarpışma tam esnek olmayan çarpışma olduğundan momentum korunur. Çarpışmadan hemen sonraki ortak hız u olsun:

$$\begin{aligned} mV_1 &= (m + M)u \\ u &= \frac{m}{m + M}V_1 \end{aligned} \quad (2)$$

Birinci ve ikinci çarpışma arasındaki süre de yine t olduğundan, bu sürede motorun verdiği enerji yine Pt kadardır:

$$Pt = \frac{1}{2}(m + M)(V_2^2 - u^2) \quad (3)$$

Şimdi (1) ve (3)'ü eşitleyelim:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}mV_1^2 &= \frac{1}{2}(m + M)(V_2^2 - u^2) \\ mV_1^2 &= (m + M)(V_2^2 - u^2) \end{aligned} \quad (4)$$

(2)'den:

$$u^2 = \left(\frac{m}{m+M}\right)^2 V_1^2$$

Bunu (4)'te yerine yazalım:

$$\begin{aligned} mV_1^2 &= (m+M)V_2^2 - \frac{m^2}{m+M}V_1^2 \\ (m+M)V_2^2 &= \left(m + \frac{m^2}{m+M}\right)V_1^2 \\ (m+M)^2V_2^2 &= m(2m+M)V_1^2 \end{aligned}$$

Dolayısıyla

$$\left(\frac{V_2}{V_1}\right)^2 = \frac{m(2m+M)}{(m+M)^2}$$

Buradan

$$\boxed{\frac{V_2}{V_1} = \sqrt{\frac{m(2m+M)}{(m+M)^2}}}$$

Soru

Bir triatlon sporcusu doğrusal bir parkurda sırasıyla yüzme, bisiklet ve koşu etaplarını tamamlıyor.

Yüzme etabı: Sporcu yüzmeye durgun halden başlıyor ve sabit a ivmesiyle hızlanarak v hızına ulaşıyor. Daha sonra bu hızla sabit olarak yüzmeye devam ediyor. Yüzme etabının toplam süresi $6t$ oluyor.

Bisiklet etabı: Sporcu bisiklete, yüzme etabını bitirdiği v hızıyla başlıyor. Sabit a ivmesiyle hızlanarak $3v$ hızına ulaşıyor. Daha sonra bu hızla sabit olarak devam ediyor. Bisiklet etabının toplam süresi $5t$ oluyor.

Koşu etabı: Sporcu koşuya $3v$ hızıyla başlıyor ve sabit büyüklükte a ivmeyle yavaşlayarak v hızına düşüyor. Daha sonra bu hızla sabit devam edip bitiş çizgisine ulaşıyor. Koşu etabının toplam süresi $4t$ oluyor.

Yarışın sonunda sporcu toplamda $24vt$ yol almış oluyor. Parkur geçişlerinde bir süre kaybı olmadığını varsayarsak yüzme, bisiklet ve koşu etaplarının uzunlukları sırasıyla aşağıdakilerden hangisidir?

- a) $4vt$; $8vt$; $12vt$
- b) *Hiçbiri*
- c) $5vt$; $10vt$; $9vt$
- d) $4vt$; $9vt$; $11vt$
- e) $5vt$; $11vt$; $8vt$

Çözüm

Etapların her birinde yolu iki parçaya ayıralım: ivmeli bölüm ve sabit hızlı bölüm

Toplam yol: $S_y + S_b + S_k = 24vt$ olacak.

