TÜRKİYE BİLİMSEL VE TEKNOLOJİK ARAŞTIRMA KURUMU
BİLİM İNSANI DESTEK PROGRAMLARI BAŞKANLIĞI

34. ULUSAL BİLİM OLİMPİYATLARI - 2026
BİRİNCİ AŞAMA SINAVI
ORTAOKUL MATEMATİK

Soru Kitapçığı Türü

A

16 Mayıs 2026 Cumartesi, 09.30-12.30

ÇÖZÜMLER

1. Bir $ABCD$ dışbükey dörtgeninde $s(\widehat{ABC}) = 90°$, $|AD| = |DC| = |CA| = 2$ ve $|AB| = 1$ ise, $|BD|$ kaçtır?

a) 2 b) $\sqrt{6}$ c) $\sqrt{7}$ d) $2\sqrt{2}$ e) 3

Cevap: $\sqrt{7}$. $|AC| = |CD| = |DA|$ olduğu için ACD üçgeni eşkenar üçgendir ve $s(\widehat{ACD}) = 60°$ olur. ABC dik üçgeninde $|AC| = 2 = 2|AB|$ olduğu için $s(\widehat{BCA}) = 30°$ olur. Bu durumda $s(\widehat{BCD}) = 90°$ olur ve Pisagor teoreminden $|BC| = \sqrt{3}$ ve $|BD| = \sqrt{7}$ bulunur.

2. A ve B rakamları için $\overline{19AB}$ ve $\overline{20BA}$ sayıları 4 basamaklı sayılar olmak üzere, $\overline{19AB}$ yılında doğan bir kişi $\overline{20BA}$ yılında B^A yaşında olduğuna göre $A + B$ kaçtır?

a) 5 b) 6 c) 7 d) 8 e) 11

Cevap 8. Verilen koşullara göre

$$100 - 9(A - B) = B^A$$

olmalıdır. Sol taraftaki ifade yalnızca $A - B = 4$ olduğunda bir tam kuvvete eşit olur ve bu durumda $B^A = 64$ olacağı için $B = 2$ ve $A = 6$ bulunur.

3. $x^3 - x^2 + 3x - 10 = 0$ denkleminin farklı x gerçel çözümlerinin toplamı kaçtır?

a) -2 b) -1 c) 0 d) 1 e) 2

Cevap 2. Verilen ifade $(x - 2)(x^2 + x + 5) = 0$ olarak yazılabilir. Her x gerçel sayısı için $x^2 + x + 5 > 0$ olduğundan dolayı $x - 2 = 0$ olmalıdır. Dolayısıyla tek çözüm $x = 2$ olur.

4. Bir öğretmen ve N öğrencinin katıldığı bir satranç turnuvasında her öğrenci ikilisi kendi aralarında tam olarak bir, öğretmen ise bazı öğrencilerle birer maç yapmıştır. Turnuvada yapılan toplam maç sayısı 61 olduğuna göre, öğretmenin bu turnuvada yaptığı maç sayısı kaçtır?

a) 3 b) 4 c) 5 d) 6 e) 7

Cevap: 6. $\binom{11}{2} = 55 < 61 < 66 = \binom{12}{2}$ olduğu için turnuvaya katılan öğrenci sayısı 11, öğretmenin yaptığı maç sayısı ise $61 - 55 = 6$ olmalıdır.

5. Bir $ABCD$ dikdörtgeninde $[AB]$ kenarı üzerinde K ve L noktaları $3|AK| = 4|KL| = 12|LB|$ olacak şekilde alınıyor. $[CD]$ kenarının orta noktası M olsun. MK ve ML doğrularının AC doğrusu ile kesişim noktaları sırasıyla S ve T olmak üzere, $\dfrac{|AC|}{|ST|}$ kaçtır?

a) $\dfrac{22}{3}$ b) $\dfrac{33}{5}$ c) $\dfrac{44}{7}$ d) $\dfrac{55}{8}$ e) $\dfrac{77}{9}$

Cevap: $\dfrac{22}{3}$. $|AK| = 4k$, $|KL| = 3k$, $|LB| = k$ olsun. Bu durumda $|CM| = 4k$ olur. T noktasından KL doğrusuna inilen dikmenin ayağı N olsun. Thales teoreminden $|KN| = \dfrac{12}{11}$ ve $|NL| = \dfrac{21}{11}$ bulunur. Bu durumda $\dfrac{|AC|}{|ST|} = \dfrac{8}{12/11} = \dfrac{22}{3}$ olarak bulunur.

