TÜRKİYE BİLİMSEL VE TEKNOLOJİK ARAŞTIRMA KURUMU
BİLİM İNSANI DESTEK PROGRAMLARI BAŞKANLIĞI

27. ULUSAL BİLİM OLİMPİYATLARI - 2019
BİRİNCİ AŞAMA SINAVI
ORTAOKUL MATEMATİK

Soru kitapçığı türü

A

4 Mayıs 2019 Cumartesi, 09.30-12.30

ÇÖZÜMLER

1. Dar açılı bir ABC üçgeninde A dan $[BC]$ kenarına inen dikme ayağı D noktasıdır. $[AB]$ kenarının orta noktası E olmak üzere, $s(\widehat{BAD}) = 20°$ ve $|AE| = |CD|$ ise, $s(\widehat{BCE})$ kaçtır?

Cevap: $35°$. ABD dik üçgeninde E noktası hipotenüsün orta noktası olduğundan $|AE| = |EB| = |ED|$ olduğu görülür. Buradan $s(\widehat{ADE}) = 20°$ ve $s(\widehat{EDB}) = 70°$ bulunur. Ayrıca $|AE| = |CD|$ olduğundan EDC bir ikizkenar üçgendir ve dolayısıyla $s(\widehat{BCE}) = s(\widehat{ECD}) = 70°/2 = 35°$ olur.

2. $\dfrac{n^3 - 24}{n+1}$ ifadesinin bir tam sayı olmasını sağlayan n pozitif tam sayılarının toplamı kaçtır?

Cevap: 28. $n+1|n^3-24$ olsun. $n+1|n^3+1$ olduğundan $n+1|(n^3+1)-(n^3-24) = 25$ olur. O halde $n+1 \in \{-25, -5, -1, 1, 5, 25\}$. n pozitif olduğundan $n = 4$ veya $n = 24$ olabilir.

3. Bir tahtada 12 sayısı yazılıdır. Her işlemde tahtadaki sayı silinip yerine bu sayının rakamları çarpımının 24 fazlası yazılıyor. 100 işlem sonucunda tahtada yazılı olan sayı kaç olur?

Cevap: 32. İlk işlemden itibaren tahtaya yazılan sayılar 26, 36, 42, 32, 30, 24, 32, . . . olacaktır. Bu dizi dördüncü terimden başlayarak periyodu 3 olan bir dizidir. Buna göre 100. işlem sonucunda tahtadaki sayı 32 olur.

4. Her bir basamağındaki rakam 1, 2 veya 3 olan ve 3 ile tam bölünen kaç tane 10 basamaklı pozitif tam sayı vardır?

Cevap: 3^9. 3 ile tam bölünen her sayının ilk 9 basamağına 1,2 ve 3 sayıları rastgele yazıldıktan sonra her zaman sonuncu basamak tek türlü belirleniyor. Buna göre cevap 3^9 olur.

5. Bir ABC üçgeninde $[BC]$ kenarı üzerinde bir D noktası alınıyor. BC doğrusuna paralel olan bir doğru $[AC]$ ve $[AB]$ kenarlarını sırasıyla E ve F noktalarında kesiyor. Alan$(BFD) = 1$, Alan$(DEF) = 2$ ve Alan$(DEC) = 3$ ise, Alan(AFE) kaçtır?

Cevap: 2. $BFEC$ bir yamuk olduğundan BFD, DEF, DEC üçgenlerinin bir yükseklikleri eşittir. Buradan da $|BD| : |FE| : |DC| = 1 : 2 : 3$ olur. $|BD| = x$, $|FE| = 2x$, $|DC| = 3x$ olsun. Benzerlikten Alan(AFE)/Alan$(ABC) = |FE|^2/|BC|^2 = (4x^2)/(16x^2) = 1/4$ olduğundan

Alan(AFE)/(Alan$(AFE)+6) = 1/4$ ve buradan da Alan$(AFE) = 2$ elde ederiz.

6. Pozitif tam bölen sayısı 15 olan en küçük pozitif tam sayının rakamları toplamı kaçtır?

Cevap: 9. Pozitif bölen sayısı formülünden bu sayı p^{14} veya p^4q^2 formundadır. (p ve q asal sayılar). İlk formdaki en küçük sayı 2^{14} ve ikinci formdaki en küçük sayı $2^4 3^2 = 144$ olduğundan tam olarak 15 pozitif tam bölene sahip en küçük pozitif sayı 144'tür.