1) Yüzme etabı

Sporcu durgun başlayıp a ivmesiyle v hızına çıkıyor. Bu hızlanma süresi:

$$t_1 = \frac{v}{a}$$

Bu sürede aldığı yol:

$$x_1 = \frac{v^2}{2a}$$

Sonra kalan sürede sabit v ile gider. Toplam süre $6t$ olduğundan sabit hızlı kısmın süresi:

$$6t - \frac{v}{a}$$

Bu kısımda alınan yol:

$$x_2 = v \left(6t - \frac{v}{a} \right)$$

Dolayısıyla yüzme etabı:

$$\begin{aligned} S_y &= \frac{v^2}{2a} + v \left(6t - \frac{v}{a} \right) \\ S_y &= 6vt - \frac{v^2}{2a} \end{aligned} \quad (1)$$

2) Bisiklet etabı

Bisiklete v ile başlıyor, a ivmesiyle $3v$ 'ye çıkıyor. Hızlanma süresi:

$$t_2 = \frac{3v - v}{a} = \frac{2v}{a}$$

Bu sürede aldığı yol:

$$x_3 = \frac{v + 3v}{2} \cdot \frac{2v}{a} = \frac{4v}{2} \cdot \frac{2v}{a} = \frac{4v^2}{a}$$

Toplam süre $5t$, o halde sabit hızlı kısım süresi:

$$5t - \frac{2v}{a}$$

Bu kısımda alınan yol:

$$x_4 = 3v \left(5t - \frac{2v}{a} \right)$$

Toplam bisiklet etabı:

$$\begin{aligned} S_b &= \frac{4v^2}{a} + 3v \left(5t - \frac{2v}{a} \right) \\ S_b &= 15vt - \frac{2v^2}{a} \end{aligned} \quad (2)$$

3) Koşu etabı

Koşuya $3v$ ile başlıyor, sabit büyüklükte a ivmeyle yavaşlayıp v 'ye düşüyor. Yavaşlama süresi:

$$t_3 = \frac{3v - v}{a} = \frac{2v}{a}$$

Bu sürede aldığı yol:

$$x_5 = \frac{3v + v}{2} \cdot \frac{2v}{a} = \frac{4v}{2} \cdot \frac{2v}{a} = \frac{4v^2}{a}$$

Toplam süre $4t$, sabit hızlı bölüm süresi:

$$4t - \frac{2v}{a}$$

Bu bölümde alınan yol:

$$x_6 = v \left(4t - \frac{2v}{a} \right)$$

Toplam koşu etabı:

$$S_k = \frac{4v^2}{a} + v\left(4t - \frac{2v}{a}\right)$$
$$S_k = 4vt + \frac{2v^2}{a} \quad (3)$$

4) Toplam yol koşulu

$$S_y + S_b + S_k = 24vt$$

(1), (2), (3)'ü toplayalım:

$$\left(6vt - \frac{v^2}{2a}\right) + \left(15vt - \frac{2v^2}{a}\right) + \left(4vt + \frac{2v^2}{a}\right) = 24vt$$
$$25vt - \frac{v^2}{2a} = 24vt$$
$$vt = \frac{v^2}{2a}$$
$$\frac{v}{a} = 2t \quad (4)$$

şimdi bunu etap ifadelerinde kullanalım. Buradan

$$\frac{v^2}{a} = 2vt$$

5) Etap uzunlukları

Yüzme

$$S_y = 6vt - \frac{v^2}{2a}$$
$$S_y = 6vt - \frac{1}{2}(2vt) = 6vt - vt = 5vt$$

Bisiklet

$$S_b = 15vt - \frac{2v^2}{a}$$
$$S_b = 15vt - 2(2vt) = 15vt - 4vt = 11vt$$

Koşu

$$S_k = 4vt + \frac{2v^2}{a}$$
$$S_k = 4vt + 2(2vt) = 4vt + 4vt = 8vt$$

Sonuç

Yüzme, bisiklet ve koşu etaplarının uzunlukları sırasıyla $5vt$, $11vt$, $8vt$ olur.