6. $n + n^2 + n^3 + n^4$ sayısının 7 ile tam bölünmesini sağlayan kaç $1 \le n \le 2026$ pozitif tam sayısı vardır?

a) 288 b) 578 c) 868 d) 1008 e) 1158

Cevap 578. Sorudaki ifadeyi $n + n^2 + n^3 + n^4 = n(n + 1)(n^2 + 1)$ olarak çarpanlarına ayıralım. Bu sayının 7 ile bölünmesi için bu çarpanlardan en az birinin 7 ile bölünmesi gerekir. $n^2 + 1$ sayısı n sayısının hiçbir değeri için 7 ile bölünmez. Bu durumda n veya $n + 1$ sayılarından birinin 7 ile bölünebilmesi için $n \equiv 0, 6 \pmod 7$ olmalıdır. Dolayısıyla her ardışık 7 sayı arasında sorudaki koşulu sağlayan 2 sayı bulunur. $2023 = 7 \cdot 289$ olduğu için $1 \le n \le 2023$ aralığında $2 \cdot 289 = 578$ çözüm bulunur ve $n = 2024, 2025, 2026$ sayılarının hiçbiri sorudaki koşulu sağlamaz.

7. x ve y rasyonel sayıları $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{3 + \sqrt{5}}$ denklemini sağlıyorsa, x sayısının alabileceği farklı değerlerin toplamı kaçtır?

a) 3 b) $\dfrac{10}{3}$ c) 4 d) $\dfrac{13}{4}$ e) $\dfrac{8}{3}$

Cevap: 3. Her iki tarafın karesini alıp $x + y$ ifadesini sağ tarafa atalım ve yeniden iki tarafın karesini alalım:

$$4xy = (3 - x - y)^2 + 2(3 - x - y)\sqrt{5} + 25$$

Sol taraf rasyonel olduğu için sağ taraf da rasyonel olmalıdır ve buradan $x + y = 3$ bulunur. Bunu da yerine koyunca $xy = 5/4$ elde edilir. Bu denklem sistemini çözersek $x = 1/2$, $y = 5/2$ veya $x = 5/2$, $y = 1/2$ olabileceği bulunur. Böylece cevap $1/2 + 5/2 = 3$ olur.

8. Aslı ve Zehra sırayla hamle yaparak bir oyun oynuyorlar. Aslı ilk hamlesinde duvardaki $n \times n$ bir satranç tahtasının bazı birim karelerini kırmızı, kalanlarını ise mavi renge boyayarak bir resim çiziyor. Bundan sonra Zehra başlamak üzere sırası gelen oyuncu satranç tahtasının bir birim karesini seçiyor, seçilmiş birim karenin rengini kırmızıysa mavi, maviyse kırmızı yaparak yeni bir resim oluşturuyor. Kurallara göre, aynı resim iki kez oluşturulamıyor ve hamle yapamayan oyuncu oyunu kaybediyor. Bu oyun $n = 11$, 22, 34, 100 değerleri için birer kez oynanırsa Aslı bu oyunların kaçını kazanmayı garantileyebilir?

a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4

Cevap: 0. n sayısının her değeri için, Zehra oyunun en başında rastgele bir birim kare belirliyor her hamlesinde bu birim kareyi seçerek oyunu kazanmayı garantililiyor. Koşullara göre Aslı aynı birim kareyi hiçbir zaman seçemiyor ve oyun sonlu hamle sonucunda biteceği için Zehra oyunu kazanıyor.

9. Dar açılı bir ABC üçgeninde $[BC]$ kenarının orta noktası D olsun. $[AC]$ kenarı üzerinde yer alan bir E noktası için AD ve BE doğrularının kesişim noktası F olmak üzere, DEF üçgeninin alanı 16 ve ABF üçgeninin alanı 44 ise, AEF üçgeninin alanı kaçtır?

a) 10 b) 12 c) 14 d) 16 e) 18

Cevap: 12. $|BD| = |DC|$ olduğundan dolayı EBD ve EDC üçgenlerinin alanları birbirine eşittir. Bu durumda FBD üçgeninin alanını y ile gösterirsek, EDC üçgeninin alanı $y + 16$ olur. Yine $|BD| = |DC|$ olduğundan dolayı ABD ve ADC üçgenlerinin alanları birbirine eşittir. Bu durumda AEF üçgeninin alanını x ile gösterirsek, $y+44 = x+16+(y+16)$ olur ve $x = 12$ bulunur.

10. A, B, C rakamlar ve $\overline{A3B}$ ve $\overline{3C9}$ sayıları üç basamaklı sayılar olmak üzere, $\overline{A3B}$ ve $\overline{3C9}$ sayılarının farkı 55 ile bölünüyorsa, $A + B + C$ toplamı kaç farklı değer alabilir?

a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4

Cevap 2. 5 ile bölünme kuralından dolayı $\overline{3C9}$ sayısının 5 ile bölümünden kalan 4 olur, bu sebeple B sayısı 4 veya 9 olmalıdır. 11 ile bölünme kuralından dolayı $\overline{A3B}$ sayısının 11 ile bölümünden kalan $A+B-3$, ve $\overline{3C9}$ sayısının 11 ile bölümünden kalan $3+9-C$ dir. Yani $A+B-3 \equiv 12-C$

(mod 11) olmalıdır ve bu ifadeyi düzenlersek $A + B + C \equiv 4 \pmod{11}$ bulunur. $B = 4$ ise $A + C \equiv 0 \pmod{11}$ olur ve $A + C = 11$ ve $A + B + C = 15$ bulunur. $B = 9$ ise $A + C \equiv 6 \pmod{11}$ bulunur. $A+C = 17$ olursa $A+B+C = 26$ olur, $A+C = 6$ olursa $A+B+C = 15$ olur. Dolayısıyla $A + B + C$ nin alabileceği değerler 15 ve 26 olmak üzere 2 tanedir.

