

34. Ulusal Bilim Olimpiyatları Birinci Aşama Sınavı - Matematik



TÜBİTAK

**TÜRKİYE BİLİMSEL VE TEKNOLOJİK ARAŞTIRMA KURUMU
BİLİM İNSANI DESTEK PROGRAMLARI BAŞKANLIĞI**

**34. ULUSAL BİLİM OLİMPİYATLARI - 2026
BİRİNCİ AŞAMA SINAVI
MATEMATİK**

Soru Kitapçığı Türü

A

16 Mayıs 2026 Cumartesi, 09.30-12.30

ÇÖZÜMLER

1. Bir ABC üçgeninde A köşesine ait kenarortay ile B köşesine ait iç açıortayın kesişim noktası P olsun. $BP \cap AC = \{D\}$ ve $CP \cap AB = \{E\}$ olmak üzere, $m(\widehat{BED}) = 120^\circ$ ve $|BD| = |BC|$ ise, $m(\widehat{ADB})$ açısı kaçtır?
- a) 90° b) 105° c) 120° d) 135° e) 150°

Cevap 105° . AP doğrusu $[BC]$ kenarının orta noktasından geçer, ABC üçgeninde P noktasından Ceva teoremi uygulanırsa $DE \parallel BC$ elde edilir. Dolayısıyla $|BE| = |DE|$ olur ve buradan $m(\widehat{DBC}) = m(\widehat{EDB}) = 30^\circ$ bulunur. $|BD| = |BC|$ olduğundan $m(\widehat{BDC}) = 75^\circ$ olur ve dolayısıyla $m(\widehat{ADB}) = 105^\circ$ bulunur.

2. Kaç farklı n pozitif tam sayısı için, n sayısının basamaklarının çarpımı $2n - 276$ olur?
- a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4

Cevap 2. İlk olarak, bir n pozitif tam sayısının basamakları çarpımının en fazla n olduğunu tümevarımla gösterelim. n sayısı bir basamaklı ise sağlanır. $n \geq 10$ ise $n = 10m + k$ yazarsak, $P(n) = k \cdot P(m)$ olur. $P(m) \leq m$ ise, $0 \leq k \leq 9$ olacağından $P(n) \leq mk \leq 9m \leq 10m + k = n$ bulunur ve istenen gösterilmiş olur. Böylece, $0 \leq 2n - 276 \leq n$ bulunur ve buradan $138 \leq n \leq 276$ elde edilir. $n = \overline{1ab}$ formunda ise $ab = 200 + 20a + 2b - 276$ olacağından $(a - 2)(20 - b) = 36$ elde ederiz. a ve b birer rakam olduğundan $(a, b) = (4, 2)$ ve $(a, b) = (5, 8)$ çözümlerini buluruz. $n = \overline{2ab}$ formunda ise, $2ab = 400 + 20a + 2b - 276$ olacağından $(a - 1)(b - 10) = 72$ elde ederiz. a ve b birer rakam olduğundan çözüm olmadığı açıktır. Sonuç olarak sadece $n = 142$ ve $n = 158$ sağlar.

3. $x^2 = 24[x] - 117$ denklemini sağlayan kaç farklı x gerçel sayısı vardır? (Bir x gerçel sayısı için, $[x]$ ile x sayısından büyük olmayan en büyük tam sayı gösteriliyor.)
- a) 0 b) 2 c) 4 d) 6 e) 8

Cevap 8. $[x] = a$ olsun. Bu durumda, denklem $x^2 = 24a - 117$ haline gelir ve bunun sağlanması için gerek ve yeter koşul

$$a^2 \leq 24a - 117 < a^2 + 2a + 1$$

olmasıdır. Bu durumda $(a - 12)^2 \leq 27$ ve $(a - 11)^2 > 3$ bulunur. Bu koşulları sağlayan a pozitif tam sayıları 7, 8, 9, 13, 14, 15, 16 ve 17 dir.

Sonuç olarak soruda verilen denklemin x çözümleri ise bu a değerleri için sırasıyla $\sqrt{51}$, $\sqrt{75}$, $\sqrt{99}$, $\sqrt{195}$, $\sqrt{219}$, $\sqrt{243}$, $\sqrt{267}$, $\sqrt{291}$ olmak üzere 8 tanedir.

4. 101 özdeş top kırmızı, beyaz ve mavi renkli üç kutuya, her kutuda en az bir top bulunacak, herhangi iki kutudaki top sayıları farklı olacak ve kırmızı kutudaki top sayısı diğer kutulardaki top sayılarının her birinden daha fazla olacak şekilde kaç farklı biçimde yerleştirilebilir?

- a) 1500 b) 1520 c) 1550 d) 1580 e) 1600

Cevap: 1600. Toplar herhangi bir koşul olmadan $\binom{98+3-1}{3-1} = 4950$ şekilde yerleştirilebilir. 101 sayısı 3 ile bölünmediği için sadece iki kutuda eşit sayıda top bulunabilir. Bu durumda, iki kutuda eşit sayıda top varsa kutulardaki top sayıları $(k, k, 101 - 2k)$ olmalıdır ve k sayısı 50 farklı değer alabilir. Buna göre, tam olarak $3 \cdot 50 = 150$ yerleştirmede iki kutudaki top sayıları eşit olur. Son olarak, en fazla top içeren kutu için üç farklı seçenek bulunduğundan cevap $\frac{4950 - 150}{3} = 1600$ olur.

5. $|AB| < |AC|$ olan bir ABC üçgeninde A köşesine ait iç açıortay ve dış açıortayın BC doğrusu ile kesişim noktaları sırasıyla D ve E olmak üzere, $|AD| = 5$, $|AE| = 12$ ve $|CD| = \frac{13}{3}$ ise $|BE|$ kaçtır?

- a) $\frac{26}{3}$ b) $\frac{19}{2}$ c) $\frac{39}{4}$ d) 10 e) $\frac{52}{5}$

Cevap: $\frac{52}{5}$. İç açıortay ve dış açıortayın arasında kalan açı 90° olacağı için $\widehat{DAE} = 90^\circ$ olur ve Pisagordan $|DE| = 13$ gelir. $|BE| = x$ olsun. İç açıortay teoreminden $\frac{13-x}{13/3} = \frac{|AB|}{|AC|}$ gelir. Dış açıortay teoreminden $\frac{x}{13+13/3} = \frac{|AB|}{|AC|}$ gelir. Bu iki eşitlikten $\frac{x}{52/3} = \frac{13-x}{13/3}$ olur ve $x = \frac{52}{5}$ bulunur.

