Türkiye Bilimsel ve Teknolojik Araştirma Kurumu

32. Ulusal Matematik Olimpiyatı
İkinci Aşama Sınavı

15-16 Aralık 2024

Çözümler

1. $n \geq 3$ bir pozitif tam sayı olmak üzere, n köşeli bir tam çizgenin her kenarına birer gerçel sayı aşağıdaki koşulları sağlayacak şekilde yazılmıştır:

(i) Çizgedeki her üçgenin kenarlarına yazılan sayılardan ikisi birbirine eşit olup diğer sayı ise bu sayılardan büyüktür.

(ii) Her köşenin *ağırlığı*, o köşeden çıkan kenarlara yazılan sayıların toplamı olmak üzere, tüm köşelerin ağırlıkları birbirlerine eşittir.

Buna göre, n sayısının alabileceği tüm değerleri bulunuz.

Çözüm: Cevap, 3'ten büyük tüm çift tam sayılar.

Şartları sağlayan bir n sayısına güzel diyelim. $[AB]$ doğru parçasında yazılı olan sayıyı $f(A, B)$ ile gösterelim

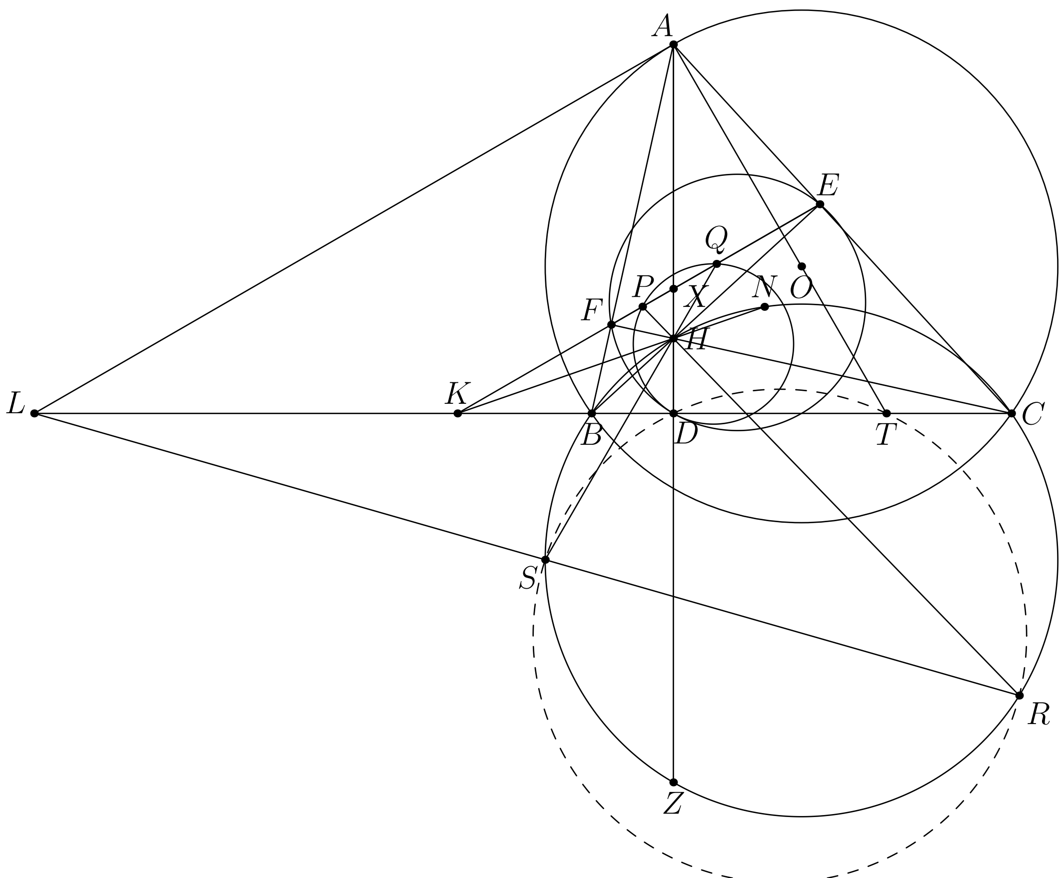
İddia 1: n güzelse $n+2$ de güzeldir.
İspat: n için şartları sağlayan bir konfigürasyon alalım. Buradaki noktaların kümesi V, yazılı olan en küçük sayı m ve bir nokta için ucu olduğu kenarlardaki sayıların toplamı T olsun. Konfigürasyona A ve B noktalarını ekleyelim. $f(A, B) = x$, her $v \in V$ ve her $u \in \{A, B\}$ için $f(v, u) = y$ olsun. $y < m$ ve $y < x$ olursa ilk koşul sağlanır. $S + 2y = x + ny$ olursa da ikinci koşul sağlanır. Bu da $S = x + (n-2)y$ olmasına denktir. x ve y'yi; $y < m$, $y < x$ ve $S = x + (n-2)y$ sağlanacak şekilde alabileceğimiz açıktır.

