TÜBİTAK

Türkiye Cumhuriyeti
SANAYİ VE TEKNOLOJİ BAKANLIĞI

MATEMATİK

21. ULUSAL ORTAOKUL
MATEMATİK OLİMPİYATI
BİRİNCİ AŞAMA SINAV
SORU VE ÇÖZÜMLERİ

2016

TÜRKİYE BİLİMSEL VE TEKNOLOJİK ARAŞTIRMA KURUMU
BİLİM İNSANI DESTEK PROGRAMLARI BAŞKANLIĞI

ULUSAL MATEMATİK OLİMPİYATLARI SORU ve ÇÖZÜMLERİ

Ankara

Nisan 2019

21. Ortaokul Matematik Olimpiyatı Birinci Aşama Sınavı **A**

1. Bir ABC üçgeninde BE ve CD kenarortayları birbirine dik ve $|BE| = 18$, $|CD| = \dfrac{27}{2}$ ise AF kenarortayının uzunluğu kaçtır?

Cevap: 45/2. CD ve BE kenarortaylarının kesişimi G olsun. G noktası ABC üçgeninin ağırlık merkezidir ve kenarortayları 2 ye 1 oranında böler. Dolayısıyla $|BG| = 12$ ve $|CG| = 9$ olduğu görülür. BGC dik üçgen olduğundan Pisagor teoremi ile $|BC| = 15$ elde edilir ve $|GF| = |BC|/2 = 15/2$ olduğu görülür. Sonuç olarak $|AF| = 45/2$ elde edilir.

2.

$$\frac{1}{3m} + \frac{1}{4n} + \frac{17}{12mn} = \frac{1}{2}$$

denklemini sağlayan m, n pozitif tam sayıları için $m+n$ ifadesinin alabileceği farklı değerlerin toplamı kaçtır?

Cevap: 19. Verilen denklem $(3m-2)(2n-1) = 19$ denklemine denktir. Çözümler $(1, 10)$ ve $(7, 1)$ ikilileridir. Cevap $1 + 10 + 7 + 1 = 19$ olur.

3. Bir kutuda renkleri kırmızı, beyaz, mavi ve yeşil olan toplam n top bulunuyor. Kırmızı topların sayısı $\frac{n}{3} + 20$, beyaz topların sayısı $\frac{n}{5} + 15$, mavi topların sayısı $\frac{n}{7} + 5$ tir. Yeşil top sayısı mavi top sayısından daha az ise, kutudaki kırmızı top sayısı beyaz top sayısından ne kadar fazladır?

Cevap: 33. Toplam top sayısı 3,5 ve 7'nin katıdır, $n = 105k$ olsun. O zaman yeşil top sayısı $105k - (35k + 20) - (21k + 15) - (15k + 5) = 34k - 40$ olur. Buradan $k \geq 2$ elde ediyoruz. Diğer taraftan yeşil top sayısının mavi top sayısından az olduğu nedeniyle $34k - 40 < 15k + 5$ ve buradan da $19k < 45$ elde ediyoruz. Demek ki $k \leq 2$. Sonuç olarak $k = 2$ ve $n = 210$. Buradan cevap $90 - 57 = 33$ olur.

4. Başlangıçta $1, 2, \ldots, 2016$ şeker içeren 2016 öbek vardır. Her işlemde bir öbek seçiliyor ve seçilmiş öbekten daha az şeker içermeyen her öbekten (seçilmiş öbek dahil) seçilmiş öbekteki kadar şeker alınıp yeniyor. Birkaç işlem sonucunda tek bir öbek kaldıysa son öbekteki şeker sayısı $1, 2, \ldots, 21$ sayılarından kaçına eşit olabilir ?

Cevap: 1. Her işlem sonucunda her birinde 1,2,3,...k olan gruplar oluşuyor. Bu nedenle son öbekteki şeker sayısı sadece 1'e eşit olabilir.