6. $a^3 + 54a + 55$ sayısının bir asal sayının tam kuvveti olmasını sağlayan kaç farklı a pozitif tam sayısı vardır?

- a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) Hiçbiri

Cevap: 1. $a^3 + 54a + 55 = (a+1)(a^2 - a + 55)$ olduğundan p bir asal sayı ve m, n birer tam sayı olmak üzere, $a+1 = p^m$ ve $a^2 - a + 55 = p^n$ olmalıdır.

a bir pozitif tam sayı olduğundan $n > m \geq 1$ olduğu açıktır. $m \geq 2$ ise $a \equiv -1 \pmod{p^2}$ olup, $a^2 - a + 55 \equiv 57 \pmod{p^2}$ elde edilir. Buradan $p^2 \mid 57$ olmalıdır, bu da mümkün değildir. Dolayısıyla, $a + 1$ bir asal sayı olmak üzere, $(a + 1)^n = a^2 - a + 55$ eşitliği sağlanmalıdır. $a \notin \{1, 2\}$ olduğu açıktır. Buradan, $n \geq 3$ ise $(a + 1)^n \geq (a + 1)^3 > a^2 - a + 55$ olup, çelişki elde edilir. $n = 2$ ise $(a + 1)^2 = a^2 - a + 55$ olur ve bu eşitliği yalnızca $a = 18$ sağlar. Sonuç olarak tek çözüm $a = 18$ bulunur.

7. $P(x) = x^3 - 3x + 1$ polinomunun kökleri x_1, x_2, x_3 olsun. $Q(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ polinomunun kökleri x_1^2, x_2^2, x_3^2 ise, $a + b + c$ kaçtır?

- a) -3 b) 0 c) 2 d) 5 e) Hiçbiri

Cevap 2. $P(x)$ polinomunda Vieta formüllerinden dolayı $x_1 + x_2 + x_3 = 0$, $x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = -3$, ve $x_1x_2x_3 = -1$ olur. $Q(x)$ polinomunda Vieta formüllerinden dolayı $a = -(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)$, $b = x_1^2x_2^2 + x_2^2x_3^2 + x_3^2x_1^2$ ve $c = -x_1^2x_2^2x_3^2$ olur. Buradan

$$-a = (x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1) = 6$$

$$b = (x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1)^2 - 2x_1x_2x_3(x_1 + x_2 + x_3) = 9$$

ve

$$-c = (x_1x_2x_3)^2 = 1$$

bulunur. Buna göre, $a + b + c = (-6) + 9 + (-1) = 2$ olur.

8. n öğrenciden oluşan bir sınıfta her A öğrencisi kendisinden farklı her B öğrencisine ya tam olarak 1 mesaj atmıştır ya da mesaj atmamıştır. Bu sınıftaki herhangi iki öğrenci birbirinden farklı sayıda mesaj atmıştır ve tüm öğrenciler eşit sayıda mesaj almıştır. Buna göre, n sayısı 23, 34, 65, 127, 2026 sayılarından kaçına eşit olabilir?

- a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4

Cevap: 3. Atılan toplam mesaj sayısı $0 + 1 + \dots + n - 1 = \frac{(n-1)n}{2}$ olduğuna göre, her öğrenci $\frac{n-1}{2}$ mesaj almıştır ve dolayısıyla n tek sayı olmak zorundadır. Şimdi de her n tek sayısı için koşulları sağlayan bir örnek verelim. $n = 3$ durumunda öğrenciler A_1, A_2 ve A_3 olmak üzere, A_1 öğrencisi A_2 ve A_3 e, A_2 öğrencisi sadece A_1 e mesaj atarsa ve A_3 öğrencisi kimseye mesaj atmazsa koşullar sağlanır. n öğrenci için bir örnek bulunduğunu varsayalım ve $n + 2$ için de bir örnek kuralım. A_1, A_2, \dots, A_n öğrencileri kendi aralarında n için koşulları sağlayan örnekteki gibi mesajlaşmış olsunlar. A_{n+1} kimseye mesaj atmasın ve A_{n+2} herkese mesaj atсын.

$A_1, \dots, A_{\frac{n-1}{2}}$ öğrencilerinin her biri A_{n+1} öğrencisine ve $A_{\frac{n+1}{2}}, \dots, A_n$ öğrencilerinin her biri A_{n+2} öğrencisine mesaj atsın. Bu durumda $n + 2$ için de koşulları sağlayan bir örnek vardır. Buna göre, n sayısı 23, 65 ve 127 değerlerini alabilir.

9. Tüm köşeleri aynı çember üzerinde yer alan bir $ABCDEFGH$ yedigeninde $AB \parallel CD$, $DG \parallel EF$ ve AC ile BE köşegenleri birbirlerine diktir. $m(\widehat{ABE}) = 37^\circ$ ve $m(\widehat{FAD}) = 26^\circ$ ise, $m(\widehat{ACF})$ kaçtır?

- a) 21° b) 23° c) 26° d) 27° e) 29°

Cevap 27° . Çember üzerindeki DE , EF ve GA yaylarının ölçüleri sırasıyla a , b , c olsun. $DG \parallel EF$ olduğu için FG yayının ölçüsü de a olur. $AB \parallel CD$ olduğu için BC yayının ölçüsü DA yayının ölçüsü olan $2a + b + c$ bulunur. $m(\widehat{ABE}) = 37^\circ$ olduğu için EA yayının ölçüsü 74° olur, yani $a + b + c = 74^\circ$ bulunur. AC ile BE doğruları birbirine dik olduğu için BC ve EA yaylarının ölçüleri toplamı 180° olur. Bu durumda BC yayının ölçüsü $180^\circ - 74^\circ = 106^\circ$ olur, yani $2a + b + c = 106^\circ$ bulunur. $m(\widehat{FAD}) = 26^\circ$ olduğu için DF yayının ölçüsü 52° olur, yani $a + b = 52^\circ$ bulunur. Buradan $c = 22^\circ$, $a = 32^\circ$ ve $b = 20^\circ$ bulunur. Bu durumda FA yayının ölçüsü $a + c = 54^\circ$ olur ve $m(\widehat{ACF})$ çevre açısının ölçüsü ise bu değer yarısı olan 27° olur.