4'ün güzel olduğu kolayca görülür (bir karenin dört köşesini alıp doğru parçalarına gerçek uzunluklar yazılabilir). Dolayısıyla 3'ten büyük tüm çift sayılar güzeldir.

İddia 2: n güzelse n çifttir.
İspat: n için şartları sağlayan konfigürasyonda bir A noktası alalım. $\max f(A, x) = M$, $S = \{x : f(A, x) = M\}$ ve $B \in S$ olsun. İlk koşuldan dolayı $S \cup \{A\}$ dışındaki her C noktası için $f(C, A) = f(C, B)$'dir. Eğer $|S| \geq 2$ olsaydı, ilk koşuldan dolayı her $C \in S \setminus \{B\}$ için $f(B, C) > M = f(A, C)$ olurdu ve bu da A ve B noktalarından dolayı ikinci koşulla çelişirdi. O halde $|S| = 1$. B'ye A'nın özel noktası dersek, açıkça görüleceği üzere A da B'nin özel noktası olur. Böylece noktaları özel noktaları ile ikişerli gruplamak mümkün olmalı ve sonuç olarak n çift olmalı.

2. Dar açılı bir ABC üçgeninin diklik merkezi H ve A, B, C köşelerinden indirilen yüksekliklerin ayakları sırasıyla D, E, F olsun. DEF üçgeninin çevrel çemberine D noktasında teğet olan bir çemberin EF doğrusu ile kesiştiği noktalar P ve Q olsun. PH ve QH doğruları ile BHC üçgeninin çevrel çemberinin ikinci kesişim noktaları R ve S olsun. A noktasından geçen ve EF doğrusuna dik olan doğrunun BC doğrusu ile kesiştiği nokta T olsun. R, S, D, T noktalarının çemberdeş olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $AD \cap EF = X$ ve $EF \cap BC = K$ olsun. $\angle KDX = 90^\circ$ ve $\angle EDX = \angle FDX$ olduğu için $(K, X; F, E) = -1$ olur. (DEF) ve (DPQ) çemberleri teğet olduğundan $\angle PDX = \angle FDX - \angle FDP = \angle EDX - (\angle PQD - \angle FED) = \angle QDX$ olur ve bundan dolayı $(K, X; P, Q) = -1$ olur.
$(ABC) = \omega_1$, $(BHC) = \omega_2$, $XH \cap \omega_2 = Z$, $KH \cap \omega_2 = N$ ve $RS \cap BC = L$ olsun. $(K, X; F, E) \overset{H,\omega_2}{=} (N, Z; C, B) = -1$ ve $(K, X; P, Q) \overset{H,\omega_2}{=} (N, Z; R, S) = -1$ olduğu için N ve Z noktalarından ω_2 çemberine çizilen teğetler BC ve RS doğruları üzerinde kesişir. Yani LZ doğrusu ω_2 çemberine teğettir ve $LZ^2 = LA^2 = LR \cdot LS$ olur. $\angle LAT = 90^\circ$ ve $LA^2 = LD \cdot LT = LR \cdot LS$ olduğu için R, S, D, T noktaları çemberseldir.