5. $|AB| = 3$, $|BC| = 4$, $|CA| = 5$ koşullarını sağlayan bir ABC üçgeninde BC kenarının orta noktası D dir. C köşesinden geçen iç açıortayın AB kenarını kestiği nokta E olmak üzere AD ve EC doğruları F noktasında kesişiyor. Buna göre AEF üçgeninin alanının CDF üçgeninin alanına oranı nedir?

Cevap: 25/18. AEF ve CDF üçgenlerinin alanları sırasıyla S_1 ve S_2 olsun. CE açıortay olduğundan $AE = \frac{5}{3}$ ve $BE = \frac{4}{3}$ olur. Buradan da BFD ve BEF üçgenlerinin alanları sırasıyla S_2 ve $\frac{4S_1}{5}$ olur. $s(\widehat{ABC}) = 90°$ olacağından ABD ve BEC üçgenlerinin alanları sırasıyla 3 ve $\frac{8}{3}$ olur. Yani $\frac{9}{5}S_1 + S_2 = 3$ ve $\frac{4}{5}S_1 + 2S_2 = \frac{8}{3}$ elde ederiz. Buradan da $S_1 = \frac{25}{21}$, $S_2 = \frac{6}{7}$ ve $\frac{S_1}{S_2} = \frac{25}{18}$ elde ederiz.

6. 30 dan küçük asal sayılar kümesi $P = \{p_1, p_2, \ldots, p_{10}\}$ olmak üzere bir $p \in P$ için en küçük asal böleni p olan 100 den küçük pozitif tam sayıların sayısı s_p ile gösteriliyor. Buna göre $s_{p_1} + s_{p_2} + \cdots + s_{p_{10}}$ kaçtır?

Cevap: 83. En küçük asal böleni 2 olan sayılar $2k$, en küçük asal böleni 3 olanlar $6k+3$, en küçük asal böleni 5 olanlar $30k \pm 5$ formundadır. Buradan da 100 den küçük $49 + 17 + 7 = 73$ tane sayı elde edilir. En küçük asal böleni 7 olanlar $7, 49, 77, 91$ olup 7 den büyük p asalları için sadece p şartları sağlar. Buradan da $4 + 6 = 10$ ve toplamda da $73 + 10 = 83$ elde ederiz.

7. Ardışık 3 pozitif tam sayının toplamı olarak yazılabilen ilk 21 sayının toplamı kaçtır?

Cevap: 756. Ardışık 3 pozitif tam sayının toplamı olarak yazılabilen ilk sayı $1 + 2 + 3 = 6$, 21. sayı ise $21 + 22 + 23 = 66$ olur. Demek ki ilk 21 sayının toplamı $6 + 9 + \cdots + 66 = 3(1 + 2 + \cdots + 22 - 1) = 3 \cdot 22 \cdot 23/2 - 3 = 756$ olur.

8. 100×100 satranç tahtasının her birim karesi bir renge, her birim kare kendisiyle ortak kenar paylaşan en az 2 birim kareyle aynı renkte olacak şekilde boyanıyor. Tahtadaki farklı renk sayısı en fazla kaç olabilir?

Cevap: 2500. 2×2 leri aynı boyarsak $50 \cdot 50 = 2500$ elde ederiz. Daha fazla renk olursa bu renklerden birine boyalı birim kare sayısı en fazla üç olur ve o renge boyanmış karelerin en az ikisi koşulları sağlamıyor.

9. Bir $ABCD$ dikdörtgeninin AB kenarı üzerinde $E \in [AF]$ olacak biçimde birbirinden farklı E ve F noktaları, CD kenarı üzerinde $G \in [CH]$ olacak biçimde birbirinden farklı G ve H noktaları E, F, G, H çemberdeş olacak şekilde seçiliyor. $|AE| = 2$, $|DH| = 3$, $|CH| = 7$ ise $|EF| + |CG|$ kaçtır?