11. Beyaz kedinin su içme hızı siyah kedininkinin 5 katı, beyaz kedinin süt içme hızı ise siyah kedininkinin 3 katıdır. İlk gün bu iki kedinin önüne bir kase su ve bir tabak süt konuyor. Aynı anda beyaz kedi suyu, siyah kedi ise sütü içmeye başlıyor. Beyaz kedi kasedeki suyu bitirip siyah kediyle birlikte tabaktaki sütü içmeye başlıyor ve toplam 18 dakikalık süreç sonucunda tabaktaki süt de bitiyor. İkinci gün kedilerin önüne ilk gündekiyle aynı miktarda su içeren bir kase ve ilk gündekiyle aynı miktarda süt içeren bir tabak konuyor. Bu sefer aynı anda beyaz kedi sütü, siyah kedi ise suyu içmeye başlıyor. Beyaz kedi tabaktaki sütü bitirip siyah kediyle birlikte kasedeki suyu içmeye başlıyor ve toplam N dakikalık süreç sonucunda kasedeki su da bitiyor. Buna göre, N kaçtır?

a) 14 b) 16 c) 18 d) 20 e) 22

Cevap: 20. Beyaz kedinin tek başına kasedeki sütü ve tabaktaki sütü bitirme süreleri sırasıyla x ve y olsun. O halde ilk gün beyaz kedi suyu bitirene kadar siyah kedi sütün $\dfrac{x}{3y}$ lik kısmını bitirir ve sütün kalan $1-\dfrac{x}{3y}$ lik kısmını kediler $\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{3y}$ hızla birlikte toplam $x + \dfrac{1-x/3y}{1/y+1/3y} = \dfrac{3(x+y)}{4}$ dakikada bitirirler. Böylece $\dfrac{3(x+y)}{4} = 18$ ve $x+y = 24$ bulunur. İkinci gün su ve sütün tamamı benzer şekilde $y + \dfrac{1-y/5x}{1/x+1/5x} = \dfrac{5(x+y)}{6}$ dakikada biter. Buna göre,

$$N = \frac{5(x+y)}{6} = 24 \cdot \frac{5}{6} = 20$$

olur.

12. 18 takımın katıldığı bir futbol turnuvasında her takım ikilisi arasında tam olarak bir maç yapılmıştır. Her maçta kazanan takıma 3, kaybeden takıma 0, berabere kalan takımlardan her birine 1 puan veriliyor. En az 26 puan kazanan takımlara *başarılı* takım diyelim. Başarılı takım sayısı en fazla kaç olabilir?

a) 9 b) 11 c) 13 d) 15 e) 17

Cevap: 17. Her takım en fazla $3 \cdot 17 = 51$ puan kazanabilir. Turnuvada takım başına düşen ortalama puan en fazla $\dfrac{3 \cdot \binom{18}{2}}{18} = 25.5$ olduğundan başarılı takım sayısı 18 olamaz. Başarılı takım sayısının 17 olabileceğini gösterelim. Bir takım tüm maçlarını kaybetmiş olsun. Kalan 17 takımı bir çember etrafına dizelim ve her takım saat yönünde kendisinden sonra gelen ilk 8 takımı yenmiş olsun. Bu durumda tüm maçlarını kaybetmiş takım dışındaki her takım $3 \cdot 8 + 3 = 27$ puan kazanarak başarılı takım olacaktır.

13. Bir ABC dik üçgeninde $s(\widehat{ACB}) = 90°$, $|BC| = 30$ ve $|AC| = 60$ olsun. ABC üçgeninin çevrel çemberine A ve C noktalarında teğet olan doğruların kesişim noktası D olsun. BD ve AC doğrularının kesişim noktası E olmak üzere, $|EC|$ kaçtır?

a) 8 b) 9 c) 10 d) 12 e) 15

Cevap: 10. ABC üçgeninin çevrel çemberinin merkezi O olsun. OD doğrusu AC doğrusuna diktir ve $[AC]$ doğru parçasını ortalar. $[AC]$ doğru parçasının orta noktası F olsun. Thales teoreminden $|OF| = 15$, $|AF| = 30$ olur. DAO üçgeni bir dik üçgendir ve bu üçgende Öklid bağıntısından dolayı $|DF| = 60$ olur. $DF \parallel BC$ olduğundan dolayı DFE ve BCE üçgenleri benzerdir ve $|DF| = 60$, $|BC| = 30$ olduğundan dolayı benzerlik oranı 2 dir. Buradan $|EC| = 10$ bulunur.

