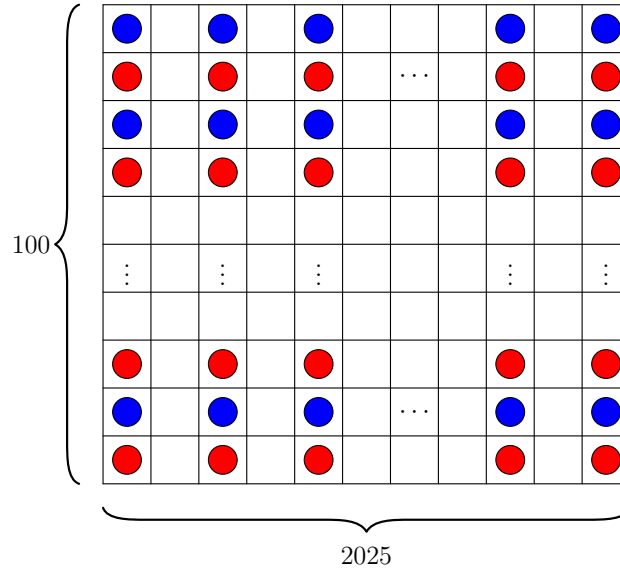


1. 100×2025 satranç tahtasının bazı birim karelerine kırmızı veya beyaz renkli bir bilye yerleştirilmiştir. Aynı renkli herhangi iki bilyenin bulundukları birim kareler ortak köşe veya kenar paylaşmıyorsa, tahtadaki toplam bilye sayısı en fazla kaç olabilir?

Çözüm: Birim karelerden oluşan 2×2 bir karede 3 bilye bulunursa bu bilyelerden en az ikisi aynı renkli olduğundan koşullar sağlanmaz. Sonuç olarak her 2×2 karede en fazla 2 bilye vardır. İlk sütun dışındaki birim kareleri $100 \cdot 2024$ tane 2×2 kareye ayıralım. O zaman toplam bilye sayısı en fazla $100 + 2 \cdot 50 \cdot 1012 = 101300$ olur. Şimdi de 101300 bilye için örnek verelim:



Soldan sağa doğru 1., 3., ..., 2025. sütunlardaki tüm birim karelere dönüşümlü şekilde bir kırmızı bir beyaz bilye yerleştirirsek koşullar sağlanır ve satranç tahtası üzerindeki toplam bilye sayısı $100 \cdot 1013 = 101300$ olur.

2. $1 \leq a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_{16} \leq 33$ gerçel sayılar olmak üzere,

$$P = \frac{a_1}{a_2} + \frac{a_3}{a_4} + \dots + \frac{a_{15}}{a_{16}}$$

ifadesinin alabileceği en küçük değeri bulunuz.

Çözüm: Cevap: $\frac{8}{\sqrt[8]{33}}$.

Aritmetik-Geometrik Ortalama Eşitsizliğini P ifadesindeki tüm terimlere uygularsak

$$P \geq 8 \sqrt[8]{\frac{a_1 a_3 \cdots a_{15}}{a_2 a_4 \cdots a_{16}}}$$

elde edilir. $a_1 \geq 1, a_3 \geq a_2, a_5 \geq a_4, \dots, a_{15} \geq a_{14}$ ve $33 \geq a_{16}$ olduğu için

$$P \geq 8 \sqrt[8]{\frac{a_1 a_3 \cdots a_{15}}{a_2 a_4 \cdots a_{16}}} \geq 8 \sqrt[8]{\frac{a_1}{a_{16}}} \geq 8 \sqrt[8]{\frac{1}{33}}$$

bulunur.

Eşitlik durumunun sağlanması için, kullandığımız tüm eşitsizlikler eşitlik durumunda olmalıdır. $t = \sqrt[8]{33}$ olsun.

$$(a_1, a_2, a_3, \dots, a_{16}) = (1, t, t, t^2, t^2, t^3, t^3, \dots, t^7, t^7, t^8)$$

sayıları bu durumu sağlar. Böylece, P sayısının alabileceği en küçük değer $\frac{8}{\sqrt[8]{33}}$ olur ve ispat tamamlanır.

3.

$$3n^3 - 7n^2 - 15n + 35$$

ifadesinin bir tam sayının karesine eşit olmasını sağlayan tüm n pozitif tam sayılarını bulunuz.

Çözüm: Cevap: 1 ve 2.

$n = 1$ için ifade 16, $n = 2$ için ifade 1 olur ve bu sayıların her ikisi de tamkaredir.

$n \geq 3$ olsun. $3n^3 - 7n^2 - 15n + 35 = (n^2 - 5)(3n - 7)$ olur. $n \geq 3$ olduğu için her iki çarpan da pozitiftir. $d = \text{ebob}(n^2 - 5, 3n - 7)$ olsun. Bu durumda

$$d \mid 9(n^2 - 5) - (3n - 7)(3n + 7) = 4$$

olduğu için $d = 1, d = 2$ veya $d = 4$ olmalıdır.