Cevap: 9. Verilen bilgilerden $ABCD$ dikdörtgen oldyğu için $|EB| = 3 + 7 - 2 = 8$ olduğu görülür. E, F, G, H çembersel olduğundan $s(\widehat{FEH}) = 180^\circ - s(\widehat{FGH})$ tır. $ABCD$ dikdörtgen olduğundan $s(\widehat{FEH}) = s(\widehat{EHD}) = 180^\circ - s(\widehat{EHG})$ dir. Dolayısıyla $s(\widehat{EHG}) = s(\widehat{FGH})$ olur ve sonuç olarak $EFGH$ bir ikizkenar yamuktur. Dolayısıyla E den CD ye inen dikme ayağı ile H arasındaki mesafe ve F den CD ye inen dikme ayağı ile G arasındaki mesafe eşittir. Sonuç olarak $|DH| - |AF| = 3 - 2 = |GC| - |FB| = |CG| - (8 - |EF|)$ elde edilir ve $|EF| + |CG| = 1 + 8 = 9$ olur.

10. 3 asal sayının kareleri toplamı olarak yazılabilen ve 1 eksiği tam kare olan kaç asal sayı vardır?

Cevap: 1. $p = q^2 + r^2 + s^2$ olsun. q, r, s sayılarının hepsi tekse $p = 1+1+1 = 3 \pmod 4$ olur, fakat tam kare 4 modunda 3 olamaz. q, r, s sayılarının tam olarak biri 2 olamaz, genelliği bozmadan $q = r = 2$ olsun: $p = s^2 + 8$. Buradan $\sqrt{p-1} - s)(\sqrt{p-1} + s) = 7$ ve sonuç olarak sadece $p = 17$ çözümü gelir.

11. $x^2 + (x+1)^2 + x^2(x+1)^2 = (x^2 + x - 1)^2$ denklemini sağlayan x gerçel sayılarının toplamı kaçtır?

Cevap: -1. Sadeleşmeden sonra denklem $x^2 + x = 0$ olur. Demek ki denklemi sağlayan gerçel sayılarının toplamı $-1 + 0 = -1$.

12. 18 özdeş top $1, 2, \ldots, 19$ sayılarıyla numaralanmış 19 kutuya tek numaralı kutularda tek, çift numaralı kutularda çift top bulunması koşuluyla kaç farklı biçimde dağıtılabilir?

Cevap: 7315. İlk önce 1,3,5, ...,19 nolu kutulara birer top koyalım. Sonra kalan 8 topu ikişer birleştirerek 4 tane büyük top elde edelim ve bu büyük topları 19 kutuya dağıtalım: $\binom{4+19-1}{19-1} = 7315$.

13. Eş merkezli iki çemberin arasında kalan bölgenin alanı 36π dir. Büyük çemberin bir AB kirişi küçük çembere teğettir. A ve B noktalarında büyük çembere çizilen teğetler C de kesişiyor. $|CA| = 10$ ise ABC üçgeninin alanı

nedir?

Cevap: 48. Çemberlerin merkezi O ve $[AB]$ nin orta noktası D olsun. O her iki çemberin de merkezi olduğundan $OD \perp AB$ ve O, D, C doğrusaldır. Çemberlerin arasında kalan bölgenin alanı $(|AO|^2 - |OD|^2)\pi$ dir ve dolayısıyla $|AO|^2 - |OD|^2 = 36$ olur Öte yandan ODA dik üçgen olduğundan $|AO|^2 - |OD|^2 = |AD|^2$ dir. Sonuç olarak $|AD| = 6$ bulunur. CAD dik üçgenindde uygulanan Pisagor teoreminden $|CD| = 8$ elde edilir. Dolayısıyla ABC üçgeninin alanı $|AB| \cdot |CD|/2 = 12 \cdot 8/2 = 48$ dir.

14. $a + b + c + d + e = 0$ koşulunu sağlayan a, b, c, d, e tam sayıları için $a^5 + b^5 + c^5 + d^5 + e^5$ ifadesi $15, 18, 21, 30, 35$ sayılarından kaçına her zaman tam bölünür?