10. $(x + y)(y + z)(z + x) = 10^8$ denklemini sağlayan kaç farklı (x, y, z) sıralı tam sayı üçlüsü vardır?

- a) 3780 b) 4320 c) 6300 d) 7560 e) 8100

Cevap 4320. $x + y = a$, $x + z = b$, $y + z = c$ sayıları belli olduktan sonra x, y, z sayıları da tek türlü belli olacağı için, x, y, z nin tam sayı olması için gerek ve yeter koşul a, b, c sayılarını $a + b + c$ sayılarını çift olacak şekilde seçmektir. Bu durumda, ya bu sayıların hepsi çifttir ya da tam olarak biri çifttir. $a = \pm 2^{m_1} 5^{n_1}$, $b = \pm 2^{m_2} 5^{n_2}$ ve $c = \pm 2^{m_3} 5^{n_3}$ olsun.

(i) Hepsi çiftse: $n_1 + n_2 + n_3 = 8$ ve $m_1 + m_2 + m_3 = 8$, $m_1, m_2, m_3 \geq 1$ olur. Bu durumda sağlayan toplam üçlü sayısı $\binom{10}{2} \binom{7}{2} = 945$ olur.

(ii) Tam olarak biri çiftse: $n_1 + n_2 + n_3 = 8$ ve m_1, m_2, m_3 sayılarından biri 8 diğer ikisi 0 olur. Bu durumda sağlayan toplam üçlü sayısı $3 \binom{10}{2} = 135$ olur.

Bu sayıların ± 1 işaretlerini de hepsinin çarpımı 1'e eşit olacak şekilde 4 farklı şekilde seçebiliriz. Yani toplam çözüm sayısı $4 \cdot 1080 = 4320$ olur.

11. a ve b gerçel sayılar olmak üzere, $P(x) = x^3 - 9x^2 + ax + b$ polinomunun bir aritmetik dizi oluşturan üç farklı gerçel kökü ve $Q(x) = x^3 + ax^2 + bx + 1$ polinomunun bir geometrik dizi oluşturan üç farklı gerçel kökü vardır. Buna göre, $a + b$ kaçtır?

- a) 27 b) 30 c) 32 d) 54 e) Hiçbiri

Cevap 27. $x^3 + ax^2 + bx + 1$ polinomunun kökleri u, du, d^2u olsun, Vieta formüllerinden $-adu = du^2(d^2 + d + 1) = b$ ve $(du)^3 = -1$ bulunur. $a, b \in \mathbb{R}$ olduğundan ya $a = b = 0$ ya da $du = -1$ ve $a = b$ elde edilir. Dolayısıyla her durumda $a = b$ olur. $x^3 - 9x^2 + ax + a$ polinomunun kökleri $t - s, t, t + s$ olsun, Vieta formüllerinden $3t = 9, 3t^2 - s^2 = a, t(t^2 - s^2) = -a$ bulunur. Buradan, $t = 3$ ve $a = \frac{27}{2}$ bulunur. $a = b = \frac{27}{2}$ eşitlikleri sağlandığında $x^3 - 9x^2 + \frac{27}{2}x + \frac{27}{2} = 0$ denkleminin kökleri $x_1 = \frac{6 - 3\sqrt{6}}{2}$, $x_2 = 3, x_3 = \frac{6 + 3\sqrt{6}}{2}$ ve $x^3 + \frac{27}{2}x^2 + \frac{27}{2}x + 1 = 0$ denkleminin kökleri $x_1 = \frac{-25 - \sqrt{609}}{4}, x_2 = -1, x_3 = \frac{-25 + \sqrt{609}}{4}$ olur. Dolayısıyla $a + b = 27$ olur.

12. Bir okuldaki 243 öğrenci 5 sorudan oluşan bir sınava girmiştir ve her öğrenci her bir sorudan ya 1, ya 2 ya da 3 puan almıştır. Herhangi iki öğrenci, en az bir soruda birbirinden farklı puan almıştır. Üç öğrenciden oluşan bir grupta, her soru için bu üç öğrencinin bu sorudan aldığı puanların toplamı 3 ile bölünüyorsa bu gruba *iyi* grup diyelim. Buna göre, bu öğrenciler arasından kaç farklı iyi grup seçilebilir?

- a) 9801 b) 9840 c) 9963 d) 10230 e) 10404

Cevap: 9801. Herhangi iki öğrenci aynı anda tam olarak bir iyi gruba dahildir, çünkü bu iyi gruptaki üçüncü öğrencinin puanları tek türlü belirlenir. Aynı grupta olan sıralı öğrenci üçlüsü sayısı $243 \cdot 242 \cdot 1 = 58806$ olduğundan cevap $58806/3! = 9801$ olur.

13. $|AB| = |BC|$ ve $|CD| = |DE|$ olan bir $ABCDE$ dışbükey beşgeninde $m(\widehat{ABC}) = 112^\circ, m(\widehat{BCD}) = 126^\circ, m(\widehat{DEA}) = 92^\circ$ ve $m(\widehat{BAD}) = 56^\circ$ ise $m(\widehat{BED})$ kaçtır?

- a) 44° b) 52° c) 56° d) 58° e) Hiçbiri

Cevap 58° . $m(\widehat{ABC}) = 112^\circ$ ve $|AB| = |BC|$ olduğundan dolayı $m(\widehat{ACB}) = 34^\circ$ bulunur, $m(\widehat{BCD}) = 126^\circ$ olduğundan dolayı $m(\widehat{ACD}) = 92^\circ$ bulunur. $m(\widehat{ACD}) = m(\widehat{AED})$ ve $|CD| = |DE|$ olduğundan $ACDE$ bir deltoid olur. $m(\widehat{BAD}) = 56^\circ$ olduğundan $m(\widehat{CAD}) = 22^\circ$ olur, $ACDE$ deltoid olduğundan $m(\widehat{EAD}) = 22^\circ$ ve $m(\widehat{AEC}) = 68^\circ$ bulunur. $m(\widehat{AEC}) = 180^\circ - m(\widehat{ABC})$ olduğundan $ABCE$ bir kirisler dörtgeni olur, $m(\widehat{AEB}) = m(\widehat{ACB}) = 34^\circ$ bulunur. Böylece, $m(\widehat{BED}) = m(\widehat{DEA}) - m(\widehat{AEB}) = 58^\circ$ bulunur.