Soru

Sürtünmesiz yatay zeminde kütlesi M olan bir eğik düzlem bulunmaktadır. Eğik düzlemin sol yüzü yatayla 53° , sağ yüzü yatayla 37° açı yapmaktadır. Sol eğik yüz üzerinde kütlesi m olan A cismi, sağ eğik yüz üzerinde yine kütlesi m olan B cismi vardır. Cisimler, eğik düzlemin tepesindeki sürtünmesiz küçük bir makaradan geçen, kütleli ve esnemez bir ip ile birbirine bağlanmıştır. Sistem hareket ederken, A ve B cisimlerinin eğik düzlem üzerindeki eğik düzleme göre olan ivme büyüklüğü a' olsun. Eğik düzlemin ise yere göre yatay ivmesinin büyüklüğü a olduğuna göre, a'/a oranı aşağıdakilerden hangisidir?

a) $\frac{5M+5m}{7m}$

b) Hiçbiri

c) $\frac{5M+5m}{2m}$

d) $\frac{5M+10m}{m}$

e) $\frac{5M+10m}{7m}$

Çözüm

Yatay doğrultuda sistem üzerine etki eden dış kuvvet yoktur. Bu yüzden sistemin kütle merkezinin yatay ivmesi sıfırdır.

A cisminin yatay ivmesi: Sol eğik yüz boyunca görel ivmenin yatay bileşeni sola doğrudur:

$$a' \cos 53^\circ = a' \cdot \frac{3}{5}$$

Bu yüzden $a_A = a - \frac{3a'}{5}$

B cisminin yatay ivmesi: Sağ eğik yüz boyunca görel ivmenin yatay bileşeni sağa doğrudur:

$$a' \cos 37^\circ = a' \cdot \frac{4}{5}$$

Bu yüzden $a_B = a - \frac{4a'}{5}$

Eğik düzlemin yatay ivmesi $a_K = a$

Şimdi tüm sistem için yatay doğrultuda:

$$ma_A + ma_B + Ma_K = 0$$
$$m \left(a - \frac{3a'}{5} \right) + m \left(a - \frac{4a'}{5} \right) + Ma = 0$$

$$(2m + M)a + \frac{7ma'}{5} = 0$$

Buradan:

$$a = -\frac{7ma'}{5(M + 2m)}$$

Sonuç: $5(M/m + 2) / 7$

Soru

Uzayda, buldukları noktaları birleştirdiğimizde bir kare oluşturan dört özdeş noktasal cisim bulunmaktadır. Her bir köşe cisminin kütlesi m , oluşturdukları karenin ise bir kenar uzunluğu a 'dır. Merkezde başka hiçbir cisim yokken bu dört cisim, kare biçimini bozmadan, karenin merkezi etrafında sabit açısal hızla dönmektedir. Bu durumda sistemin dolanım periyodu T_1 olmaktadır. Sonrasında ise karenin tam merkezine kütlesi M olan bir noktasal cisim yerleştiriliyor. Bu kez sistem yine kare biçimini bozmadan, karenin merkezi etrafında sabit açısal hızla dönüyor ve bu dört cismin dolanım periyodu T_2 oluyor. $T_1/T_2 = \sqrt{2}$ ise M/m oranı nedir?

- a) $\frac{\sqrt{2}+1}{4}$
- b) Hiçbiri
- c) $\frac{3\sqrt{2}+1}{2}$
- d) $\frac{2\sqrt{2}+3}{2}$
- e) $\frac{2\sqrt{2}+1}{4}$

Çözüm

Bir köşe cismini incelemek yeterlidir. Karenin merkezinden köşeye uzaklık: $r = \frac{a}{\sqrt{2}}$

Merkezde kütle yokken

Bir köşe cisimi üzerine diğer üç köşeden gelen kuvvetlerin bileşkesi daha önce bulduğumuz gibi merkeze doğrudur ve büyüklüğü:

$$F_{\text{köşe}} = \frac{Gm^2}{a^2} \left(\sqrt{2} + \frac{1}{2} \right)$$

Bu kuvvet merkezci kuvvete eşittir:

$$m\omega_1^2 \frac{a}{\sqrt{2}} = \frac{Gm^2}{a^2} \left(\sqrt{2} + \frac{1}{2} \right)$$

Buradan

$$\omega_1^2 = \frac{Gm}{a^3} \left(2 + \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