Cevap: 2. $(a, b, c, d, e) = (1, 1, 1, 1, -4)$ durumunda $a^5 + b^5 + c^5 + d^5 + e^5 = 2 \pmod 7$ olduğundan 21 ve 35 seçenekleri eleniyor. $(a, b, c, d, e) = (4, 4, 4, 4, 12)$ durumunda $a^5 + b^5 + c^5 + d^5 + e^5 = 3 \pmod 9$ olduğundan 18 seçeneği de eleniyor. Şimdi $a^5+b^5+c^5+d^5+e^5 = a+b+c+d+e = 0 \pmod 2$, $a^5+b^5+c^5+d^5+e^5 = a^3a^2+b^3b^2+c^3c^2+d^3d^2+e^3e^2 = a^3+b^3+c^3+d^3+e^3 = a+b+c+d+e = 0 \pmod 3$ ve $a^5 + b^5 + c^5 + d^5 + e^5 = a + b + c + d + e = 0 \pmod 5$ olduğundan $a^5 + b^5 + c^5 + d^5 + e^5$ 15 ve 30 sayılarıyla bölünür.

15. a bir pozitif gerçel sayı olmak üzere $21a + 2$ ve $24a + 9$ sayıları ardışık iki pozitif tam sayının kareleriyse a nın alabileceği en büyük değer ile en küçük değerin farkı kaçtır?

Cevap: 4. $21a+2 = k^2$ ve $24a+9 = (k+1)^2$ olursa $a = \dfrac{k^2 - 2}{21} = \dfrac{(k+1)^2 - 9}{24}$. Buradan elde edilen $k^2 - 14k + 40 = 0$ denkleminin çözümleri $k = 4$ ve $k = 10$ dur. Demek ki a sayısının alabileceği iki değer vardır: $2/3$ ve $14/3$. Sonuç olarak cevap $14/3 - 2/3 = 4$ olur.

16. Bir tahtada başlangıçta 1 sayısı yazmaktadır. Ali her hamlede tahtada yazılı olan sayı n olmak üzere bu sayıyı silip yerine $2n-1$ veya $n+2$ yazıyor. Buna göre 7 hamle sonunda tahtada yazılı olan sayı $41, 67, 81, 97, 131$ sayılarından kaç tanesine eşit olabilir?

Cevap: 4. 7 adımda sonunda elde edilebilecek en büyük sayı

$$1 \to 3 \to 5 \to 9 \to 17 \to 33 \to 65 \to 129$$

şeklinde elde edilebilir. Bu durumda da 131 elde edilemez. Diğer durumlar aşağıdaki gibi elde edilir:

$$1 \to 3 \to 5 \to 9 \to 11 \to 21 \to 41 \to 81$$

$$1 \to 1 \to 3 \to 5 \to 9 \to 11 \to 21 \to 41$$

$$1 \to 3 \to 5 \to 9 \to 17 \to 33 \to 65 \to 67$$

$$1 \to 3 \to 5 \to 7 \to 13 \to 25 \to 49 \to 97$$

Buradan da cevap 4 olur.

17. Kenar uzunluğu 1 olan bir $ABCD$ karesinde AB ve AD kenarlarının orta noktaları sırasıyla E ve F dir. CE ve CF doğruları A merkezli ve B den geçen çemberi karenin iç bölgesinde sırasıyla K ve L noktalarında kesiyor. Buna göre $|KL|$ uzunluğu nedir?

Cevap: $\frac{\sqrt{2}}{5}$. CF doğrusu AB doğrusunu P de kessin. $|AF| = |DF|$ olduğundan $|AP| = 1$ ve P noktası ABD üçgeninin çevrel çemberi üzerindedir. CD doğrusu bu çembere teğet ve $|CP| = \sqrt{5}$ olduğundan kuvvetten $|CK| = \frac{1}{\sqrt{5}}$ ve $|FK| = \frac{3}{2\sqrt{5}}$ bulunur. Simetriden $|CL| = |CK|$ ve $|EL| = |FK|$ olur ve buradan da $KL \parallel EF$ dir. $|EF| = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ve benzerlikten $|KL| = \frac{\sqrt{2}}{5}$ olur.