14. Bir n pozitif tam sayısı için,

$$\frac{mn + 2m - 2n - 4}{m + n}$$

ifadesinin bir tam sayıya eşit olmasını sağlayan m tam sayılarının sayısını $f(n)$ ile gösterelim. $f(n)$ sayısı 2026, 2027, 2028, 2029, 2030 değerlerinden kaç tanesini alabilir?

- a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

Cevap: 2. Sorudaki koşul $m + n \mid mn + 2m - 2n - 4$ olmasına denktir. Aynı zamanda $m + n \mid (m + n)(n + 2)$ olduğu bilindiği için bu iki ifadeyi tarafa çıkarırsak

$$m + n \mid mn + 2m - 2n - 4 \iff m + n \mid n^2 + 4n + 4 = (n + 2)^2$$

bulunur. Böylece bunu sağlayan m tam sayılarının sayısı $(n + 2)^2$ sayısının tam bölen sayısına eşit, yani pozitif bölen sayısının 2 katı olur. Her tamkarenin tek sayıda pozitif böleni olduğu için $f(n)$ sayısı $4k + 2$ formundadır, ve her $k \geq 1$ sayısı için, p bir asal sayı olmak üzere $f(p^k - 2) = 4k + 2$ koşulu sağlanır. Dolayısıyla verilen sayılardan yalnızca 2026 ve 2030 sorudaki koşulu sağlar.

15. x bir gerçel sayı olmak üzere, $2x^4 + 12x^3 + 23x^2 + 15x - 3$ ifadesinin alabileceği en küçük değer kaçtır?

- a) $-\frac{49}{8}$ b) $-\frac{23}{4}$ c) $-\frac{91}{16}$ d) $-\frac{11}{2}$ e) -5

Cevap $-\frac{49}{8}$. Verilen ifadeyi $(2x^2 + 6x - 1)(x^2 + 3x + 3)$ olarak çarpanlarına ayıralım. $x^2 + 3x = a$ diyelim, bu durumda bu ifade $(2a - 1)(a + 3) =$

$2a^2 + 5a - 3$ olur.

$$2a^2 + 5a - 3 = 2a^2 + 5a + \frac{25}{8} - \frac{49}{8} = \left(a\sqrt{2} - \frac{5}{2\sqrt{2}}\right)^2 - \frac{49}{8} \geq -\frac{49}{8}$$

olduğu için bu ifadenin en küçük değeri $-\frac{49}{8}$ olur. Eşitlik $a = \frac{5}{4}$ durumunda sağlanır, bunun için de x sayısının $x^2 + 3x - \frac{5}{4} = 0$ denkleminin gerçel köklerinden birine eşit olması yeterlidir.

- 16.** Birbirinden farklı pozitif tam sayılardan oluşan bir a_1, a_2, \dots, a_{34} dizisinde; $1 \leq i < j \leq 34$ tam sayıları için a_i sayısı a_j sayılarının en az birinden büyük olacak şekilde bir $i < t < j$ tam sayısı bulunuyorsa, (a_i, a_j) ikilisine *iyi* ikili diyelim. Buna göre, bir dizideki iyi ikili sayısının alabileceği en küçük değer kaçtır?
- a) 490 b) 496 c) 502 d) 508 e) 512

Cevap: 496. Tümevarımla n farklı tam sayıdan oluşan bir dizide iyi ikili sayısının en az $\frac{(n-2)(n-3)}{2}$ olduğunu gösterelim. $n = 3$ durumu barizdir. $n + 1$ elemanlı bir dizide, en küçük elemanı diziden çıkarırsak tümevarım varsayımına göre bu elemanı içermeyen her iyi ikili, iyi ikili olarak kalacaktır. Dizinin en küçük elemanı ise kendi komşuları dışındaki her elemanla bir iyi ikili oluşturur ve bu iyi ikililerin sayısı en az $n - 2$ dir. Sonuç olarak en az $\frac{(n-2)(n-3)}{2} + n - 2 = \frac{(n-1)(n-2)}{2}$ iyi ikili vardır. $n = 34$ durumunda bu sayı 496 olur.

Şimdi de 496 için bir örnek verelim. $34, 32, 30, \dots, 2, 1, 3, \dots, 29, 31, 33$ dizisini alalım. Bu dizide $(34, 33), (32, 33), \dots, (4, 3), (3, 2)$ ikilileri ve komşu ikililer dışında tüm ikililer iyi ikilidir ve böylece toplam iyi ikili sayısı $\binom{34}{2} - 33 - 32 = 496$ dır.

- 17.** Tüm köşeleri aynı çember üzerinde yer alan bir $ABCDE$ beşgeninde AC ve BE köşegenlerinin kesişim noktası G olsun. $|AB| = |BC| = |CD| = |DE| = 6$ ve $|BG| = 4$ ise $|AC|$ kaçtır?
- a) $3\sqrt{10}$ b) $4\sqrt{6}$ c) 8 d) 10 e) Hiçbiri

Cevap: $3\sqrt{10}$. Çember üzerinde AB, BC, CD, DE yaylarını gören çevre açılar α olsun. Bu durumda $m(\widehat{EBD}) = m(\widehat{GCB}) = \alpha$ ve $m(\widehat{BED}) = m(\widehat{GBC}) = 2\alpha$ olur. Açılı-Açılı-Açılı benzerliğinden BED ve

CBG üçgenleri benzer bulunur. Bu benzerlikten $\frac{|BG|}{|DE|} = \frac{|BC|}{|BE|}$ elde edilir ve böylece $|BE| = 9$, dolayısıyla $|GE| = 5$ olur. Yine bu benzerlikten $\frac{|GC|}{|BD|} = \frac{|BG|}{|DE|} = \frac{2}{3}$ bulunur. $|GC| = 2k$ ve $|BD| = 3k$ olsun. $|AB| = |CD|$ olduğu için $ABCD$ dörtgeni ikizkenar yamuk olup $|AC| = |BD| = 3k$ olur. Buradan $|GA| = k$ bulunur. G noktasının bu çembere göre kuvvetine bakarsak $|GE| \cdot |GB| = |GA| \cdot |GC|$ olur. Buradan $5 \cdot 4 = k \cdot 2k$ ve $k = \sqrt{10}$ bulunur, dolayısıyla $|AC| = 3k = 3\sqrt{10}$ olur.