3. Her $n \geq 2$ tam sayısı için $f(n)$ ile n sayısının farklı asal bölenlerinin çarpımını gösterelim (örneğin, $f(5) = 5, f(8) = 2$ ve $f(12) = 6$ olur). $a_1, a_2, \ldots$ dizisi, $a_1 \geq 2$ bir tam sayı ve her $n \geq 1$ için

$$a_{n+1} = a_n + f(a_n)$$

olacak şekilde tanımlanıyor. Her p asal sayısı için, $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$ dizisinde p ile bölünen bir terim bulunduğunu gösteriniz.

Çözüm: Hiçbir asal sayının karesine bölünmeyen pozitif tam sayılar kümesini P ile gösterelim.
Gözlem 1: q herhangi bir asal sayı olsun. $q|a_n \iff q|f(a_n)$ ve böylece $q|a_n \implies q|a_{n+1}$ ve $q|f(a_n) \implies q|f(a_{n+1})$. Bundan dolayı bu dizide bir terim q ile bölünürse o terimden itibaren tüm terimler q ile bölünür. Aynı durum $(f(a_n))_{n=1}^{\infty}$ dizisi için de geçerlidir ve her n için $f(a_n)|f(a_{n+1})$ her

n için geçerlidir.

Gözlem 2: $\left(\frac{f(a_{n+1})}{f(a_n)}\right)_{n=1}^{\infty}$ dizisinin her bir terimi P kümesinin elemanıdır ve $q|a_1$ ise bu dizide q ile bölünen hiçbir terim yoktur.

Gözlem 3: $f(a_n)|a$ olduğundan $a_{n+1} \leq 2a_n$ olur. Böylece her n pozitif tam sayısı için $a_{n+1} \leq 2^n a_1$ elde edilir.

Farzedelim ki bu dizide p ile bölünen terim yoktur.
Lemma: $f(a_n) = f(a_{n+1}) = \cdots = f(a_{n+p-2})$ olan n bulunmaz.
İspat: Farzedelim ki bulunsun. O halde

$$a_n, a_{n+1} = a_n + f(a_n), a_{n+2} = a_n + 2f(a_n), \ldots, a_{n+p-1} = a_n + (p-1)f(a_n)$$

sayılarından biri p ile bölünürdü, çelişki.

Gözlem 4: K sabit bir pozitif tam sayı olsun. Gözlem 1'den dolayı K'den küçük asal sayılardan dizinin en az bir terimini bölenler bir yerden sonra dizinin tüm terimlerini bölerler. Bundan ötürü bu yeri a_1 olarak varsayabiliriz ve dolayısıyla Gözlem 2'den ötürü $\left(\frac{f(a_{n+1})}{f(a_n)}\right)_{n=1}^{\infty}$ dizisinde K'den küçük bir asal ile bölünen terim bulunmaz.

Lemma ve Gözlem 4'ten her n pozitif tam sayısı için

$$\frac{f(a_{n+p-2})}{f(a_n)} \geq K$$

elde edilir. Buradan her m pozitif tam sayısı için $f(a_{1+m(p-2)}) \geq K^m f(a_1)$ bulunur. Böylelikle Gözlem 3 ile birlikte

$$f(a_1)K^m \leq f(a_{1+m(p-2)}) \leq 2^{m(p-2)}a_1$$

elde edilir. Ancak $K > 2^{p-2}$ alınırsa yeterince büyük m sayısı için eşitsizlik sağlanmaz ve çelişki elde edilir.

4. n bir pozitif tam sayı ve n sayısının tüm pozitif bölenleri $1 = d_1 < d_2 < \cdots < d_k = n$ olsun.

$$\begin{aligned} 2d_2 + d_4 + d_5 &= d_7 \\ d_3 d_6 d_7 &= n \\ (d_6 + d_7)^2 &= n + 1 \end{aligned}$$

eşitlikleri sağlanıyorsa, n sayısının alabileceği tüm değerleri bulunuz.