7. Bir torbada her biri kırmızı, mavi ya da sarı renklerinden biriyle boyanmış 24 top vardır. Her hamlede torbadan ya 1 sarı top ya da 1 kırmızı ve 1 mavi top çekiliyor. 15 hamle sonunda torbada sadece 2 kırmızı top kaldığına göre başlangıçta bu torbada kaç sarı top vardır?

Cevap: 8. 15 hamlede toplam $24 - 2 = 22$ top çıkarılmış. Her hamlede 1 veya 2 top çıkarıldığına göre $22-15 = 7$ hamlede 2 top çıkarılırken $15-7 = 8$ hamlede ise 1 top çıkarılmıştır. O zaman başlangıçta 8 sarı top vardır.

8. Tam sayılardan oluşan n elemanlı her kümede toplamı veya farkı 17 ile tam bölünen iki eleman bulunuyorsa, n nin alabileceği en küçük değer nedir?

Cevap: 10. Toplamı veya farkı 17 ile bölünen iki elemanın bulunamaması için 17 modunda tüm kalanların farklı olması ve bu kalanların $(1, 16)$, $(2, 15)$, $\ldots$, $(8, 9)$ ikililerinin her birinden sadece birer değer alması gerekiyor. Buna göre cevap $8 + 1 + 1 = 10$ olur.

9. $s(\widehat{ABC}) = 90^\circ$ olan bir ABC üçgeninin $[AC]$ kenarı üzerinde bir D noktası alınıyor. $\dfrac{|AB|}{|BC|} = \sqrt{3}$ ve $\dfrac{|BD|}{|AC|} = \dfrac{\sqrt{3}}{4}$ ise, $s(\widehat{BDC})$ kaçtır?

Cevap: 90°. $|BC| = x$, $|AB| = \sqrt{3}x$ dersek Pisagor teoreminden $|CA| = 2x$ ve buradan da $|BD| = x\sqrt{3}/2$ olur. $|AB| \cdot |BC| = \sqrt{3}x^2 = |CA| \cdot |BD|$ olduğundan $\angle BDC = 90^\circ$ olmalıdır.

10. 24 fazlası 27 ile, 27 fazlası 24 ile tam bölünebilen en küçük pozitif tam sayının rakamları toplamı kaçtır?

Cevap: 12. $27|n+24$ ve $24|n+27$. $\Rightarrow n = 27k+3 = 24m-3$ olacak şekilde m ve n pozitif tam sayıları vardır. $\Rightarrow 9k+2 = 8m$. $\Rightarrow 8|k+2$ ve dolayısıyla

$k = 8a - 2$ ve $m = 9a - 2$. O halde $n = 27(8a - 2) + 3 = 216a - 51$ ve sonuç olarak şartları sağlayan en küçük pozitif tam sayı $216 - 51 = 165$ tir.

11. Bir masada bir siyah ve birkaç beyaz taş bulunmaktadır. Gram cinsinden siyah taşın ağırlığı, beyaz taşların ağırlıkları ortalamasından 36, tüm taşların ağırlıkları ortalamasından ise 32 fazla olduğuna göre, masada toplam kaç taş vardır?

Cevap: 9. Masada ortalama ağırlıkları a olan k beyaz taş olsun. O zaman

$$a + 36 - \frac{ka + a + 36}{k + 1} = \frac{36}{k + 1} = 32$$

olacak. Buna göre $k + 1 = 9$ olur.

12. Başlangıçta bir sayı doğrusu üzerindeki 0 noktasında bulunan bir kurbağa her k pozitif tam sayısı için k-inci adımda, bulunduğu noktanın sağına veya soluna doğru k birim atlıyor. Bu kurbağa en az kaç adımda 100 noktasına varabilir?

Cevap: 15. Kurbağa L atlama sonucu en çok $L(L+1)/2$ noktasına varabilir. $13 \cdot 7 = 91 < 100$ olduğundan en az 14 atlama gerekir. Öte yandan kurbağanın L adım sonunda varacağı nokta mod 2 de $L(L + 1)/2$ e denk olacağından $L(L + 1)/2$ çift sayı olmalıdır. Yani $L = 14$ sağlamaz. $L = 15$ için örnek: Kurbağa 10. adımda sola, kalan tüm adımlarda sağa doğru atlarsa ulaştığı nokta $15 \cdot 8 - 2 \cdot 10 = 100$ olur.