18. $9n^6 + 7n^5 - 1$ sayısının bir tamkare olmasını sağlayan kaç farklı n pozitif tam sayısı vardır?

a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4

Cevap 0. $n \equiv 0, 1, 2 \pmod{4}$ ise, $9n^6 + 7n^5 - 1 \equiv 3 \pmod{4}$ olur ve tamkare olamaz. $n \equiv 3 \pmod{4}$ olsun. $9n^6 + 7n^5 - 1 = x^2$ dersek, $n^5(9n + 7) = x^2 + 1$ elde ederiz. $p \equiv 3 \pmod{4}$ ve $p|n$ olan bir p asalı vardır. $p|x^2 + 1$ olacağından $p = 2$ veya $p \equiv 1 \pmod{4}$ olmalıdır, yine çelişki elde ederiz. Sonuç olarak çözüm yoktur.

19. $2x^2 - 3xy = 63$ eşitliğini sağlayan x ve y pozitif gerçel sayıları için, $5x - 7y$ ifadesinin alabileceği en küçük değer kaçtır?

a) 7 b) 8 c) 10 d) 12 e) Hiçbiri

Cevap 14. $2x^2 - 3xy = 63$ eşitliğini $y = \frac{2x}{3} - \frac{21}{x}$ şeklinde yazıp sorudaki ifadede yerine koyarsak $5x - 7y = \frac{x}{3} + \frac{147}{x}$ elde edilir. x bir pozitif gerçel sayı olduğuna göre, Aritmetik-Geometrik Ortalama eşitsizliğinden dolayı $\frac{x}{3} + \frac{147}{x}$ ifadesinin en küçük değeri

$$\frac{x}{3} + \frac{147}{x} \geq 2\sqrt{49} = 14$$

olarak bulunur. $x = 21$ ve $y = 13$ durumunda eşitlik sağlanır.

20. Bir sınıftaki N öğrencinin her biri, 6 günün her birinde şehirdeki 8 parktan birine gezmeye gitmiştir. Herhangi iki öğrenci için, bu iki öğrencinin aynı parka gitmediği en az 2 farklı gün vardır. Buna göre, N sayısının alabileceği en büyük değer kaçtır?

- a) $8^6 - 7^6$ b) $8^6 - 2 \cdot 7^6$ c) 6^6 d) 8^5 e) Hiçbiri

Cevap: 8^5 . $N > 8^5$ ise ilk 5 günde her gün aynı parka giden iki öğrenci bulunacaktır. Bu durumda bu iki öğrenci en fazla 1 gün farklı parklara gitmiş olabilir ve bu da sorudaki koşulla çelişir. Şimdi de $N = 8^5$ olabileceğini gösterelim. Parkları $0, 1, \dots, 7$ sayılarıyla özdeşleştirelim. Her öğrenci, bu parklara 6 günün sonunda gittikleri parklardaki sayıların toplamı 8'in katı olacak şekilde giderse farklı durum sayısı 8^5 olur, çünkü ilk 5 gün üzerinde herhangi bir kısıtlama yoktur ve son gün gidilecek park sayısı tek türlü belirlenir. Herhangi iki öğrenci herhangi 5 günde aynı parka gittiyse, her birinin toplamı 8'in katı olduğundan ötürü kalan günde de aynı parka gitmiş olurlardı, bu da ilk 5 gün gittikleri parkların numarasının farklı olmasıyla çelişirdi. Dolayısıyla bu örnek koşulları sağlar ve çözüm tamamlanır.

21. Bir ABC üçgeninin iç teğet çemberinin merkezi I , AI doğrusuna I noktasında dik olan doğrunun $[AB]$ ve $[AC]$ kenarlarıyla kesişim noktaları sırasıyla K ve L olsun. $BI \cap AC = \{D\}$ ve $CI \cap AB = \{E\}$ olmak üzere, $\frac{|BK|}{|KE|} = \frac{7}{9}$ ve $\frac{|CL|}{|LD|} = 3$ ise, $\frac{|IB|}{|IC|}$ kaçtır?

- a) $\frac{1}{3}$ b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{5}{7}$ d) $\frac{3}{4}$ e) $\frac{2}{3}$

Cevap $\frac{2}{3}$. AI iç açıortay olduğundan dolayı $|IK| = |IL|$ olur. $|BK| = 7k$, $|KE| = 9k$, $|CL| = 3m$, $|LD| = m$ diyelim. IBE ve KIE üçgenleri benzer olduğundan, $|IE| = 12k$ ve $\frac{|IK|}{|IB|} = \frac{12k}{16k} = \frac{3}{4}$ elde ederiz. Benzer şekilde,

ICD ve LID üçgenleri benzer olduğundan $|ID| = 2m$ ve $\frac{|IL|}{|IC|} = \frac{2m}{4m} = \frac{1}{2}$

olur. $|IK| = |IL|$ olduğundan, $\frac{|IB|}{|IC|} = \frac{2}{3}$ olur.

22. n bir pozitif tam sayı olmak üzere, $f(n)$ ile

$$\prod_{k=1}^n (k^2 - k + 1)$$

sayısının farklı asal bölenlerinin sayısını gösterelim. $f(n) = n - 2$ olmasını sağlayan kaç farklı n pozitif tam sayısı vardır?

- a) 4 b) 5 c) 6 d) 7 e) 8

Cevap: 5. $S_n = \prod_{k=1}^n (k^2 - k + 1)$ olsun. Her $p < n$ asalı, $k^2 - k + 1 \equiv 0 \pmod{p}$ formunda bir sayıyı bölüyorsa S_n yi böler, çünkü $k^2 - k + 1 \equiv 0 \pmod{p}$ denkleminin bir k çözümü varsa, p 'yi aşmayan bir k çözümü de vardır. Öte yandan, n 'den büyük iki farklı asal sayı S_n çarpımındaki aynı terimi bölemez, çünkü sayıların her ikisi de n 'den büyük olduğu için çarpımları n^2 'den büyük olur. Dolayısıyla, her yeni çarpan eklendiğinde $n - f(n)$ ya 1 artar ya da değişmez. $4 - f(4) = 1$, $5 - f(5) = \dots = 9 - f(9) = 2$ ve $10 - f(10) = 3$ olduğu için sorudaki koşulu sağlayan n değerleri yalnızca 5, 6, 7, 8 ve 9 olur.