Çözüm: Sadece $n = 2024$ şartları sağlar.
n tekse, tüm bölenleri tektir ve ilk eşitlikte çelişki elde edilr. O halde n çift olmalı. O halde $n+1$ bir tek tam karedir ve dolayısıyla $8|n$ bulunur. Ayrıca AGO'dan $n + 1 > 4n/d_3$ olur ve açıkça $n > 2$ olduğundan da $d_3 \geq 4$ gelir. O halde $d_3 = 4$ olmalı. İkinci ve üçüncü eşitliklerden $d_6 = m, d_7 = m + 1$ ve $n = 4m(m + 1)$ gelir. $d_3 = 4$ olduğundan $d_4 \geq 5$, $d_5 \geq 6$ olur ve ilk eşitlikten $m \geq 14$ bulunur. $d_3 = 4$ olduğundan $3 \nmid n$ ve dolayısıyla $m \equiv 1 \pmod 3$ elde edilir. $m = 16$ iken ilk eşitlik sağlanmaz. O halde $m > 16$. m ve $m + 1$'den biri çifttir ve yarısı d_4 ve d_5'ten biridir. Benzer biçimde 8 de d_4 ve d_5'ten biridir. O halde ilk eşitlikten $m = 22$ veya $m = 23$ elde edilir. $m \equiv 1 \pmod 3$ olduğundan

$m = 22$ olur ve $n = 2024$ şartları sağlar.

5. Her $x, y, z \in \mathbb{R}^+$ için

$$\left\{\frac{f(x)}{f(y)}\right\} + \left\{\frac{f(y)}{f(z)}\right\} + \left\{\frac{f(z)}{f(x)}\right\} = \left\{\frac{x}{y}\right\} + \left\{\frac{y}{z}\right\} + \left\{\frac{z}{x}\right\}$$

denklemini sağlayan tüm $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ fonksiyonlarını bulunuz.

Not. Bir x gerçel sayısı için, $\lfloor x \rfloor$ sayısı x in tam değeri olmak üzere, $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$ olarak tanımlanıyor: $\{2.7\} = 0.7$ ve $\{4\} = 0$.

Çözüm: Cevap, tüm $c \in \mathbb{R}^+$ sayıları için $f(x) = cx$. Bu formdaki fonksiyonların soruda verilen denklemi sağladığı barizdir. Şimdi sorudaki koşulları sağlayan tüm fonksiyonların bu formda olduğunu gösterelim. x, y rastgele pozitif gerçel sayılar olsun, N bir pozitif tam sayı olmak üzere $z = Nx$ seçelim. Bu durumda eşitliğin sağ tarafı $\left\{\frac{x}{y}\right\} + \left\{\frac{y}{Nx}\right\}$ olacaktır. Sol taraftaki hiçbir terim negatif olmadığından dolayı tüm N değerlerinde $\left\{\frac{f(x)}{f(y)}\right\} \leq \left\{\frac{x}{y}\right\} + \left\{\frac{y}{Nx}\right\}$ eşitsizliği sağlanır. N sayısını istediğimiz kadar büyük seçebileceğimiz için, $\left\{\frac{y}{Nx}\right\}$ sayısını herhangi bir pozitif gerçel sayıdan daha küçük hale getirebiliriz. Bundan dolayı $\left\{\frac{f(x)}{f(y)}\right\} \leq \left\{\frac{x}{y}\right\}$ olmalıdır. Ancak x, y rastgele seçildiği için orijinal denklemde bu eşitsizliğin eşitlik durumunun sağlanması gerektiğini görürüz yani $\left\{\frac{f(x)}{f(y)}\right\} = \left\{\frac{x}{y}\right\}$ olmalıdır.