13. Dışbükey bir $ABCD$ dörtgeninde $s(\widehat{ABC}) = 45°$, $s(\widehat{ADC}) = 90°$, $s(\widehat{BAC}) = s(\widehat{CAD})$, $|BC| = 2$ ve $|CA| = \sqrt{3}$ ise, $|AD|$ kaçtır?

Cevap: 1. C noktasından AB kenarına çizilen dikmenin ayağı E olsun. $\triangle AEC \cong \triangle ADC$ olacağından $|AE| = |AD|$ olur. BEC üçgeni bir $45-45-90$ üçgeni olduğundan $|EC| = \sqrt{2}$ ve AEC üçgeninde Pisagor teoreminden $|AD| = |AE| = 1$ olur.

14. Hem kendisi hem rakamları toplamı hem de rakamları çarpımı asal sayı olan bir pozitif tam sayıya *asil sayı* diyelim. Üç basamaklı en küçük asil sayı ile üç basamaklı en büyük asil sayının toplamı kaçtır?

Cevap: 424. abc üç basamaklı bir asil sayı olsun. $a \cdot b \cdot c$ bir asal sayı olduğundan a, b, c den ikisi 1'e biri de bir asal sayıya eşittir. Toplamlarının da asal olduğu ele alındığında $\{a, b, c\} = \{1, 1, 3\}$ veya $\{a, b, c\} = \{1, 1, 5\}$

olduğu görülür. 113 asal sayı olduğundan üç basamaklı en küçük asil sayı 113'tür. $511 = 7 \cdot 73$ ve 311 asal sayı olduğundan üç basamaklı en büyük asil sayı 311'dir. Dolayısıyla cevap $113 + 311 = 424$ olur.

15. Bir tabakta 1 litre süt vardır. Bir kedi birinci dakikada tabaktaki sütün yarısını, ikinci dakikada tabakta kalan sütün 1/3 ünü, üçüncü dakikada tabakta kalan sütün 1/4 ünü, ..., 24. dakikada tabakta kalan sütün 1/25 ini içiyor. Tabakta kaç litre süt kalmıştır?

Cevap: $\frac{1}{25}$. 1. dakikanın sonunda sütün $\frac{1}{2}$ si, 2. dakika sonunda sütün $\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$ ü kaldı. n. dakika sonunda sütün $\frac{1}{n+1}$ lik kısmı kaldıysa, $(n+1)$. dakika sonunda sütün $\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+1} \cdot \frac{1}{n+2} = \frac{1}{n+2}$ kısmı kalacaktır. Buna göre cevap $\frac{1}{25}$ olur.

16. 20 takımın katıldığı bir voleybol turnuvasında her gün bir maç yapılıyor ve maçı kaybeden takım turnuvadan eleniyor (voleybol oyununda beraberlik yoktur). Turnuvada bir tek takım kalana dek devam edilirse, tam olarak iki maç kazanan takım sayısı en fazla kaç olabilir?

Cevap: 9. Turnuvadan her gün bir takım ayrılacağına göre toplam 19 maç yapılacaktır. Buna göre iki maç kazanan takım sayısı 9'dan fazla olamaz. 9 takım ikişer maç kazanabilir: 1. takım 2. ve 3. takımları, 4. takım 1. ve 5. takımları, 6. takım 4. ve 7. takımları, 8. takım 6. ve 9. takımları, 10. takım 8. ve 11. takımları, 12. takım 10. ve 13. takımları, 14. takım 12. ve 15. takımları, 16. takım 14. ve 17. takımları, 18. takım 16. ve 19. takımları yenerse 1.,4.,6.,8.,10.,12.,14.,16. ve 18. takımlar ikişer maç kazanmış olurlar.

17. Bir $ABCD$ dikdörtgeninde $|AB| = 3$, $|BC| = 2$ dir. Yarıçap uzunlukları 2 olan A merkezli C_1 ve B merkezli C_2 çemberleri çiziliyor. Hem C_1 çemberi hem C_2 çemberi hem de $ABCD$ dikdörtgeninin içinde kalan bölgenin alanı X olsun. $ABCD$ dikdörtgeninin içinde kalıp hem C_1 çemberinin hem de C_2 çemberinin dışında kalan bölgenin alanı Y olsun. Buna göre $X - Y$ kaçtır?

Cevap: $2\pi - 6$. C_1 çemberinin ve dikdörtgenin içinde C_2 çemberinin dışında kalan bölgenin alanı Z olsun. Oluşan çeyrek dairenin alanından $X + Z = 6 - (Y + Z) = \pi$ dir. Buradan da $X - Y = 2\pi - 6$ olur.