23. Dört öğrenciden her biri tahtaya üç tane negatif olmayan gerçel sayı yazmıştır ve öğrencilerden her birinin yazdığı üç sayının toplamı 34 tür. Bu sayılar nasıl yazılmış olursa olsun tahtadaki 12 sayıdan farkları en fazla t olan ikisi bulunabiliyorsa, t sayısının alabileceği en küçük değer kaçtır?

- a) $\frac{9}{5}$ b) $\frac{17}{9}$ c) 2 d) 3 e) $\frac{34}{11}$

Cevap: 2. Öğrencilerin yazdıkları sayılar $(0, 16, 18)$, $(8, 12, 14)$, $(4, 10, 20)$ ve $(2, 6, 26)$ olursa $t \geq 2$ olduğu görülür. Şimdi de her durumda farkları en fazla 2 olan iki sayının bulunacağını gösterelim. Sayıları $x_0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_{11}$ şeklinde azalmayan sırada dizelim ve aksini varsayalım. Bu durumda, her $1 \leq i \leq 11$ için $x_i > 2i$ olmalıdır. i indislerinin toplamı 66 olduğu için bir öğrencinin yazdığı sayıların indislerinin toplamı en az 17 olacaktır ve sonuç olarak yazdığı sayıların toplamı $17 \cdot 2 = 34$ ten fazla olacaktır, çelişki. Dolayısıyla her zaman farkları en fazla 2 olan bir ikili bulunur.

24. Başlangıçta bir masa üzerinde N bilye içeren bir öbek bulunmaktadır. İki oyuncu sırayla hamle yaparak bir oyun oynuyorlar. Sırası gelen oyuncu masa üzerinde en az iki bilye içeren tüm öbekleri istediği şekilde boş olmayan iki öbeğe ayırıyor. Sırası geldiğinde masa üzerinde en az iki bilye içeren öbek kalmayan oyuncu oyunu kaybediyor. Bu oyun $N = 33, 50, 63, 120$ sayıları için birer kez oynanırsa, oyuna başlayan oyuncu bu oyunlardan kaçını kazanmayı garantileyebilir?

- a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4

Cevap: 3. Bir oyuncu hamle yapmadan önce masada en fazla bilye içeren öbekte $2^k - 1$ bilye varsa bu oyuncunun oyunu kazanmayı garantileyemeyeceğini gösterelim. Bu oyuncunun hamlesinden sonra en fazla bilye içeren öbekteki bilye sayısı $[2^{k-1}, 2^k - 2]$ aralığında olacaktır. Buna göre, diğer oyuncu en fazla bilye içeren öbekteki bilye sayısını $2^{k-1} - 1$ yapabilecek ve oyunu kazanacaktır. Benzer şekilde, bir oyuncu hamle

yapmadan önce masada en fazla bilye içeren öbekteki bilye sayısı $2^k - 1$ değilse, bu sayı $[2^m, 2^{m+1} - 2]$ aralığındadır ve hamle yapan oyuncu en fazla bilye içeren öbekteki bilye sayısını $2^m - 1$ yaparak oyunu kazanacaktır. Buna göre, bu oyuna $N = 63$ bilye ile başlanırsa oyuna başlayan oyuncu oyunu kaybedecektir ve geri kalan tüm durumlarda kazanacaktır.

25. Bir ABC dik üçgeninde $m(\widehat{ABC}) = 90^\circ$ olsun. B köşesinden $[AC]$ kenarına inilen yükseklik ayağı D ve $[AB]$ kenarının orta noktası E olsun. BD ile CE doğrularının kesişim noktası F olmak üzere, $\frac{|BC|}{|BF|} = \frac{7}{2}$ ise $\frac{|CD|}{|AD|}$ kaçtır?
- a) 2 b) $\frac{5}{2}$ c) 3 d) $\frac{7}{2}$ e) 4

Cevap: 3. $|BF| = 2k$ ve $|BC| = 7k$ olsun. A noktasından geçen ve BD doğrusuna paralel olan doğru ile CE ve BC doğrularının kesişim noktaları sırasıyla G ve H olsun. $AG \parallel BF$ ve $|AE| = |BE|$ olduğundan dolayı $|AG| = 2k$ olur. $GH \parallel BF$ olduğundan dolayı $\frac{|GH|}{|CH|} = \frac{|BF|}{|CB|} = \frac{2}{7}$ olur. $|GH| = 2kt$ ve $|CH| = 7kt$ olsun. Bu durumda $|BH| = 7kt - 7k$ olur. ACH üçgeninde Öklid bağıntılarını kullanarak $(2kt + 2k)^2 = 7kt(7kt - 7k)$ bulunur. Buradan $4t^2 + 8t + 4 = 49t^2 - 49t$ bulunur, dolayısıyla $45t^2 - 57t - 4 = (3t - 4)(15t + 1) = 0$ olur ve $t = \frac{4}{3}$ bulunur. Bu durumda $\frac{|CD|}{|AD|} = \frac{k}{kt - k} = \frac{1}{t - 1} = 3$ olur.