Merkezde M varken

Merkezdeki kütlelerin bir köşe cismine uyguladığı çekim kuvveti:

$$F_M = \frac{GMm}{(a/\sqrt{2})^2} = \frac{2GMm}{a^2}$$

Bu da merkeze doğrudur. Dolayısıyla toplam merkezci kuvvet:

$$m\omega_2^2 \frac{a}{\sqrt{2}} = \frac{Gm^2}{a^2} \left(\sqrt{2} + \frac{1}{2} \right) + \frac{2GMm}{a^2}$$

Buradan

$$\omega_2^2 = \frac{G}{a^3} \left[m \left(2 + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) + 2\sqrt{2} M \right]$$

Periyot oranı

$T = \frac{2\pi}{\omega}$ olduğundan

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{\omega_2}{\omega_1}$$

Verilen koşul: $\frac{T_1}{T_2} = \sqrt{2}$ demek ki $\frac{\omega_2}{\omega_1} = \sqrt{2}$ Karelerini alalım: $\frac{\omega_2^2}{\omega_1^2} = 2$

Şimdi ifadeleri yerine yazalım:

$$\begin{aligned} \frac{\frac{G}{a^3} \left[m \left(2 + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) + 2\sqrt{2} M \right]}{\frac{Gm}{a^3} \left(2 + \frac{\sqrt{2}}{2} \right)} &= 2 \\ \frac{m \left(2 + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) + 2\sqrt{2} M}{m \left(2 + \frac{\sqrt{2}}{2} \right)} &= 2 \\ 1 + \frac{2\sqrt{2} M}{m \left(2 + \frac{\sqrt{2}}{2} \right)} &= 2 \\ \frac{2\sqrt{2} M}{m \left(2 + \frac{\sqrt{2}}{2} \right)} &= 1 \\ \frac{M}{m} &= \frac{2 + \frac{\sqrt{2}}{2}}{2\sqrt{2}} \end{aligned}$$

Şimdi sadeleştirelim:

$$\begin{aligned} 2 + \frac{\sqrt{2}}{2} &= \frac{4 + \sqrt{2}}{2} \\ \frac{M}{m} &= \frac{4 + \sqrt{2}}{4\sqrt{2}} = \frac{1 + 2\sqrt{2}}{4} \end{aligned}$$

Soru

Yatay ve sürtünmesiz bir düzlem üzerinde, yarıçapları eşit olan üç özdeş düzgün disk bulunmaktadır. Disklerin her birinin kütlesi m 'dir. B ve C diskleri, başlangıçta hareketsiz olup aynı zamanda birbirine teğet olacak şekilde yan yana durmaktadır. Üçüncü disk A ise B ve C 'nin tam orta noktasına doğru, sistemin simetri eksenini boyunca v hızıyla gelmektedir. A diski, aynı anda hem B diski hem de C diski ile çarpışıyor. Tüm çarpışmalar tam esnek ve diskler pürüzsüz kabul ediliyor. Çarpışmadan sonra A diskinin hız büyüklüğü kaç v olur?

- a) $1/2$
- b) $1/3$
- c) $1/4$
- d) $1/5$
- e) Hiçbiri

Çözüm

Simetriden yararlanalım

Diskler özdeş ve sistem tam simetrik olduğundan:

- B ve C disklerinin çarpışma sonrası hız büyüklükleri eşit olur.
- A diski simetri eksenini üzerinde hareket etmeye devam eder.
- B ve C diskleri, merkezleri birleştiren doğrular boyunca gider.

Çarpışma anında merkezleri birleştirelim:

- A ile B merkezlerini birleştiren doğru,
- A ile C merkezlerini birleştiren doğru

bir eşkenar üçgen oluşturur. Dolayısıyla bu doğrular simetri eksenine 30° açı yapar.

Şimdi: A 'nın çarpışma sonrası hızını u_A , B ve C 'nin hız büyüklüğünü u olarak alalım.

Yön seçimi: A 'nın ilk hareket yönünü pozitif kabul edelim.

Momentumun korunumu

Yatay düzlem sürtünmesiz olduğundan dış kuvvet yok; dolayısıyla toplam momentum korunur.