18. x ve y pozitif tam sayılar ve $x^2y^2 - 80 = 2xy$ olmak üzere, $x+y$ nin alabileceği farklı değerler toplamı kaçtır?

Cevap: 18. Verilen eşitlik $(xy-1)^2 = 81$ olarak yazılabilir. O halde $xy-1 = \pm 9$ olur. x ve y pozitif olduğundan $xy = 10$ olabilir. O zaman $(x, y) \in \{(1, 10), (2, 5), (5, 2), (10, 1)\}$. $x + y$ nin alabileceği farklı değerler 11 ve 7 olduğundan cevap $11 + 7 = 18$ olur.

19. Bir tahtada soldan sağa doğru $10, a, b, c, d, e, 16$ gerçel sayıları yazılıdır. a, b, c, d, e sayılarının her biri tahtada hemen solunda ve hemen sağında yer alan iki sayının ortalamasından 1 eksiktir. Buna göre c kaçtır?

Cevap: 4. $10+b = 2a+2$ olduğundan $b = 2a-8$. Benzer şekilde, $c = 3a-14$, $d = 4a-18$, $e = 5a-20$ ve $16 = 6a-20$. Buna göre, $a = 6$ ve $c = 3\cdot 6-14 = 4$ olur.

20. Dengede bulunan iki kefeli bir tartının sol kefesinde birkaç kırmızı, sağ kefesinde ise bir beyaz ve birkaç kırmızı taş bulunuyor. Sağ kefedeki taş sayısı sol kefedeki taş sayısından iki fazladır. Her bir kırmızı taşın ağırlığı 8, 29 veya 57 gram olduğuna göre, beyaz taşın ağırlığı en az kaç gram olabilir?

Cevap: 6. $8 \equiv 29 \equiv 57 = 1 \pmod 7$ olduğuna göre, beyaz taşın ağırlığı mod 7 de 6 olacaktır. Bu nedenle beyaz taşın ağırlığının alabileceği en küçük değer de 6 dır. Beyaz taşın ağırlığı 6 olabiliyor: tartının sol kefesindeki taşların ağırlıkları 29, 29, 29, tartının sağ kefesindeki taşlar 57, 8, 8, 8, 6 olursa denklik sağlanır.

21. Bir ABC üçgeninde $|AB| = 11$ ve $|BC| = 17$ dir. $[BC]$ kenarı üzerinde bir D noktası $|DC| = 3$ olacak biçimde alınıyor. $[AC]$ kenarının orta noktası E olmak üzere, $s(\widehat{BDE}) = 56°$ ise, $s(\widehat{ABC})$ kaçtır?

Cevap: 68°. $[BC]$ kenarı üzerinde $|BF| = 11$ olacak biçimde bir F noktası alalım. $\Rightarrow |FD| = 17 - 11 - 3 = 3 = |DC|$. $\Rightarrow AF \parallel DE$ ve $\angle BDE = \angle BFA$. ABF ikizkenar üçgen olduğundan $\angle ABC = 180° - 2 \cdot 56° = 68°$ elde edilir.

22. a, b ve c iki basamaklı pozitif tam sayılar olmak üzere, $\text{obeb}(a, b) = 2$, $\text{obeb}(b, c) = 7$ ve $\text{obeb}(a, c) = 11$ ise, $a + b + c$ toplamının alabileceği en büyük değer nedir?

Cevap: 263. $77 \mid c$ olduğundan $c = 77$ olmalıdır. $a = 22x, b = 14y$ ve $x \leq 4$, $y \leq 7$ olacak şekilde $x, y \in \mathbb{Z}^+$ bulunur. Soruda verilen koşulların sağlanması $(x, y) = 1$ olmasına denktir. $a + b + c$ toplamının en büyük değerini bulmak için $x = 4, y = 7$ alınmalıdır. Bu durumda $a = 88, b = 98$ olacağından $a + b + c = 263$ elde ederiz.

23. x bir gerçel sayı olmak üzere, $2^{x+2} - 15 \cdot 2^{-x} = 4$ ise, 2^{x+1} kaçtır?

Cevap: 5. $y = 2^{x+1}$ olsun. O zaman verilen eşitlik $2y - \dfrac{30}{y} = 4$ olarak yazılabilir. Buradan $0 = 2y^2 - 4y - 30 = (y-5)(2y+6)$ elde edilir. x gerçel sayı olduğundan y pozitiftir ve dolayısıyla $y = 5$'tir.