14. $3^{26p-20} - 2^{20p-26}$ sayısının p ile bölünmesini sağlayan kaç farklı p asal sayısı vardır?

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) Hiçbiri

Cevap 4. $p \neq 2, 3$ olduğu açıktır. Böylece verilen ifadeyi 2^6 ile çarpabiliriz ve buradan

$$p \mid 3^{26p-20}2^6 - 2^{20p-20} = 6^6(3^{p-1})^{26} - (2^{p-1})^{20}$$

bulunur. Öte yandan, Küçük Fermat teoreminden dolayı $2^{p-1} \equiv 3^{p-1} \equiv 1 \pmod p$ olur ve böylece

$$p \mid 6^6 - 1 = (6^2 - 1)(6^4 + 6^2 + 1) = (6^2 - 1)(6^2 - 6 + 1)(6^2 + 6 + 1)$$

elde edilir. Böylece, $p \mid 35 \cdot 31 \cdot 43$ bulunur ve p sayısının alabileceği 5, 7, 31 ve 43 olur.

15. Anneleri son üç senenin başında çocukları Ayşe ile Zehra'ya yaşlarıyla doğru orantılı sayıda şeker vermiştir. Anneleri her sene verdiği toplam şeker miktarını bir önceki seneye göre yüzde 20 artırmıştır. Ayşe, Zehra'dan hem 2024 yılında hem de 2025 yılında 700 şeker fazla aldıysa, 2026 yılında Ayşe Zehra'dan kaç şeker fazla almıştır?

a) 700 b) 720 c) 750 d) 770 e) 780

Cevap 720. Ayşe ve Zehra'nın 2024 yılında yaşları sırasıyla x ve y olsun. Annelerinin 2024 yılında verdiği toplam şeker sayısı $100k$ olsun. Soruda verilen bilgilere göre, $100k = xm + ym$ ve $120k = (x+1)n + (y+1)n$ olacak şekilde m ve n pozitif tam sayıları vardır, buradan $20k = 2n + (x+y)(n-m)$ bulunur. Öte yandan, $mx - my = 700 = nx - ny$ olduğundan dolayı $m = n$ olmalıdır. Buradan $m = 10k = n$ ve dolayısıyla da $x+y = 10$ ve $k(x-y) = 70$ bulunur. 2026 yılında aldıkları toplam şeker sayısı $144k$ olacaktır ve bu şekerler $x+2$, $y+2$ sayılarıyla doğru orantılı olarak dağıtılacaktır. Bu durumda Ayşe ve Zehra'nın 2026 yılında aldıkları şeker sayıları arasındaki fark

$$\frac{144k((x+2)-(y+2))}{(x+2)+(y+2)} = \frac{144(k(x-y))}{x+y+4} = 720$$

olur.

16. $S = \{5, 6, 7, \ldots, n\}$ kümesindeki sayıların her biri kırmızı veya mavi renklerden birine boyanmıştır. S kümesindeki aynı renkli herhangi iki sayının çarpımı S kümesindeyse bu sayılardan farklı renktedir. S kümesindeki herhangi bir sayının karesi S kümesindeyse bu sayıdan farklı renktedir. Buna göre, n sayısının alabileceği en büyük değer kaçtır?

a) 624 b) 719 c) 1224 d) 4095 e) Hiçbiri

Cevap: 3124. $n = 3124$ için, $\{5, 6, \ldots, 24\}$ sayılarını mavi, $\{25, 26, \ldots, 624\}$ sayılarını kırmızı, $\{625, 626, \ldots, 3124\}$ sayılarını mavi renge boyarsak koşullar sağlanır. Şimdi de $n \geq 3125$ olamayacağını gösterelim. Genelliği bozmadan 5 sayısı mavi olsun. O zaman $25 = 5 \cdot 5$ sayısı kırmızı, $625 = 25 \cdot 25$ sayısı mavi ve $3125 = 5 \cdot 625$ sayısı kırmızı olacaktır. $5 \cdot 125 = 625$ olduğundan 125 sayısı kırmızı olmak zorundadır. Öte yandan, $25 \cdot 125 = 3125$ olduğundan 125 sayısı mavi olmak zorundadır, çelişki.

17. $[AB]$ kenarının uzunluğu 3 birim ve $[BC]$ kenarının uzunluğu 6 birim olan bir $ABCD$ dikdörtgeni ile merkezi A ve yarıçapı 6 birim olan bir çember verilmiştir. Bu çemberin içinde fakat bu dikdörtgenin dışında kalan bölgenin alanı kaç birimkaredir?

a) $33\pi - \dfrac{9\sqrt{3}}{2}$ b) $36\pi - 3\sqrt{3}$ c) $36\pi - \dfrac{16\sqrt{3}}{3}$ d) $33\pi - 9$ e) Hiçbiri

Cevap: $33\pi - \dfrac{9\sqrt{3}}{2}$. Çember ile $[BC]$ doğru parçasının kesişim noktası E olsun. $|AB| = 3$ ve $|AE| = 6$ olduğu için $s(\widehat{BEA}) = s(\widehat{EAD}) = 30^\circ$ olur. Dairenin alanı $36\pi^2$ dir, dikdörtgenin içinde kalan kısmı ABE üçgeni ve 30° lik bir daire diliminden oluştuğu için alanı $\dfrac{9\sqrt{3}}{2} + 3\pi$ olur. Bu durumda dikdörtgenin dışında kalan alan $36\pi - \left(\dfrac{9\sqrt{3}}{2} + 3\pi\right) = 33\pi - \dfrac{9\sqrt{3}}{2}$ olur.