Başlangıçta yalnız A hareketli: $p_{ilk} = mv$

Çarpışma sonrası:

- A : mu_A

- B ve C : her biri u hızına sahip ve simetri eksenine 30° açı yapıyor.

Bu yüzden B ve C 'nin simetri eksenine doğrultusundaki toplam momentumu: $2mu \cos 30^\circ$ olur. Dolayısıyla momentum korunumu:

$$mv = mu_A + 2mu \cos 30^\circ$$

$$v = u_A + 2u \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$v = u_A + \sqrt{3}u$$

Yani $u_A = v - \sqrt{3}u$ (1)

Enerjinin korunumu

Çarpışmalar tam esnek olduğundan toplam kinetik enerji korunur.

Başlangıçta:

$$E_{\text{ilk}} = \frac{1}{2}mv^2$$

Son durumda:

$$E_{\text{son}} = \frac{1}{2}mu_A^2 + 2 \cdot \frac{1}{2}mu^2$$

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mu_A^2 + mu^2$$

$$v^2 = u_A^2 + 2u^2 \quad (2)$$

Şimdi (1)'i (2)'de kullanalım:

$$v^2 = (v - \sqrt{3}u)^2 + 2u^2$$

$$v^2 = v^2 - 2\sqrt{3}vu + 3u^2 + 2u^2$$

$$0 = -2\sqrt{3}vu + 5u^2$$

$$u(5u - 2\sqrt{3}v) = 0$$

Sıfır olmayan fiziksel çözüm:

$$u = \frac{2\sqrt{3}}{5}v$$

Bunu (1)'de yerine yazalım:

$$u_A = v - \sqrt{3} \left(\frac{2\sqrt{3}}{5}v \right)$$

$$u_A = v - \frac{6}{5}v$$

$$u_A = -\frac{v}{5}$$

Eksi işaret çok önemli: A diski geri seker. Ama soruda bize hız büyüklüğü sorulduğu için cevabımız $1/5$ olacaktır.

Soru

Bir kenar uzunluğu a olan düzgün altıgenin köşelerine saat yönünde sırasıyla $+q, -2q, +3q, -4q, +5q, -6q$ yükleri yerleştirilmiştir. Altıgenin merkezine ise $+q$ yüklü bir tanecik yerleştiriliyor. Buna göre merkezdeki bu taneciğe etki eden net elektriksel kuvvetin büyüklüğü kaç $\frac{kq^2}{a^2}$ olur?

- a) $2\sqrt{3}$
- b) $4\sqrt{3}$
- c) $3\sqrt{3}$
- d) Hiçbiri
- e) $\sqrt{3}$

Çözüm

Yine düzgün altıgende: $R = a$

Her köşeden merkeze uzaklık aynı olduğundan, her bir kuvvetin büyüklüğü:

$$F_n = k \frac{|nq| \cdot q}{a^2} = |n| \frac{kq^2}{a^2}$$

Ancak **yön çok kritik**:

- Köşedeki yük **pozitifse** \rightarrow merkezdeki $+q$ 'yu iter \rightarrow **merkezden köşeye ters yönde**
- Köşedeki yük **negatifse** \rightarrow çeker \rightarrow **köşeye doğru**

Yani işaretler yönü değiştirir.

Açı yerleşimi

Köşeleri yine şu açılarla alalım:

$$0^\circ, 60^\circ, 120^\circ, 180^\circ, 240^\circ, 300^\circ$$

ve yükleri sırayla yerleştirelim:

Açı Yük Yön

0° $+q$ sola

60° $-2q$ o yöne

120° $+3q$ ters yöne

180° $-4q$ o yöne

Açı Yük Yön

240° +5q ters yöne

300° -6q o yöne

Vektörel yazım (kritik kısım)

Pratik yöntem: Her yük için katkı:

$$\vec{F}_i = - (\text{yük katsayısı}) \cdot \hat{r}_i \cdot \frac{kq^2}{a^2}$$

Burada işaret zaten yönü içeriyor.