24. Başlangıçta bir tahtada $1, 2, \ldots, 1000$ sayıları yazılıdır. Aslı ve Zehra sırayla hamleler yaparak bir oyun oynuyorlar. Oyuna ilk Aslı başlıyor ve sırası gelen oyuncu tahtada bulunan sayılardan ikisini siliyor. Tahtada iki sayı kaldığında oyun bitiyor ve Aslı bu kalan iki sayının farkı kadar puan alıyor. Buna göre, Aslı en fazla kaç puan almayı garantileyebilir?

Cevap: 501. Zehra her hamlesinde tahtadaki en küçük sayıları silerse, tahtada son kalan sayılar 498'den daha büyük olacaklar. Buna göre Aslı 1000 - 499 = 501'den fazla puan almayı garantileyemez. Bir diğer taraftan, Aslı 501 puan almayı garantileyebilir. Bunun için Aslı ilk hamlesinde 500 ve 501 sayılarını silip diğer sayıları $(1, 502), (2, 503), \ldots, (499, 1000)$ olarak çiftlere ayıracaktır. Zehra kendi hamlesinde bir çifti silerse Aslı herhangi bir başka çifti silecektir. Zehra kendi hamlesinde iki farklı çiftten birer sayı silerse Aslı aynı çiftlerdeki kalan kalan iki sayıyı silecektir. Bu durumda en sondaki iki sayı yukarıda belirtilen çiftlerden birisi olacak ve Aslı 501 puan alacaktır.

25. C_1 ve C_2 çemberleri A ve B noktalarında kesişiyor. Bir ℓ doğrusu C_1 çemberini C ve F, C_2 çemberini D ve G, $[AB]$ doğru parçasını da E noktasında kesiyor. Bu noktalar ℓ doğrusu üzerinde C, D, E, F, G sırasıyla yer alıyor. $|CD| = 8, |DE| = 4$ ve $|FG| = 6$ ise, $|EF|$ kaçtır?

Cevap: 3. $|CD| = x$, $|DE| = y, |EF| = z, |FG| = k$ olsun. C_1 ve C_2 çemberlerine göre kuvvetten $(x+y)z = |AE| \cdot |EB| = y(z+k)$ ve buradan da $z = yk/x = 4 \cdot 6/8 = 3$ olur.

26. $3, 5, 8$ ve 13 sayılarından kaç tanesi en az bir n pozitif tam sayısı için $3^n + 5^n + 7^n + 11^n$ toplamını tam böler?

Cevap: 2. $n = 1, 2$ için verilen ifade sırasıyla $26, 204$ değerlerini alır. Bu sayılar sırasıyla $13, 3$ ile tam bölünür. 5 modunda ifade $(-2)^n + 2^n + 1$ e denktir. Bu da $n = 1, 2, 3, 4, 5$ için sırasıyla $1, 4, 1, 3, 1$ değerlerini aldığından 5 e bölünemez. 8 modunda verilen ifade $2 \cdot 3^n + (-3)^n + (-1)^n$ ye denktir. Bu ise n tekse 2 ve n çiftse 4 e denk olacağından yine 8 e bölünemez.

27. Ahmet ve Burak aynı anda düz bir yolda sabit hızlarla yürümeye başlıyorlar. Ahmet dakikada a birim yol alırken Burak dakikada $a+1$ birim yol alıyor. Burak'ın 10 birim yol katettiği andan iki dakika sonra Ahmet 9 birim yol katetmiş oluyor. Buna göre a kaçtır?

Cevap: 3/2. Burak t dakikada 10 birim yol katetmiş olsun. O halde $t(a+1) = 10$ ve $(t+2)a = 9$. Buradan $\frac{9}{a} - \frac{10}{a+1} = 2$ bulunur. $\Rightarrow 9a+9-10a = 2a^2+2a$. $\Rightarrow 2a^2 + 3a - 9 = 0$. $\Rightarrow (2a-3)(a+3) = 0$. a negatif olamayacağı için $a = 3/2$ bulunur.

28. Başlangıçta hiçbir birim karesi boyalı olmayan 8×8 bir tahtanın her birim karesi kırmızı veya maviye, tahtanın birim karelerinden oluşan her 2×2 karede çift sayıda kırmızı birim kare bulunacak biçimde kaç farklı şekilde boyanabilir?

