TÜRKİYE BİLİMSEL VE TEKNOLOJİK ARAŞTIRMA KURUMU
30. Ulusal Matematik Olimpiyatı
İkinci Aşama Sınavı

21-22 Aralık 2022

ÇÖZÜMLER

1. Bir ABC üçgeninde BC kenarının orta noktası M, A ya ait iç açıortayın BC ile kesişimi K ve ABC nin çevrel çemberi ile ikinci kesişimi L olsun. $[BC]$ çaplı çember A köşesine ait dış açıortaya teğet ise KLM nin çevrel çemberine de teğet olduğunu gösteriniz.

Çözüm: A köşesinin dış açıortayının; $[BC]$ çaplı çembere teğet olduğu noktaya P, ABC nin çevrel çemberini ikinci kez kestiği noktaya R, BC doğrusu ile kesiştiği noktaya T diyelim. AL ve PM doğruları AT doğrusuna dik oldukları için birbirlerine paralel olurlar. Bu paralellikten, TPM üçgenine bakarsak $\dfrac{TK}{TM} = \dfrac{TA}{TP}$ elde edilir. T noktasının çemberlere göre kuvvetlerinden de $TB.TC = TP^2 = TA.TR$ olacağından, $\dfrac{TK}{TM} = \dfrac{TA}{TP} = \dfrac{TP}{TR}$ bulunur ve böylece PK ve RM nin paralel oldukları görülür. RL doğrusu $[BC]$ doğru parçasının orta dikmesi olduğundan, PK ve BC birbirlerine diktir. Buradan, $PKLM$ nin paralelkenar olduğu bulunur ve $PK = ML$ elde edilir. P noktasının BC doğrusuna göre yansıması Q olsun. İki çemberin Q noktasında birbirlerine teğet olduklarını göstereceğiz. Q zaten $[BC]$ çaplı çemberin üzerindedir. QK ve ML doğrularının ikisi de BC'ye dik ve $QK = PK = ML$ olduğundan dolayı $KQLM$ dikdörtgendir. Dolayısıyla Q noktası KLM nin çevrel çemberi üzerindedir. Q noktası bu İki çemberin merkezlerini birleştiren doğrunun da üzerinde yer aldığından dolayı bu iki çember Q noktasında teğettir.

2. k, n pozitif tam sayılar olmak üzere $k \geq n!$ ise

$$\phi(k) \geq (n-1)!$$

olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $\phi(k) < (n-1)!$ ise $k < n!$ olduğunu göstereceğiz. $k = q_1^{\alpha_1} \dots q_s^{\alpha_s}$ olsun ($q_1 < q_2 < \dots < q_s$). $\dfrac{\phi(k)}{k} \geq \dfrac{1}{n}$ olduğunu göstermemiz yeterlidir. $\dfrac{\phi(k)}{k} = \left(1 - \dfrac{1}{q_1}\right) \cdots \left(1 - \dfrac{1}{q_s}\right)$ olduğu için, eğer $\left(1 - \dfrac{1}{q_1}\right) \cdots \left(1 - \dfrac{1}{q_s}\right) \geq \dfrac{1}{n+1}$ olduğunu gösterirsek ispat biter. Her $t \geq 2$ için $q_t \geq t+1$ olduğundan,

$$\left(1 - \frac{1}{q_1}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{q_s}\right) \geq \left(1 - \frac{1}{2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{s+1}\right) = \frac{1}{s+1}$$

elde ederiz. O halde $\dfrac{1}{s+1} \geq \dfrac{1}{n+1}$ yani $n \geq s$ olduğunu gösterirsek ispat biter. Eğer $s > n$ olsaydı, k sayısının en az n tane asal böleni olurdu ve

$$\phi(k) \geq (q_1 - 1)(q_2 - 1) \cdots (q_n - 1) \geq 1 \cdot 2 \cdots (n-1) = (n-1)!$$

olurdu. Ancak bu baştaki varsayımımızla çelişir. Dolayısıyla $s \leq n$ olur ve ispat tamamlanır.