18. $p^2 + 2q^2 = r^2$ denklemini sağlayan kaç farklı (p, q, r) sıralı asal sayı üçlüsü vardır?

a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4

Cevap 0. Tamkareler (mod 4)'te yalnızca 0 veya 1 olabileceği için, $r^2 - p^2 = 2q^2 \equiv 0, 1, 3 \pmod 4$ bulunur, q asal sayı olduğu için bu da yalnızca $q = 2$ için sağlanır. Dolayısıyla, $r^2 - q^2 = 8$ bulunur ve bu denklemi sağlayan tam sayılar yalnızca $r = 3$, $q = 1$ olabilir ancak 1 asal olmadığı için bu denklemin asal sayılarda çözümü yoktur.

19.

$$x^2 - 2x + \frac{16}{x^2} - \frac{8}{x} = 7$$

denklemini sağlayan farklı x gerçel sayılarının toplamı kaçtır?

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

Cevap 5. Soruda verilen denklemi

$$\left(x + \frac{4}{x}\right)^2 - 15 - 2\left(x + \frac{4}{x}\right) = 0$$

olarak düzenleyelim. $x + \dfrac{4}{x} = a$ olsun, bu durumda denklem $(a-5)(a+3) = 0$ haline gelir. Yani $a = 5$ veya $a = -3$ olabilir. $a = 5$ ise, $x + \dfrac{4}{x} = 5$ olur ve $x^2 - 5x + 4 = 0$ elde edilir. Buradan da $x = 1$ ve $x = 4$ çözümleri bulunur. $a = -3$ ise $x + \dfrac{4}{x} = -3$ olur ve $x^2 + 3x + 4 = 0$ elde edilir. Bu denklemin ise

x gerçel çözümü yoktur. Dolayısıyla tüm farklı gerçel köklerin toplamı 5 olur.

20. 5 satır ve 8 sütundan oluşan bir satranç tahtasının her birim karesine birer gerçel sayı yazılmıştır. Aynı satırda bulunan herhangi iki sayı birbirlerinden farklıdır ve her satır için bu satırda bulunan ve diğer hiçbir satırda bulunmayan tam olarak 3 sayı vardır. Buna göre, bu tahtaya en fazla kaç farklı sayı yazılmış olabilir?

a) 20 b) 23 c) 25 d) 27 e) 30

Cevap: 27. Her satırda, yalnızca bu satırda bulunan 3 sayı yazdığı için toplamda $5 \cdot 3 = 15$ tane yalnızca bir satırda bulunan sayı vardır. Kalan $40 - 15 = 25$ sayıdan her biri ise en az iki satırda yazılmalıdır. Demek ki bu tekrarlanan sayıların sayısı en fazla $\lfloor 25/2 \rfloor = 12$ olabilir. Buna göre, cevap en fazla $15 + 12 = 27$ olabilir. Şimdi de tam olarak 12 tane tekrarlanan sayının olduğu bir örnek verelim. Bu satırların ilk 5 karesini $\{1, 2, 3, 4, 5\}, \{1, 5, 6, 7, 8\}, \{2, 6, 9, 10, 12\}, \{3, 7, 9, 11, 12\}$ ve $\{4, 8, 10, 11, 12\}$ şeklinde dolduralım ve geriye kalan 15 kareye $13, 14, \ldots, 27$ sayılarını her sayı birer kere kullanılacak şekilde yazalım. Bu durumda tahtada toplam 27 farklı sayı bulunur ve istenen koşullar sağlanır.

21. Bir ABC üçgeninde $s(\widehat{BAC}) = 65^\circ$ ve $s(\widehat{ABC}) = 40^\circ$ olsun. $[BC$ ışını üzerinde ve $[BC]$ kenarı dışında bir D noktası ile $[AC]$ kenarı üzerinde bir E noktası $\dfrac{|AB|}{|BC|} = \dfrac{|ED|}{|CD|}$ olacak şekilde alınıyor. Buna göre, $s(\widehat{EDC})$ kaçtır?

a) 10° b) 15° c) 20° d) 25° e) 35°

Cevap: 10°. D noktasından geçen ve AC doğrusuna paralel olan doğrunun AB doğrusu ile kesiştiği nokta F olsun. Thales teoreminden $\dfrac{|AB|}{|BC|} = \dfrac{|AF|}{|CD|}$ bulunur. Soruda verilen eşitlik ile beraber $|ED| = |AF|$ bulunur. Bu durumda $AEDF$ dörtgeni ikizkenar yamuk olur. $s(\widehat{BAC}) = s(\widehat{AFD}) = s(\widehat{EDF}) = 65^\circ$ ve $s(\widehat{ACB}) = s(\widehat{FDC}) = 75^\circ$ olduğu için $s(\widehat{EDC}) = 75^\circ - 65^\circ = 10^\circ$ olur.