18. n bir pozitif tam sayı olmak üzere herhangi ikisinin en büyük ortak bölenleri 2 ye eşit ve hepsinin en küçük ortak katları 2016 dan küçük olacak şekilde birbirinden farklı $a_1, a_2, \ldots, a_n$ pozitif tam sayıları bulunabiliyorsa n en çok kaç olabilir?

Cevap: 5. Tüm sayılar çift olduğundan hepsini 2 ye bölersek yeni sayılar ikişerli aralarında asal olmalıdır. Bu durumda çarpımları 1008 den küçük ve ikişerli aralarında asal olacak şekilde en çok kaç pozitif tam sayı seçilebileceğini bulmalıyız. Elimizdeki yeni sayılar $b_1 < b_2 < \cdots < b_n$ olmak üzere $s_k = b_1 b_2 \cdots b_k$ olsun. Bu durumda sayılar ikişerli aralarında asal olduğundan s_{k+1} sayısı s_k yı bölmeyen bir asal bölen içermelidir. Yani s_n sayısının en az $n-1$ farklı asal böleni olmalıdır. $n > 5$ için $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 = 2310 > 1008$ olduğundan $n > 5$ olamaz. $n = 5$ için $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) = (2, 4, 6, 10, 14)$ uygun bir örnektir. Yani cevap 5 olur.

19. Tüm a, b, c gerçel sayıları için $a^2 + 2b^2 + 3c^2 \geq kc(a + b)$ eşitsizliğinin doğru olması sağlayan en büyük k gerçel sayısı kaçtır?

Cevap: $k = 2\sqrt{2}$. $a^2 + 2b^2 + 3c^2 = (a^2 + 2c^2) + (2b^2 + c^2) \geq 2\sqrt{2}c(a + b)$ olduğundan $k = 2\sqrt{2}$ koşulları sağlar. Öte yandan $a = 2, b = 1, c = \sqrt{2}$ alarak $k \leq 2\sqrt{2}$ olduğunu görebiliriz. Buradan da cevap $k = 2\sqrt{2}$ olur.

20. $1, 2, \ldots, n$ sayıları farkları 8 veya 14 olan sayılar aynı renkte olacak biçimde en az üç farklı renge boyanmışsa, n en fazla kaç olabilir?

Cevap: 19. 6 ve 14 sayıları birinci renge boyanmış olsunlar. Benzer şekilde 8, 16, 2, 10, 18, 4 ve 12 sayıları ikinci renge boyanmış olsunlar. Son olarak 7, 15, 1, 9, 17, 3, 11, 19, 5 ve 13 sayıları da üçüncü renge boyanmış olsunlar. $n \geq 20$ durumunda 20 sayısı hem birinci hem de ikinci renge boyanma zorundadır. Demek ki n' nin alabileceği en büyük değer 19' dur.

21. $|AB| = 2$ ve $|AD| = 2\sqrt{2}$ koşullarını sağlayan bir $ABCD$ dikdörtgeninde AD kenarının orta noktası M olmak üzere BM ile AC doğruları K de kesişiyor. Buna göre A, B, K noktalarından geçen çemberin yarıçapı kaçtır?

Cevap: 1. $|AK|/|AB| = \sqrt{2}/2$ ve $|BA|/|BC| = 2/(2\sqrt{2}) = \sqrt{2}/2$ olduğundan BAK ve CBA dik üçgenleri benzerdir (K.A.K.). Dolayısıyla $s(\widehat{ABK}) = s(\widehat{BCA})$ elde edilir. $s(\widehat{BAK}) = 90^\circ - s(\widehat{BCA})$ olduğundan $s(\widehat{AKB}) = 90^\circ$ olur. Sonuç olarak AKB dik üçgendir ve çevrel yarıçapı hipotenüs uzunluğunun ($|AB| = 2$ nin) yarısıdır.