Toplam:

$$\vec{F} = \frac{kq^2}{a^2} (-1\hat{r}_0 + 2\hat{r}_{60} - 3\hat{r}_{120} + 4\hat{r}_{180} - 5\hat{r}_{240} + 6\hat{r}_{300})$$

Bileşenlere ayırılım

x-bileşeni

$$\begin{aligned} F_x &= \frac{kq^2}{a^2} \left[-1(1) + 2\left(\frac{1}{2}\right) - 3\left(-\frac{1}{2}\right) + 4(-1) - 5\left(-\frac{1}{2}\right) + 6\left(\frac{1}{2}\right) \right] \\ &= \frac{kq^2}{a^2} [-1 + 1 + 1.5 - 4 + 2.5 + 3] = \frac{kq^2}{a^2} (3) \end{aligned}$$

y-bileşeni

$$\begin{aligned} F_y &= \frac{kq^2}{a^2} \left[0 + 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - 3\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 0 - 5\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 6\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \right] \\ &= \frac{kq^2}{a^2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} [2 - 3 + 5 - 6] \\ &= \frac{kq^2}{a^2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} (-2) = -\sqrt{3} \frac{kq^2}{a^2} \end{aligned}$$

Sonuç büyüklük

$$\begin{aligned} F &= \sqrt{F_x^2 + F_y^2} \\ &= \frac{kq^2}{a^2} \sqrt{3^2 + (\sqrt{3})^2} \\ &= \frac{kq^2}{a^2} \sqrt{9 + 3} \\ &= \frac{kq^2}{a^2} \cdot 2\sqrt{3} \end{aligned}$$

$$\boxed{F = 2\sqrt{3} \frac{kq^2}{a^2}}$$

Soru

Odak uzaklığı f olan ince kenarlı bir mercek, asal eksen üzerinde sabit durmaktadır. Merceğin sol tarafında, eksen üzerinde ve merceğe x uzaklıkta bulunan küçük bir cisim vardır ($x > f$). Merceğin sağ tarafına, eksene dik olacak şekilde bir düzlem ayna yerleştiriliyor. Cisimden çıkan ışınlar önce mercekten geçiyor, sonra düzlem aynadan yansıyor tekrar mercekten geçerek merceğin sol tarafında son bir görüntü oluşturuyor. Son görüntünün gerçek ve cismin boyunun 2 katı olması isteniyor. Buna göre, düzlem aynanın mercekten uzaklığı L 'nin ifadesi nedir?

a) $L = \frac{fx(3x-2f)}{2(x-f)(2x-f)}$

b) $L = \frac{fx(4x-3f)}{2(x-f)(2x-f)}$

c) $L = \frac{2fx}{2x-f}$

d) Hiçbiri

e) $L = \frac{fx(2x-f)}{2(x-f)^2}$

Çözüm

Süreç:

1. Cisim → Mercek (1. geçiş)
2. Işınlar aynaya çarpar → Düzlem ayna yansıması
3. Yansıyan ışınlar → Mercek (2. geçiş) → Son görüntü

Adım 1: 1. Mercek Geçişi

Cisim merceğin solunda, $u_1 = -x$

$$\frac{1}{v_1} - \frac{1}{u_1} = \frac{1}{f} \Rightarrow \frac{1}{v_1} + \frac{1}{x} = \frac{1}{f}$$

$$\frac{1}{v_1} = \frac{1}{f} - \frac{1}{x} = \frac{x-f}{fx}$$

$$v_1 = \frac{fx}{x-f}$$

$x > f$ olduğundan $v_1 > 0 \rightarrow$ görüntü merceğin **sağında**, gerçek.