22. m pozitif tam sayısı $m + 22$ sayısının iki pozitif böleninin toplamına ve n pozitif tam sayısı $n + 24$ sayısının iki pozitif böleninin toplamına eşitse $m + n$ sayısının alabileceği en büyük değer kaçtır?

a) 210 b) 220 c) 230 d) 240 e) 250

Cevap: 230. $m+22$ sayısının sorudaki koşulu sağlayan iki bölenini alalım. Bu bölenlerin hiçbiri $m+22$ olamaz ve bu iki bölen aynı anda $\dfrac{m+22}{2}$ de olamaz. Buna göre, bu iki bölenin toplamı en fazla $\dfrac{m+22}{2}+\dfrac{m+22}{3}=\dfrac{5m+110}{6}$ olabilir. Bu durumda $m \le \dfrac{5m+110}{6}$ olmalıdır ve buradan $m \le 110$ bulunur. $110 = 66+44$ istenen koşulu sağladığından m sayısının alabileceği en büyük değer 110 olur. Benzer şekilde $n+24$ sayısının sorudaki koşulu sağlayan bölenlerinin hiçbiri $n+24$ olamaz ve bu iki bölen aynı anda $\dfrac{n+24}{2}$ olamaz. Buna göre, bu iki bölenin toplamı en fazla $\dfrac{n+24}{2}+\dfrac{n+24}{3}=\dfrac{5n+120}{6}$ olabilir. Bu durumda $n \le \dfrac{5n+120}{6}$ olmalıdır ve buradan $n \le 120$ bulunur. $120 = 72+48$ istenen koşulu sağladığından n sayısının alabileceği en büyük değer 120 olur. Buna göre, cevap $110+120=230$ olur.

23. $mn > 34m + 123n$ eşitsizliğini sağlayan (m,n) pozitif tam sayı ikililerine *güzel* ikili diyelim. K bir pozitif tam sayı olmak üzere, her güzel ikilinin K sayısından küçük olmayan en az bir elemanı varsa, K sayısının alabileceği en büyük değer kaçtır?

a) 89 b) 123 c) 140 d) 158 e) 162

Cevap: 158. Sorudaki eşitsizliği $(m-34)(n-123) > 34 \cdot 123$ şeklinde yazalım. m ve n sayılarının her ikisi de $34+123=157$ sayısından büyük değilse bu eşitsizlik sağlanamaz. $m=158$, $n=157$ ise eşitsizlik sağlanır, dolayısıyla K sayısının alabileceği en küçük değer 158 olur.

24. Bir masa üzerinde biri 31, biri 32, ..., biri 47 top içeren toplam 17 kutu bulunmaktadır. Her işlemde en az 16 top içeren bir kutu seçiliyor ve bu kutudan diğer kutuların her birine birer top aktarılıyor. Birkaç işlem sonucunda N top içeren bir kutu elde edilebiliyorsa, N en fazla kaç olabilir?

a) 423 b) 527 c) 543 d) 565 e) 647

Cevap: 543. Başlangıçta kutulardaki top sayıları ardışık olduğuna göre, bu sayıların 17 ile bölümünden kalanlar $0,1,2,\dots,16$ dır, yani hepsi birbirinden farklıdır. Her işlem sonucunda bu sayıların birine -16 diğerlerine 1 eklendiğine göre, bu kutulardaki top sayılarının 17 ile bölümünden kalanları değişmez ve hepsi birbirinden farklı olmaya devam eder. Buna göre, N sayısı en fazla $663-(0+1+\cdots+15)=543$ olabilir.

Bir kutuya hiç hamle yapılmazsa ve diğer kutuların hepsine yapılabildiği kadar hamle yapılırsa, en sonunda hiç hamle yapılmayan kutuda 543 top sayısına ulaşılacaktır.

25. Kenar uzunluğu 1 olan bir $ABCD$ karesi veriliyor. Merkezi A, yarıçapı 1 olan ve karenin iç bölgesinde yer alan çeyrek çember $\mathcal{C}_1$ olsun. Merkezi B, yarıçapı 1 olan ve karenin iç bölgesinde yer alan çeyrek çember $\mathcal{C}_2$ olsun. $\mathcal{C}_1$ çemberine içten teğet, $\mathcal{C}_2$ çemberine dıştan teğet ve karenin $[AD]$ kenarına teğet olan çemberin yarıçapı kaçtır?

a) $\dfrac{1}{8}$ b) $\dfrac{1}{5\sqrt{2}}$ c) $\dfrac{1}{7}$ d) $\dfrac{1}{4\sqrt{3}}$ e) $\dfrac{1}{6}$

Cevap: $\dfrac{1}{6}$. Soruda sorulan çemberin merkezi O ve yarıçapı r olsun. $|BO| = 1+r$ ve $|AO| = 1-r$ olur. AOB üçgeninde O noktasından inilen yüksekliğin uzunluğu h olmak üzere, $(1-r)^2-r^2 = h^2 = (1+r)^2-(1-r)^2$ olur. Buradan $1 = 6r$ ve dolayısıyla $r = \dfrac{1}{6}$ bulunur.