Cevap: 32768. Satranç tahtasının en sol sütun ve en üst satırındaki tüm birim karelerin rastgele boyandığını varsayalım. Bundan sonra 2. satırdaki tüm birim kareler soldan sağa tek türlü boyanacaktır. Benzer şekilde 3., 4., ..., 8. satırdaki birim kareler de tek türlü boyanacaktır. Buna göre, satranç tahtasının en sol sütun ve en üst satırındaki birim karelerin renkleri tüm birim karelerin renklerini tek türlü belirliyor ve farklı boyama sayısı $2^{15} = 32768$ olur.

29. Dışbükey bir $ABCD$ dörtgeninde AC köşegeni $\widehat{DAB}$ ve $\widehat{BCD}$ açılarının iç açıortayıdır. $\widehat{ABC}$ ve $\widehat{CDA}$ açılarının iç açıortayları arasındaki dar açı 40° ise, $\widehat{ABC}$ açısının iç açıortayı ile AC köşegeni arasındaki dar açı kaçtır?

Cevap: 70°. Verilen bilgilerden $s(\widehat{BAC}) = s(\widehat{DAC})$ ve $s(\widehat{DCA}) = s(\widehat{BCA})$ olur ve dolayısıyla ABC üçgeni ile ADC üçgeni eştir (a.a.k.). O halde $\widehat{ABC}$ ve $\widehat{CDA}$ açılarının iç açıortayları $[AC]$ kenarını aynı noktada keserler. Bu nokta P olsun. Genelliğgi bozmadan $s(\widehat{APB}) \leq 90^\circ$ kabul edebiliriz. O zaman ya $s(\widehat{DPB}) = 40^\circ$ ya da $s(\widehat{DPB}) = 180^\circ - 40^\circ = 140^\circ$. $ABCD$ dışbükey dörtgen olduğundan $\widehat{BAC}$ dar açıdır ve dolayısıyla $s(\widehat{DPB}) = 40^\circ$ olamaz. $\Rightarrow s(\widehat{DPB}) = 140^\circ$ ve $s(\widehat{APB}) = 140^\circ/2 = 70^\circ$.

30. Rakamlarının yeniden sıralanması sonucu bir tam kare elde edilebilen bir pozitif tam sayıya *karesel sayı* diyelim. Örneğin, 7416 sayısının rakamları yeniden sıralanarak $1764 = 42^2$ sayısı elde edilebildiğinden 7416 bir karesel sayıdır. 2345, 3456, 5678 ve 6731 dört basamaklı pozitif tam sayılarından kaç tanesi karesel sayıdır?

Cevap: 1. $2345, 5678, 6731$ sayılarının basamakları toplamı 3 modunda 2 ye denk olduğundan bu sayılar karesel olamaz. $4356 = 66^2$ olduğundan 3456 kareseldir.

31. $a_1(a_1-4)+a_2(a_2-4)+\cdots+a_{24}(a_{24}-4) = -95$ eşitliğini sağlayan kaç farklı $(a_1, a_2, \ldots, a_{24})$ tam sayı 24-lüsü vardır?

Cevap: 48. Verilen eşitlik $(a_1-2)^2+(a_2-2)^2+\cdots+(a_{24}-2)^2 = 1$ eşitliğine denktir. Yani bu 24 sayıdan bir tanesi 1 veya 3, diğerleri ise 0 olmalıdır. Toplam 48 tane 24-lü vardır.

32. 12×12 bir tahtanın k birim karesine herhangi ikisi birbirinden farklı olan birer tam sayı yazılmıştır. Ortak bir kenara veya köşeye sahip iki birim kare *komşu* kabul ediliyor. Tahtada yazılı olan her bir sayı, bulunduğu kareyle komşu olan birim karelerdeki sayıların en fazla birinden küçükse, k nin alabileceği en büyük değer nedir?

Cevap: 72. 2×2 bir karede ikiden fazla sayı yazılırsa, bu karedeki en küçük sayı en az iki komşusundan daha küçük olur. Bu nedenle tahtada en fazla $\frac{12 \cdot 12}{4} \cdot 2 = 72$ sayı olabilir. En üst satırdan başlayarak, 1. satıra soldan sağa 1, 2,...,12, 3. satıra soldan sağa 13, 14,...,24, 5. satıra soldan sağa 25, 26,...,36, ..., 12. satıra soldan sağa 61, 62,...,72 sayılarını sırayla yazarsak koşullar sağlanmış olacaktır.