1. büyütme:

$$m_1 = \frac{v_1}{u_1} = \frac{\frac{fx}{x-f}}{-x} = -\frac{f}{x-f}$$

(Negatif işaret: görüntü ters)

Adım 2: Düzlem Aynadan Yansıma

Düzlem ayna mercekten L uzaklıkta. Ara görüntünün aynaya uzaklığı:

$$d = L - v_1 = L - \frac{fx}{x-f}$$

Düzlem ayna: Görüntüyü aynaya göre simetrik konuma taşır. Yeni sanal nesne aynadan d uzaklıkta sağda oluşur. Bu sanal nesnenin **mercekten uzaklığı** (merceğin sağında):

$$u_2 = L + d = 2L - \frac{fx}{x-f}$$

Düzlem aynanın büyütmesi: $m_{ayna} = +1$ (boyutu değiştirmez, sadece yönü çevirir)

Adım 3: 2. Mercek Geçişi

Artık ışınlar **sağdan sola** gidiyor. Nesne merceğin **sağında** \rightarrow işaret kuralına göre $u_2 > 0$ (bu kez sağ taraf nesne tarafı). Ters yönde ilerleyen ışınlar için mercek formülü aynı kalır ama nesne sağda olduğundan:

$$\frac{1}{v_2} = \frac{1}{f} - \frac{1}{u_2}$$

Burada $v_2 > 0$ ise görüntü merceğin **solunda** yani gerçek son görüntü.

2. büyütme:

$$m_2 = -\frac{v_2}{u_2}$$

Adım 4: Toplam Büyütme Koşulu

$$m_{toplam} = m_1 \times m_{ayna} \times m_2 = \left(-\frac{f}{x-f} \right) (+1) \left(-\frac{v_2}{u_2} \right) = \frac{f \cdot v_2}{(x-f) \cdot u_2}$$

Son görüntünün **gerçek ve 2 kat büyük** olması $\rightarrow m_{toplam} = -2$ (gerçek görüntü ters olur)

$$\left| \frac{f \cdot v_2}{(x-f) \cdot u_2} \right| = 2$$

Adım 5: Görüntünün Cismin Üzerinde Oluşması Koşulu

Son görüntünün **merceğin solunda, cisimle aynı konumda** olmasını düşünelim. Bu durumda sistem tam olarak geri dönmeli yani $v_2 = x$ (merceğin solunda, cisimle aynı uzaklıkta).

Bu koşulu büyütmeyle birleştirelim. v_2 'yi hesaplayalım:

$$v_2 = \frac{f \cdot u_2}{u_2 - f}$$

Büyütme eşitliği:

$$\frac{f \cdot v_2}{(x - f) \cdot u_2} = 2 \Rightarrow v_2 = \frac{2(x - f) \cdot u_2}{f}$$

v_2 'nin iki ifadesini eşitleyelim:

$$\frac{f \cdot u_2}{u_2 - f} = \frac{2(x - f) \cdot u_2}{f}$$

$u_2 \neq 0$ olduğundan her iki tarafı u_2 'ye bölelim:

$$\begin{aligned} \frac{f}{u_2 - f} &= \frac{2(x - f)}{f} \\ f^2 &= 2(x - f)(u_2 - f) \\ u_2 - f &= \frac{f^2}{2(x - f)} \\ u_2 &= f + \frac{f^2}{2(x - f)} = \frac{2f(x - f) + f^2}{2(x - f)} = \frac{f(2x - f)}{2(x - f)} \end{aligned}$$

Adım 6: L'yi Bul

$u_2 = 2L - \frac{fx}{x-f}$ ifadesini kullanarak:

$$\begin{aligned} 2L - \frac{fx}{x - f} &= \frac{f(2x - f)}{2(x - f)} \\ 2L &= \frac{fx}{x - f} + \frac{f(2x - f)}{2(x - f)} \\ 2L &= \frac{2fx}{2(x - f)} + \frac{f(2x - f)}{2(x - f)} = \frac{2fx + f(2x - f)}{2(x - f)} \\ 2L &= \frac{2fx + 2fx - f^2}{2(x - f)} = \frac{4fx - f^2}{2(x - f)} = \frac{f(4x - f)}{2(x - f)} \end{aligned}$$

$$\boxed{L = \frac{f(4x - f)}{4(x - f)}}$$

Cevap: Hiçbiri