26. $N = 99, 100, 101, 102, 103$ sayılarından kaç tanesi için $a^2 + 34a + N = b^2$ denkleminin en az bir tane (a, b) tam sayı çözümü bulunur?

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

Cevap: 3. İfadeyi $(a + 17)^2 + N - 289 = b^2$ olarak yazalım. Bu durumda $N - 289 = b^2 - (a + 17)^2$ olur ve tamkareler (mod 4)'te yalnızca 0 veya 1 olabileceği için, $b^2 - (a + 17)^2 = N - 289 \equiv 0, 1, 3 \pmod 4$ olabilir, ve bu denklik koşulunun sağlanması halinde gerekli a ve b çözümleri bulunabilir. Bu durumda yalnızca $N = 100, 101, 102$ için çözüm bulunabilir.

27. x ve y gerçel sayıları, $x^2 + 5y^2 + 4xy + 2x - 2y = -10$ denklemini sağlıyorsa $x + y$ kaçtır?

a) -4 b) -2 c) 0 d) 2 e) 4

Cevap -4. Sorudaki denklemi yeniden düzenleyerek $(x+2y+1)^2+(y-3)^2 = 0$ elde ederiz. Bunun sağlanması için $y = 3$ ve $x + 2y = -1$ olmalıdır, buradan $x + y = -4$ bulunur.

28. Bir düzgün 101-genin her köşesine birer gerçel sayı yazılmıştır. Yazılan sayıların en küçüğü 1 ve en büyüğü M olsun. Bu 101-genin her kenarına, bu kenarın uç noktalarında bulunan iki sayının toplamı yazılıyor. Bu 101-genin kenarlarına yazılan en büyük ve en küçük sayının farkı 1 ise, M sayısının alabileceği en büyük değer kaçtır?

a) 3 b) 34 c) 51 d) 67 e) 101

Cevap: 51. İlk olarak, $M = 51$ için bir örnek verelim. Köşeleri saat yönünde $1, 2, \ldots, 101$ olarak numaralandıralım. $1, 3, 5, \ldots 101$ numaralı köşelere sırayla $1, 2, 3, \ldots, 51$ sayılarını, $2, 4, 6, \ldots, 100$ numaralı köşelere ise sırayla $50, 49, 48, \ldots, 2, 1$ sayılarını yazarsak koşullar sağlanmış olur.
Şimdi de M sayısının 51 den fazla olamayacağını gösterelim. Düzgün 101-genin üç ardışık köşesine yazılı sayılar a, b ve c ise $|(a+b)-(b+c)| = |a-c| \leq 1$ olacaktır. Buna göre, 101-genin 1 yazılı köşesinden başlayıp saat yönünde birer köşe atlayarak ilerlersek tek numaralı köşelerdeki sayıların en fazla 51 olduğu görülür. Benzer şekilde 101-genin 1 yazılı köşesinden başlayıp saat yönünün tersine doğru birer köşe atlayarak ilerlersek çift numaralı köşelerdeki sayıların en fazla 51 olduğu görülür.

29. Bir ABC üçgeninde $|AB| = |AC|$ ve $s(\widehat{BAC}) = 36°$ olsun. ABC üçgeninin iç bölgesindeki bir P noktası için $s(\widehat{APB}) = 108°$ ve $s(\widehat{APC}) = 90°$ olsun. AP ile BC doğrularının kesişim noktası D olmak üzere, $\dfrac{|CD|}{|BD|}$ kaçtır?

a) $\sqrt{2}$ b) 2 c) $\sqrt{5}$ d) 3 e) Hiçbiri

Cevap 2. $[BC]$ kenarının orta noktası M, A noktasının M noktasına göre simetriği E olsun. AP doğrusunun BE doğrusu ile kesişimi N olsun. $APMC$ bir kirişler dörtgeni olduğundan $s(\widehat{MPC}) = 18°$ olur, buradan $s(\widehat{MPN}) = 72°$ olur. $s(\widehat{EBC}) = s(\widehat{ABC}) = 72°$ olduğundan $BPMN$ bir kirişler dörtgeni olur. Buradan $s(\widehat{BMN}) = s(\widehat{BPN}) = 180° - s(\widehat{APB}) = 72°$ olup, $|MN| = |BN|$ bulunur. $s(\widehat{BME}) = 90°$ olduğundan $|BN| = |NE|$ elde edilir, dolayısıyla D noktası ABE üçgeninin ağırlık merkezi olur. Buradan $|BD| = 2|DM|$ bulunur ve böylece $\dfrac{|CD|}{|BD|} = 2$ olur.