22. 2016^2 sayısını bölüp 2016 yı bölmeyen 2016 dan küçük kaç pozitif tam sayı vardır?

Cevap: 47. $2016 = 2^5 3^2 7$ dir. O halde $2016^2 = 2^{10} 3^4 7^2$ dir. d pozitif tam sayısı 2016^2 nin 2016 dışında bir böleni olsun. O zaman d ve $2016^2/d$ sayılarından tam olarak biri 2016 dan küçüktür. Dolayısıyla 2016^2 ni bölüp 2016 dan küçük $(11 \cdot 5 \cdot 3 - 1)/2 = 82$ pozitif tam sayı vardır. Bu sayılardan $6 \cdot 3 \cdot 2 - 1 = 35$ tanesi 2016 yı böler. Sonuç olarak istenen şartı sağlayan $82 - 35 = 47$ sayı vardır.

23. x ve y gerçel sayılar olmak üzere $2x^2 - 2xy + 5y^2 - 6y$ ifadesinin alabileceği en küçük değer kaçtır?

Cevap: -2. $2x^2 - 2xy + 5y^2 - 6y = (x + y - 1)^2 + (x - 2y + 1)^2 - 2 \geq -2$ olur. Eşitlik durumu $(x, y) = (1/3, 2/3)$ iken sağlanır.

24. Uzunlukları $1, 2, \ldots, 20$ olan 20 çubuk n torbaya, herhangi torbadaki çubuklardan üçgen yapılamayacak şekilde dağıtılabiliyorsa, n en az kaç olabilir?

Cevap: 6. $n \leq 5$ ise 10, 11, ..., 20 saılarından üçü aynı torbada bulunacak ve bir üçgen yapılabilecek. $n = 6$ durumunda çubuklar üçgen yapılamayacak şekilde dağıtılabilir: $A = \{9, 10, 20\}, B = \{8, 11, 19\}, C = \{5, 6, 12, 18\}, D = \{3, 4, 13, 17\}, E = \{1, 2, 14, 16\}, F = \{7, 15\}$.

25. Bir $ABCD$ karesinde AB kenarının orta noktası E ve A noktasından DE doğrusuna inilen dikmenin ayağı F olmak üzere $|DF| = 4$ ise $|CF|$ kaçtır?

Cevap: $2\sqrt{5}$. F den CD ye inen dikme ayağı K olsun. Açılardan DAE ve FKD üçgenlerinin benzer olduğu görülür. $|AD| = 2|AE|$ olduğundan $|DE| = |AE|\sqrt{5}$ tir. Ayrıca ADE de Öklid bağıntılarından $|AE| = \sqrt{5}$ bulunur. Dolayısıyla $|FK| = 8/\sqrt{5}$ ve $|KD| = 4/\sqrt{5}$ elde edilir. Buradan da $|KC| = 2\sqrt{5} - 4/\sqrt{5} = 6/\sqrt{5}$ olduğu görülür ve FKC de Pisagor teoremi uygulamasından $|FC| = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$ elde edilir.

26. $1 \leq n \leq 100$ koşulunu sağlayan her n tam sayısı için tahtaya m^2+n ifadesinin 101 ile tam bölünmesini sağlayan en küçük m pozitif tam sayısı, böyle bir m yoksa -1 yazılıyor. Buna göre tahtaya yazılan sayıların toplamı kaçtır?

Cevap: 1225. 101 modunda 0 hariç tam olarak 50 tane tam kare vardır. Bu yüzden tahtada 50 tane -1 bulunur. Öte yandan -1 dışında yazılmış sayılar birbirinden farklı olur. (Çünkü $m_1 = m_2$ ise $-m_1^2 = -m_2^2$ olacağından karşılık gelen n değerleri de eşit olur.) En küçük pozitif m sayısını seçtiğimizden -1 dışındaki sayılar tam olarak $1, 2, \ldots, 50$ olmalıdır. Yani cevap $1 + 2 + \cdots + 50 - 50 = 1225$ olur.