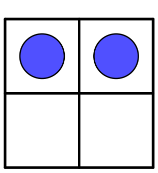
f sorudaki koşulu sağlayan bir fonksiyon ve c bir pozitif gerçel sayı olmak üzere, $g(x) = cf(x)$ fonksiyonu da sorudaki koşulu sağlayacağı için, genelliği bozmadan $f(1) = 1$ kabul edebiliriz. Böylece $\left\{\frac{f(x)}{f(y)}\right\} = \left\{\frac{x}{y}\right\}$ eşitliğinde $y = 1$ yazarsak her $x \in \mathbb{R}^+$ için $\{f(x)\} = \{x\}$ yani $f(x) - x \in \mathbb{Z}$ bulunur. Şimdi x, y gerçel sayılarını $x \notin \mathbb{Q}$ ve $y \in \mathbb{Q}$ olacak şekilde seçelim. m, n tam sayıları için $f(x) = x + m$ ve $f(y) = y + n$ olsun. Bu durumda, $\left\{\frac{f(x)}{f(y)}\right\} = \left\{\frac{x}{y}\right\}$ sağlandığından dolayı bir $k \in \mathbb{Z}$ için $\frac{x+m}{y+n} = \frac{x}{y} + k = \frac{x+yk}{y}$ olur. Buradan da $xy + my = xy + y^2k + xn + ykn$ yani $my = y^2k + xn + ykn$ bulunur, fakat x irrasyonel ve diğer sayılar rasyonel olduğu için $n = 0$ olması gerekir, yani tüm rasyonel sayılar için $f(y) = y$ olmalıdır. Öte yandan, tüm y seçimleri için $n = 0$ olduğundan, bir x sayısı için $m \neq 0$ ise tüm y seçimleri için $m = yk$ olması gerekir. Ancak m, k tam sayılarken y sayısını m sayısını bölmeyen bir tam sayı olarak seçersek bunun mümkün olmadığı görülür. Böylece $m = 0$ olmalıdır, yani tüm irrasyonel x sayıları için de $f(x) = x$ olur. Böylece $f(1) = 1$ iken sorudaki koşulu sağlayan tek fonksiyon $f(x) = x$ bulunur, yani sorudaki koşulu sağlayan tüm fonksiyonlar bir $c \in \mathbb{R}^+$ sayısı için $f(x) = cx$ formunda olmalıdır, böylece ispat tamamlanır.

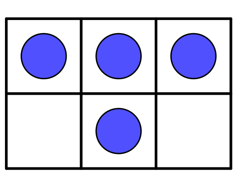
6. $m, n \geq 2$ tam sayılar olmak üzere, $m \times n$ satranç tahtasının bazı birim karelerine birer kale, her kale tek sayıda kale tarafından tehdit edilecek şekilde yerleştirilmiştir. Buna göre, satranç tahtasının üzerindeki kale sayısının alabileceği en büyük değeri bulunuz.

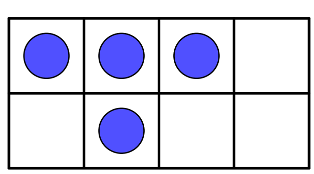
Çözüm: Cevap: $N(m, n)$, m satır ve n sütundan oluşan tahtaya yerleştirebilecek en büyük kale sayısı olmak üzere, $N(2, 2) = 2, N(2, 3) = 4$ ve tüm diğer durumlarda $N(m, n) = 2m + 2n - 8$.

Örnekler:

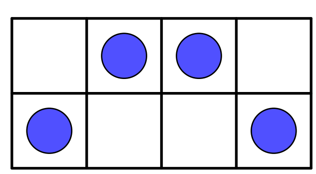
$m = 2$ için

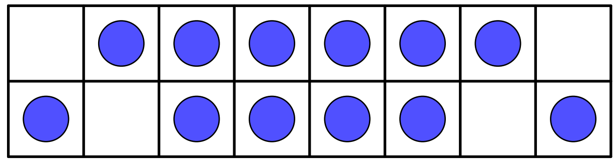




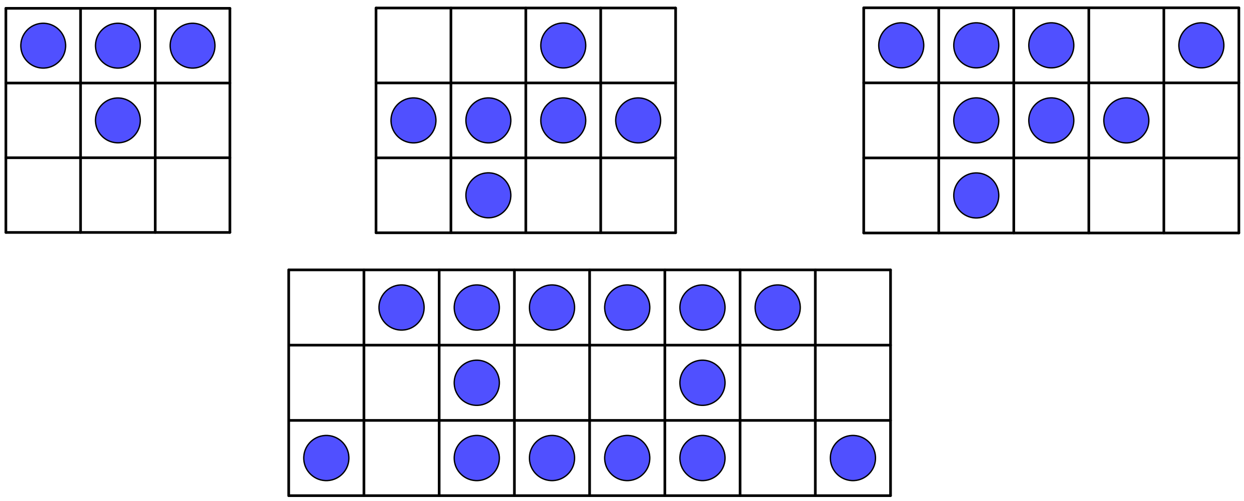


veya

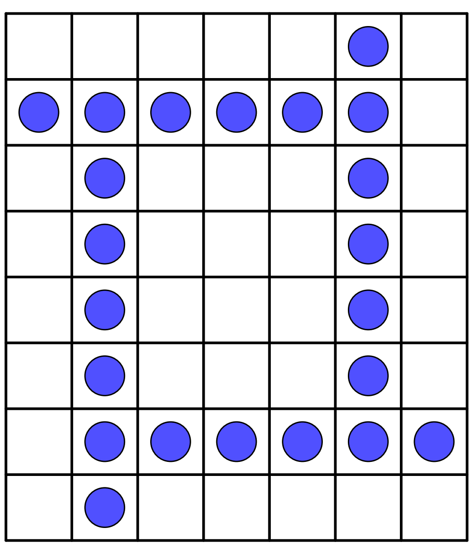




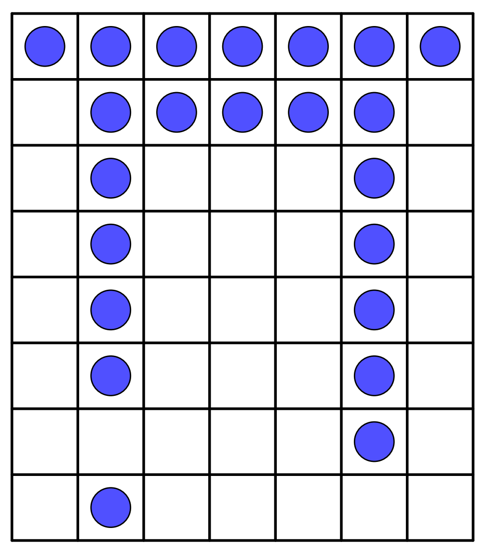
$m = 3$ için



$m, n \geq 4$ için



veya



Şimdi ise satranç tahtası üzerindeki kale sayısının daha fazla olamayacağını gösterelim.

Yukarı, aşağı, sağ ve sol olmak üzere, 4 yön tanımlayalım. Her keleden onu tehdit etmeyen yönlere doğru ışınlar çizelim. Bu ışınlardan her biri satranç tahtasının 1 uzunlukta bir birim sınır kenarını kesiyor. İki farklı ışın 1 uzunluktaki aynı birim kenarı kesemez. Bir kale tarafından tehdit edilen kalelere *tek* kale, üç kale tarafından tehdit edilen kalelere *üçlü* kalesi diyelim. Her tek kaleyle onun ışınlarının kestiği üç birim kenarı eşleyelim. Her üçlü kaleyle onun ışınlarının kestiği bir birim kenarı eşleyelim.

Lemma 1: Tek kale sayısı en az 4 ise toplam kale sayısı en fazla $2m + 2n - 8$ dir.