30. $p^2 + q + 5$ ve $21p - q^2 + 19$ sayılarının her ikisinin de asal sayı olmasını sağlayan kaç farklı (p, q) sıralı asal sayı ikilisi vardır?

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

Cevap 3. $q = 3$ ise, $p^2 + 8$ ve $21p + 10$ birer asal sayı olmalıdır. $p \neq 3$ ise $p^2 + 8$ ifadesi 3 ile bölündüğünden ve $p^2 + 8 = 3$ olamayacağından çözüm gelmez. $p = 3$ ise $p^2 + 8 = 17$ ve $21p + 10 = 73$ asal sayı olduğundan $(3, 3)$

ikilisi sorudaki koşulu sağlar. $q \neq 3$ ise, $21p - q^2 + 19$ ifadesi 3 ile tam bölünür, dolayısıyla 3'e eşit olmalıdır. Buradan $q \neq 3$ ise $21p = (q-4)(q+4)$ elde ederiz. p bir asal sayı olduğundan $q-4 \mid 21$ veya $q+4 \mid 21$ olmalıdır. Bu durumları incelersek, sadece $(p,q) = (13,17)$ ve $(p,q) = (5,11)$ olabileceği görülür. $(p,q) = (13,17)$ için $p^2 + q + 5 = 191$ ve $(p,q) = (5,11)$ için $p^2 + q + 5 = 41$ asal sayı olduğundan bu ikililerin her ikisi de soruda istenen koşulu sağlar. Böylece, sorudaki koşulu sağlayan (p,q) sıralı ikilileri $(3,3)$, $(13,17)$ ve $(5,11)$ olmak üzere 3 tanedir.

31. Bir $a_1, a_2, \ldots$ gerçel sayı dizisi, $a_1 = 1$ ve her $n \geq 1$ sayısı için

$$3na_{n+1}^2 + (4n+4)a_n^2 = (7n+3)a_n a_{n+1}$$

eşitliğini sağlıyor. Buna göre, a_{100} sayısının alabileceği en küçük değer kaçtır?

a) 100 b) $\frac{1600}{27}$ c) $\frac{729}{16}$ d) $\frac{1143}{32}$ e) Hiçbiri

Cevap $\frac{1600}{27}$. Soruda verilen koşulu

$$(na_{n+1} - (n+1)a_n)(3a_{n+1} - 4a_n) = 0$$

olarak düzenleyelim. Böylece $a_{n+1} = \frac{n+1}{n} a_n$ veya $a_{n+1} = \frac{4}{3} a_n$ olur. Bu durumda, a_{100} sayısının en küçük değerini alması için her n değerinde a_{n+1} sayısı bu iki değerden en küçük olanı almalıdır, bu da $n = 1, 2, 3$ için $a_{n+1} = \frac{4}{3} a_n$ ve $n \geq 4$ için $a_{n+1} = \frac{n+1}{n} a_n$ olduğunda sağlanır. Bu durumda a_{100} sayısının en küçük değeri

$$\frac{4}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{5}{4} \cdot \ldots \cdot \frac{100}{99} = \frac{1600}{27}$$

olur.

32. Aslı aklından 20 basamaklı bir sayı tutuyor ve Zehra'ya bu sayının her rakamının ya 1 ya da 2 olduğunu söylüyor. Zehra N tane 20 basamaklı sayıyı bir kağıda yazıp Aslı'ya iletiyor. Zehra'nın amacı yazdığı sayılardan en az biri ile Aslı'nın seçtiği sayının en az 11 basamağının aynı olmasıdır. N sayısının en küçük hangi değeri için Zehra bunu garantileyebilir?

a) 3 b) 4 c) 6 d) 8 e) 10

Cevap: 4. $N \leq 3$ olduğunu varsayalım. İlk iki basamak için 4 farklı seçenek vardır. Demek ki Zehra, yazdığı her sayı için iki basamaktan en fazla birinin Aslının seçtiği sayıdaki basamaklarla aynı olmasını garantileyebilir. Benzer şekilde, $k = 2, 3, \ldots, 10$ için, Zehra yazdığı her sayıdaki $(2k-1)$. ve $2k$. basamak ikililerinden en fazla birinin Aslının seçtiği sayıdaki basamaklarla aynı olmasını garantileyebilir. Sonuç olarak Zehra en fazla 3 sayı yazarsa, yazdığı sayıların hiçbirinin 11 basamağının Aslı'nın seçtiği sayı ile aynı olmasını garantileyemez. $N = 4$ için Zehra (11111111111111111111), (22222222222222222222), (11111111112222222222) ve (22222222221111111111) sayılarını yazsın. 1. ve 2. sayılar koşuları sağlamıyorsa, Aslının aklında tuttuğu sayının 10 basamağı 1 ve 10 basamağı 2 dir. O zaman 3. veya 4. sayıların birinin en az 11 basamağı Aslı'nın seçtiği sayı ile aynı olacaktır.