27.

$$a^2 + b^2 + a^2b^2 = 2$$
$$ab(a + b - 1) = 1$$

denklem sistemini sağlayan a, b gerçel sayıları için $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}$ ifadesi aşağıdakilerden hangisine eşit olabilir?

Cevap: 1. $a^2 + b^2 + a^2b^2 = 2 = 2ab(a + b - 1)$ olduğundan $(a + b - ab)^2 = 0$ ve buradan da $a, b \neq 0$ olacağından $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} = 1$ olur.

28. Bir çember etrafında her birinde birer bilye bulunan n tane kutu bulunuyor. Her hamlede bir tane boş olmayan kutu seçiliyor ve bu kutudan bir bilye alınıp bu kutunun bir sağındaki veya bir solundaki kutuya aktarılıyor. Kaç $n \in \{6, 8, 14, 18, 21\}$ için çift sayıda hamle sonucunda tüm bilyeleri aynı kutuya toplayabiliriz?

Cevap: 2. $n = 8$ ve $n = 21$ durumlarında tüm bilyeler çift sayıda hamle sonucunda herhangi bir seçilmiş kutuya toplanabilir. Bunun için her bilyeyi bu seçilmiş kutuya mümkün olan en az hamleyle taşımak yeterli olacaktır. Şimdi $n = 4k + 2$ durumunda tüm bilyelerin çift sayıda hamle sonucunda aynı kutuya toplanamayacağını gösterelim. Kutuları saat yönünde 1,2,..., n sayılarıyla numaralandıralım. Her kutunun numarasının bu kutudaki bilye sayısıyla çarpımıyla elde edilen sayıların toplamı S olsun. Başlangıçta S tek sayıdır: $1 + 2 + \cdots + 4k + 2 = \frac{n(n+1)}{2} = (2k + 1)(2k + 3)$. n çift olduğundan S sayısının her hamlede tek sayı kadar değişeceği açıktır. Tüm bilyeler m numaralı kutuya toplanırsa $S = mn$ bir çift sayı olacak. Demek ki çift sayıda hamle sonucunda tüm bilyeler aynı kutuya toplanamaz.

29. Kenarortaylarının kesişim noktası G olan ve $|CA|^2 + |AB|^2 = 2|BC|^2$ koşulunu sağlayan bir ABC üçgeninde $s(\widehat{CAG}) = 15°$ ise $s(\widehat{BCG})$ aşağıdakilerden hangisi olabilir?

Cevap: 15°. $[BC]$ kenarının orta noktası D olsun. Kenarortay teoreminden $4|AD|^2 = 2(|AB|^2 + |CA|^2) - |BC|^2 = 3|BC|^2$ olduğundan $|DG| \cdot |DA| = |AD|^2/3 = |BC|^2/4 = |CD|^2$ olur ve buradan da DGC ile DCA üçgenleri benzer olur. Yani $s(\widehat{BCG}) = s(\widehat{CAG}) = 15°$ bulunur.

30. a ve b aralarında asal pozitif tam sayılar olmak üzere $(a + b, a - b)$, $(a + b, a^2 - ab + b^2), (a^2b + ab^2, a^3 + ab + b^3), (a + b, a^2 + 3ab + b^2)$, $(a^2 + b^2, a^2 - b^2 + 7ab)$ ikililerinden kaçı her zaman aralarında asaldır?