İspat: Tek kale sayısı a, üçlü kale sayısı b olsun. Dört tek kalenin her biriyle üçer birim kenar, her üçlü kaleyle bir birim kenar eşleşmek zorundadır. Satranç tahatsının kenar uzunluğu $2m + 2n$ olduğundan $3a+b \leq 2m+2n$ olur. Demek ki $a \geq 4$ ise, $a+b \leq 2m+2n-2a \leq 2m+2n-8$. İspat tamamlanmıştır.

Lemma 2: $m, n \geq 3$, $m+n \geq 7$ ve $N(m,n) \geq 2m+2n-8$ olsun. O zaman tek kale sayısı en az 4' tür.

İspat: Satranç tahtasının en az bir kale içeren en yukarıdaki satırı S_1 en aşağıdaki satırları S_2, en en soldaki sütunu T_1 ve en sağdaki sütu T_2 olsun. S_1, S_2, T_1 ve T_2 birer kale bulunduruyorsa bu kaleler birbirinden farklıdır ve bu dört kalenin her biri tek kaledir. S_1, S_2, T_1 ve T_2 den en az ikisi en az iki kale bulunduruyorsa bu yine bu kalelerden uc kale olan 4 kale tek kaledir. Son olarak genelliği bozmadan S_1 üzerinde en az iki ve S_2 üzerinde bir kale olsun. O zaman S_1 üzerindeki 2 uc kale ve S_2 üzerindeki kale tek kalelerdir. $2m + 2n - 8 \geq max(m,n) + 2$ olduğuna göre, S_1 dışında en az 2 kale vardır. S_2 üzerindeki tek kale A olsun. En az bir kale bulunduran ve S_2'e en yakın olan satır S' olsun. S' in üzerinde bir kale varsa bu kale tek kaledir. S' in üzerinde birden fazla kale varsa S' in üzerindeki A ile aynı sütunda olmayan uc kaleler tek kaledir. İspat tamamlanmıştır.

Lemma 2 ve Lemma 1'e göre, $m, n \geq 3$, $m + n \geq 7$ ise $N(m,n) \leq 2m + 2n - 8$. Şimdi de kalan durumları inceleyelim.

$m = 2$. Her satırdaki en sol ve en sağ kaleler tek kale olmak zorundadır. $N(2,2) \geq 3$ olursa, en az bir satırda 2 kale bulunuyor. O zaman bu iki kale tek kaledir ve sonuç olarak ikinci satırda kale bulunmuyor, çelişki. $N(2,3) \geq 5$ olursa, her satırda en az 2 kale bulunuyor. Demek ki her satırda en az iki tek kale bulunuyor. Bu 4 tek kaleyle toplam 12 birim kenar eşleşmek zorunda, fakat birim kenar satısı 10, çelişki. $N(2,4) \geq 5$ olsun. Her satırda en az iki kale varsa, toplamda en az 4 tek kale vardır ve Lemma'ya göre, $N(2,4) \leq 2 \cdot 2 + 2 \cdot 4 - 8 = 4$, çelişki. Bir satırda 4, diğer satırda 1 kale varsa, 4 kale bulunduran satırda 2 kale tarafından tehdit edilen kale vardır, çelişki. $k \geq 5$ durumunda $N(2,k) > 2k - 4$ olursa, $2k - 4 \geq k + 1$ olduğundan $N(2,k) \geq k + 1$. Demek ki her satırda en az 2 kale bulunuyor, ve dolayısıyla en az 4 tane tek kale vardır. Lemma'ya göre, toplam kale sayısı en fazla $2n - 4$, çelişki.

$m = 3$. $N(3,3) \leq 4$ olduğunu göterelim. 4 tane tek kale varsa, Lemma'ya göre, en fazla 4 kale vardır. Demek ki $N(3,3) \geq 5$ olması için en az 2 tane üçlü kale olmak zorundadır. Fakat bu durumda her biri 3 kale bulunduran ya iki satır, ya iki sütun ya da bir satır ve bir sütun vardır. O zaman tahtanın 4 köşe birim karesinden en az üçünde kale vardır, çelişki.

Çözüm tamamlanmıştır.