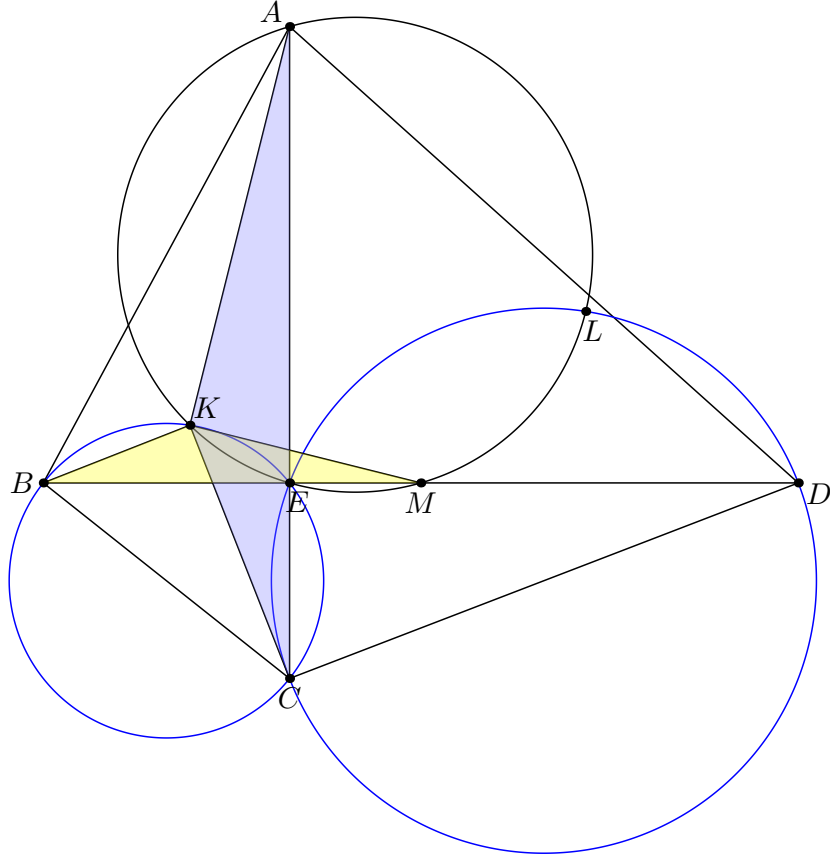
$d = 1$ veya $d = 4$ olursa, hem $n^2 - 5$ hem de $3n - 7$ tamkare olmalıdır. Ancak $3n - 7 \equiv 2 \pmod{3}$ olduğu için tamkare olamaz.

$d = 2$ ise, $n^2 - 5 = 2x^2$ ve $3n - 7 = 2y^2$ formunda olmalıdır. Bu durumda n tektir ve $2x^2 = n^2 - 5 \equiv 4 \pmod{8}$ bulunur. Buradan da $x^2 \equiv 2 \pmod{4}$ bulunur, ancak hiçbir tamkare bu koşulu sağlamaz.

Böylece, $n \geq 3$ için çözüm bulunmaz ve tüm çözümler $n = 1, 2$ olur.

4. Bir $ABCD$ dışbükey dörtgeninin köşegenleri birbirlerine diktir. $AC \cap BD = E$ ve $[BD]$ doğru parçasının orta noktası M olsun. AEM üçgeninin çevrel çemberi, BEC üçgeninin çevrel çemberiyle ikinci kez K noktasında ve DEC üçgeninin çevrel çemberiyle ikinci kez L noktasında kesişiyor. $|KM| = |LM|$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm:



B, K, E, C noktaları çembersel olduğu için $\angle KBE = \angle KCE$ bulunur. A, K, E, M noktaları çembersel olduğu için $\angle KAE = \angle KME$ bulunur. Böylece, BKM ve CKA üçgenlerinin tüm açıları eşit bulunur ve bu iki üçgen benzerdir, bu benzerlikten ötürü

$$\frac{|AC|}{|BM|} = \frac{|KM|}{|KA|}$$

elde edilir.

Benzer şekilde, DLM ve CLA üçgenleri de birbirlerine benzer bulunur ve

$$\frac{|AC|}{|DM|} = \frac{|LM|}{|LA|}$$

elde edilir. $|BM| = |DM|$ olduğu için, bu iki oran eşitliğinden

$$\frac{|KM|}{|KA|} = \frac{|LM|}{|LA|}$$

elde edilir.

A, K, E, M, L noktaları çembersel olduğundan ötürü $\angle AKM = \angle ALM = \angle AEM = 90^\circ$ olur. Kenar-Açı-Kenar benzerliğinden ötürü AKM ve ALM üçgenleri benzer bulunur. AM kenarı iki üçgende de ortak olarak aynı açının karşısında olduğu için bu üçgenler aslında eş üçgenler bulunur ve buradan $|KM| = |LM|$ elde edilir.