Cevap: 2. $(a, b) = (3, 1)$ ise $(a + b, a - b) = (4, 2)$. $(a, b) = (2, 1)$ ise $(a+b, a^2-ab+b^2) = (3, 3)$. $(a, b) = (2, 7)$ ise $(a^2+b^2, a^2-b^2+7ab) = (53, 53)$ ((2,7) çifti $(a^2+b^2)-(a^2-b^2+7ab) = b(2b-7a)$ eşitliğinden bulunabilir). Şimdi a^2b+ab^2 ve a^3+ab+b^3 sayılarının aralarında asal olduklarını gösterelim. p bir asal sayı olmak üzere, $p|ab(a+b)$ ve $p|a^3+ab+b^3 = (a+b)^3-3ab(a+b)+ab$ ise $p|(a + b)^3 + ab$ olur. $p|ab(a + b)$'den $p|ab$ veya $p|(a + b)$. $p|ab$ durumda genelliği bozmadan $p|a$ olsun. O zaman $p|(a + b)^3$, buradan $p|(a + b)$ ve son olarak da $p|b$ çelişkisi gelir. $p|(a + b)$ durumunda $p|(a + b)^3 + ab$'den $p|ab$ ve buradan da $p|a$ veya $p|b$ gelir. Genelliği bozmadan $p|a$ alırsak $p|b$ çelişkisi gelir. $a + b$ ve $a^2 + 3ab + b^2$ sayılarının aralarında asal olduklarını da benzer şekilde nı gösterebiliriz. p bir asal sayı olmak üzere, $p|(a + b)$ ve

$p|a^2+3ab+b^2=(a+b)^2+ab$ ise $p|ab$ olur. Genelliği bozmadan $p|a$ olsun. O zaman $p|(a+b)$'den $p|b$ çelişkisi gelir.

31. $(x^2+y^2-25)(x+y)+10xy=0$ eşitliğini sağlayan x,y gerçel sayıları için $x+y$ ifadesinin alabileceği kaç farklı tam sayı değeri vardır?

Cevap: 12. $(x^2+y^2-25)(x+y)+10xy = ((x+y)^2-2xy)(x+y)-25(x+y)+10xy = (x+y)((x+y)^2-25)-2xy(x+y-5) = (x+y-5)((x+y)(x+y+5)-2xy)-0$ olduğundan $x+y=5$ eşitliği sağlıyor. $((x+y)(x+y+5)-2xy)=0$ durumunda a bir tam sayısı için $x+y=a$ ve $xy=a(a+5)/2$ olacaktır. Bu denklemleri sağlayan x,y ikilileri $t^2-at+a(a+5)/2$ kuadratik denkleminin kökleridir. Bu nedenle diskriminant $D=a^2-2a(a+5)\geq 0$ ise x,y kökleri bulunur. $D\geq 0$ dan $-10\leq a\leq 0$ elde edilir. Sonuç olarak $x+y$ ifadesinin alabileceği değerler $-10,-9,\ldots,-1,0$ ve 5 dir.

32. $1,2,...,n$ sayıları işaretlenmiş olan bir sayı doğrusunda başlangıçta 1 sayısı üzerinde bir taş bulunuyor. Aslı ve Berk sırayla hamle yaparak bir oyun oynuyorlar. Sırası gelen oyuncu bir pozitif tam sayı seçiyor ve taşı seçtiği sayı kadar sağa veya sola kaydırarak bir başka işaretlenmiş noktanın üzerine yerleştiriyor. Her pozitif tam sayı en fazla bir kez seçilebiliyor ve hamle yapamayan oyuncu oyunu kaybediyor. Oyun $n=5,500,1000,1024,2016$ için birer kez oynanırsa, Aslı bu oyunların kaçını kazanmayı garantileyebilir?

Cevap: 4. Bir hamlede taş a kadar sağa kaydırılmışsa hamleyi a, a kadar sola kaydırılmışsa hamleyi $-a$ olarak gösterelim. $n=5$ durumunda oyunu Berk kazanıyor. Yapılan hamleler Aslının ilk hamlesine bağlı olarak (1,2,-3,4), (2,1,-3,4), (3,-1,2,4),(4,-3,1,2) veya (4,-3,2,1) olacaktır. $n=500,1000,1024,2016$ durumlarında ise Aslı önce $n-1$ sayısını seçiyor ve bundan sonra Berk'in seçtiği her k sayısına karşılık olarak $n-k-1$ sayısını seçerek oyunu kazanıyor.