26. $d(n)$ ile n pozitif tam sayısının pozitif tam bölenlerinin sayısı gösterilmek üzere, $d(m^k) = 3 \cdot d(m)$ eşitliğini sağlayan en az bir k pozitif tam sayısının olmasını sağlayan ve asal olmayan m pozitif tam sayılarına *güzel* sayı diyelim. 2026 dan küçük kaç tane güzel sayı vardır?
- a) 12 b) 14 c) 16 d) 18 e) 20

Cevap 20. Öncelikle $a \geq 2$ bir tam sayı ve p bir asal sayı olmak üzere, $m = p^a$ güzel bir sayı ise, $ka + 1 = 3(a + 1)$ eşitliğini sağlayan bir k pozitif tam sayısı bulunmalıdır. $(k - 3)a = 2$ olduğundan $a = 2$ ve $k = 4$ olmalıdır. Dolayısıyla, bu formdaki 2026'dan küçük güzel sayılar

$$\{2^2, 3^2, 5^2, 7^2, 11^2, 13^2, 17^2, 19^2, 23^2, 29^2, 31^2, 37^2, 41^2, 43^2\}$$

olur. p ve q farklı asal sayılar olmak üzere, $m = p^a q^b$ güzel bir sayı ise, $\frac{ka + 1}{a + 1} \cdot \frac{kb + 1}{b + 1} = 3$ olmalıdır, dolayısıyla $(k^2 - 3)ab + (k - 3)(a + b) = 2$ eşitliğini sağlayan bir k pozitif tam sayısı bulunmalıdır. $k = 1$ için

eşitliğin sol tarafı negatif olur. $k \geq 3$ için $2 \geq 6ab$ olur ve çelişki elde ederiz. Dolayısıyla $k = 2$ olmalıdır, yani $ab - (a + b) = 2$ olur. Buradan $(a - 1)(b - 1) = 3$ bulunur, yani $m = p^4 q^2$ formunda olmalıdır. $p^2 q \leq 45$ olması gerektiğinden, bu formdaki 2026'dan küçük güzel sayılar

$$\{2^4 3^2, 2^4 5^2, 2^4 7^2, 2^4 11^2, 3^4 2^2, 3^4 5^2\}$$

olur. $r \geq 3$ olmak üzere, $m = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_r^{a_r}$ güzel bir sayı ise,

$$3 = \prod_{i=1}^r \frac{ka_i + 1}{a_i + 1} = \prod_{i=1}^r \left(1 + \frac{k-1}{1 + \frac{1}{a_i}} \right)$$

eşitliğini sağlayan en az bir k pozitif tam sayı olmalıdır. $k \geq 2$ olduğu açıktır. $1 + \frac{k-1}{1 + \frac{1}{a_i}} \geq \frac{3}{2}$ ve $\frac{3^3}{2^3} > 3$ olduğundan çelişki elde ederiz. Sonuç olarak, 2026 dan küçük güzel pozitif tam sayıların sayısı 20 dir.

- 27.** Kaç farklı p asal sayısı için, $P(20) = P(26) = p$ eşitliğini sağlayan ve en az bir tam sayı kökü bulunan tam sayı katsayılı bir P polinomu vardır?

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) Sonsuz çoklukta

Cevap 2. $P(20) = P(26) = p$ olduğundan, $P(x+23) = Q(x)(x-3)(x+3) + p$ olacak şekilde bir Q tam sayı katsayılı polinomu vardır. r bir tam sayı olmak üzere $P(r+23) = 0$ olsun. Yerine koyarsak, $Q(r) \neq 0$ ve $r^2 = 9 - \frac{p}{Q(r)}$ elde ederiz. p asal sayı olduğundan $9 - p = r^2$ ya da $9 + p = r^2$ olmalıdır. $9 - p = r^2$ ise sağlayan tek değer $p = 5$ olur. $9 + p = r^2$ ise, $(r-3)(r+3) = p$ olacağından $r = \pm 4$ ve $p = 7$ buluruz. $p = 5$ için $P(x) = (x-20)(x-26) + 5$ alırsak $P(20) = P(26) = 5$, $P(25) = 0$ ve $p = 7$ için $P(x) = -(x-20)(x-26) + 7$ alırsak $P(20) = P(26) = 7$, $P(27) = 0$ olur ve sorudaki koşullar sağlanır.

- 28.** Başlangıçta 33×34 satranç tahtasının her birim karesine ya 0 ya da 1 sayısı, ortak kenar paylaşan herhangi iki birim karedeki sayılar farklı olacak şekilde yazılmıştır. Her işlemde ortak kenar paylaşan iki birim kare seçiliyor ve bu birim karelerdeki sayıların her biri, 1 fazlasının 3 ile bölümünden kalanla değiştiriliyor. En az kaç işlem sonucunda, başlangıçta 0 yazılı tüm birim karelerde 1 ve 1 yazılı tüm birim karelerde 0 yazan duruma ulaşılabilir?

a) 561 b) 1056 c) 1122 d) 1156 e) Hiçbiri

Cevap: 1122. Başlangıçta 1 yazılı her birim kareye en az 2 kez işlem yapılmalıdır ve her işlemde başlangıçta 1 yazılı birim karelerden sadece

birindeki sayı değişmektedir. Buna göre, yapılması gereken işlem sayısı en az $\frac{33 \cdot 34}{2} \cdot 2 = 1122$ dir. Şimdi de 1122 işlem için bir örnek verelim. Tahtayı bir satırına 101 ve diğer satırına 010 yazılı 2×3 dikdörtgenlere ayıralım. Bu dikdörtgenin 101 yazan satırındaki birim kareler soldan sağa doğru a, b, c ve 010 yazan satırındaki birim kareler soldan sağa doğru d, e, f olsun. İşlemler her 2×3 dikdörtgen için (a, b) , (a, b) , (b, c) , (b, c) , (d, e) , (e, f) birim karelerine yapılırsa $\frac{33 \cdot 34}{6} \cdot 6 = 1122$ işlem sonucunda istenen duruma ulaşılır.

29. $|AB| > |BC|$ olan bir $ABCD$ dikdörtgeninde O_1 noktası $[AB]$ kenarı üstünde ve O_2 noktası $[CD]$ kenarı üstünde olmak üzere, O_1 merkezli ve B noktasından geçen çember ile O_2 merkezli ve D noktasından geçen çember $[AC]$ doğru parçası üzerindeki K ve L noktalarında kesişiyor. $|O_1B| = |O_2D| = |KL| = 2$ ise $|AO_1|$ kaçtır?

- a) $\sqrt{3} + 1$ b) $\sqrt{5} + 1$ c) $\sqrt{7} + 1$ d) 4 e) $\sqrt{11} + 1$

Cevap: $\sqrt{7} + 1$. $|AO_1| = |CO_2| = x$ olsun. O_1O_2 ve AC doğrularının kesişim noktası M olsun. Birbiriyle kesişen iki çemberin merkezlerinden geçen doğru bu iki çemberin ortak kirişine diktir ve bu kirişi ortalar, dolayısıyla $|KM| = |LM|$ olur. $|AO_1| = |CO_2|$ ve $AO_1 \parallel CO_2$ olduğundan dolayı $|MA| = |MC|$ ve dolayısıyla $|AK| = |CL|$ olur. Genelliği bozmadan K noktası A ve L noktaları arasında yer alsın. $|AK| = |LC| = y$ olsun. A noktasının O_1 merkezli çembere göre kuvvetinden $(x - 2)(x + 2) = y(y + 2)$ yani $x^2 - 4 = y^2 + 2y$ bulunur. $O_2M \perp AC$ olduğundan dolayı ADC ve O_2MC üçgenleri benzerdir. Bu benzerlikten dolayı $\frac{|O_2C|}{|CM|} = \frac{|AC|}{|CD|}$ olur ve buradan $\frac{x}{y + 1} = \frac{2(y + 1)}{x + 2}$ bulunur. Bu eşitliği taraf tarafa çarparak $x^2 + 2x = 2(y^2 + 2y + 1)$ elde edilir ve $y^2 + 2y = x^2 - 4$ olduğundan dolayı $x^2 + 2x = 2(x^2 - 4) + 2$ bulunur. Buradan da $x^2 - 2x = 6$ ve $x = \sqrt{7} + 1$ bulunur.

30. $(2^{2026})!$ sayısının en büyük tek tam sayı böleninin 32 ile bölümünden kalan kaçtır?

- a) 1 b) 9 c) 11 d) 15 e) Hiçbiri

Cevap: 11. k bir pozitif tam olmak üzere, $(4k + 1)(4k + 3) = 16k^2 + 16k + 3 = 16k(k + 1) + 3 \equiv 3 \pmod{32}$ olur. Dolayısıyla, ardışık herhangi 16 tek sayının çarpımını $(\text{mod } 32)$ 'de incelersek $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots 31 \equiv 3^8 \equiv 1 \pmod{32}$

bulunur. $(2^{2026})!$ sayısının en büyük tek böleni, bu faktöriyelin içindeki tüm çarpanların en büyük tek bölenlerinin çarpımına eşit olmalıdır. Bu çarpımı, her $0 \leq k \leq 2026$ için 2^k sayısına bölünen ve 2^{k+1} sayısına bölünmeyen terimlerin en büyük tek bölenlerinin çarpımlarına ayıralım. Her k sayısı için bu çarpım $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2^{2026-k} - 1)$ olur. Dolayısıyla, $k \leq 2021$ için ardışık 16'lıları gruplayarak çarparsak tüm gruplardan 1 kalanı elde ederiz. Geriye 2^{2022} ile bölünen terimlerden gelen $1 \cdot 3 \cdots 15 = 3^4$, 2^{2023} ile bölünen terimlerden gelen $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 3^2$, 2^{2024} ile bölünen terimlerden gelen $1 \cdot 3 = 3$ ve 2^{2025} ile 2^{2026} ile bölünen terimlerden gelen 1 kalır. Bunların çarpımı ise $(\text{mod } 32)$ 'de $3^7 \equiv 11 \pmod{32}$ bulunur.

- 31.** Bir a_1, a_2, \dots gerçel sayı dizisi $a_1 = 6$, $a_2 = 2028$ ve her $n \geq 3$ için $n(n+1)a_n = na_{n-1} - a_{n-2}$ olarak tanımlanıyor. Buna göre, $\frac{a_{2027}}{a_{2026}}$ kaçtır?

- a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{2026}{2025}$ c) 2 d) $\frac{2026}{3}$ e) Hiçbiri

Cevap $\frac{1}{2}$. Soruda verilen koşulu $n+1$ için yazarsak

$$(n+1)(n+2)a_{n+1} = (n+1)a_n - a_{n-1}$$

elde edilir. Bu eşitliği n ile genişletip soruda verilen eşitlik ile taraf tarafa toplarsak

$$n(n+1)(n+2)a_{n+1} = -a_{n-2}$$

elde edilir. Bu ifadeyi $n = 2025, 2022, \dots, 3$ için yazıp çarparsak

$$2027 \cdot 2026 \cdot \dots \cdot 3 \cdot a_{2026} = -a_1$$

ve benzer şekilde $n = 2026, 2023, \dots, 4$ için yazıp çarparsak

$$2028 \cdot 2027 \cdot \dots \cdot 4 \cdot a_{2027} = -a_2$$

elde edilir. Son olarak bu iki ifadeyi taraf tarafa bölersek $\frac{a_{2027}}{a_{2026}} = \frac{a_2}{a_1} \cdot \frac{3}{2028} = \frac{1}{2}$ bulunur.

- 32.** 120 cüceden her biri kimsenin bilmediği bir fıkra biliyor. Keloğlan'ın amacı her cücenin tüm fıkraları öğrenmesidir. Keloğlan k farklı günde birer parti düzenleyerek her partiye tüm cüceleri davet edecektir. Bir partiye katılan her cüce kendi fıkrasını ve o güne kadar öğrendiği tüm fıkraları partideki diğer cücelere aktaracaktır. Keloğlan, bu partileri düzenlemek için 10 gün belirliyor ve her cüceye bu 10 günün kaçının o cüce için uygun olduğunu soruyor. Cücelerden her biri kendisine uygun olan 7 günü Keloğlan'a iletiyor. Keloğlan her durumda 10 olası parti gününden k tanesinde parti düzenleyerek amacına ulaşabiliyorsa, k en az kaç olabilir?

34. Bilim Olimpiyatları Birinci Aşama Sınavı - Öğrenci - Matematik **A**

- a) 4 b) 5 c) 6 d) 7 e) 8

Cevap: 7. İlk önce 6 partinin yeterli olmadığını gösterelim. $\binom{10}{3} = 120$ olduğundan herhangi 3 gün için kalan 7 günü tercih eden bir cüce olduğunu varsayabiliriz. O zaman Keloğlan hangi 6 günü seçerse seçsin bu 6 günün ilk 3 gününü tercih etmeyen bir A cücesi ve son 3 gününü tercih etmeyen bir B cücesi bulunacaktır. Bu durumda A cücesi B cücesinin fıkrasını öğrenemeyecektir. $k = 7$ durumunda ise 7 gün nasıl seçilirse seçilsin herhangi iki cüce en az bir partiye birlikte katılacağına göre, Keloğlan amacına ulaşacaktır.