3. $a_1, a_2, \ldots, a_{2022}$ negatif olmayan gerçel sayıları $a_1 + a_2 + \ldots + a_{2022} = 1$ eşitliğini sağlıyor. En çok kaç (i, j) sıralı ikilisi için

$$a_i^2 + a_j \geq \frac{1}{2021}$$

olur?

Çözüm: Cevap: $2022^2 - 2022$. Örnek, sayıların 2021 tanesi $\dfrac{1}{2021}$ ve diğeri 0 iken elde ediliyor.

Genelliği bozmadan $a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_{2022}$ varsayabiliriz. $(i, j) = (1, 2022), (2, 2021), \ldots, (2022, 1)$ için gelen ifadelere bakacağız, çünkü bunların herhangi biri $\dfrac{1}{2021}$'den küçükse, indisleri bir arttırarak 2022 tane $\dfrac{1}{2021}$'den küçük sayı elde edebiliriz.

Diyelim ki $a_1^2 + a_{2022}, a_2^2 + a_{2021}, \ldots, a_{2022}^2 + a_1 \geq \dfrac{1}{2021}$ sağlanıyor. $a_1 + a_{2022}, a_2 + a_{2021}, \ldots, a_{2022} + a_1$ sayılarına bakalım. Bu sayıların toplamı 2'ye eşit, o halde öyle bir tanesi vardır ki değeri en fazla $\dfrac{2}{2022}$. Bu terim $a_k + a_{2023-k}$ olsun. $a_k = p$ ve $a_{2023-k} = q$ diyelim.

Lemma: a ve b negatif olmayan gerçel sayıları için $a + b \leq \dfrac{1}{3}$ ise, $(a^2+b)(b^2+a) \leq \left(\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2 + \dfrac{a+b}{2}\right)^2$ eşitsizliği sağlanır.
İspat: $a + b = 2x$ ve $ab = y$ olsun. $(a^2 + b)(b^2 + a) = a^2b^2 + ab + (a + b)(a^2 - ab + b^2) = y^2 + y + 2x(4x^2 - 3y) = y^2 + y + 8x^3 - 6xy \leq x^4 + 2x^3 + x^2$ olduğunu göstermek istiyoruz. Bu

$$y^2 + y(1 - 6x) - (x^4 - 6x^3 + x^2) \leq 0$$

eşitsiliğine denktir ve

$$(x^2 - y)(x^2 - 6x + 1 + y) \geq 0$$

olarak yazılabilir. $4(x^2 - y) = (a - b)^2$ olduğu için $y \leq x^2$'dir. $2x \leq 1/3$ olduğundan $x \leq 1/6$ ve buradan da $x + \frac{1}{x} > 6$ olur ve $x^2 - 6x + 1 \geq 0$ elde edilir. y negatif olmadığı için de $x^2 - 6x + 1 + y \geq 0$'dır ve eşitsizlik sağlanır. $\square$

Şimdi, toplamları $\dfrac{2}{2022}$'den büyük olmayan ikiliyi ele alalım. $\dfrac{2}{2022} < \dfrac{1}{3}$ olduğu için lemmadaki şart sağlanacak ve $(p^2 + q)(q^2 + p) \leq \left(\dfrac{2023}{2022^2}\right)^2 < \left(\dfrac{1}{2021}\right)^2$ olacak, dolayısıyla bu iki sayıdan biri $\dfrac{1}{2021}$'den küçük olmalı. Yani, her zaman $\dfrac{1}{2021}$'den küçük olan 2022 tane sayı bulabiliriz.

4. Hangi a gerçel sayıları için

$$\frac{x^3 + a}{y + z} = \frac{y^3 + a}{x + z} = \frac{z^3 + a}{x + y} = -3$$

olmasını sağlayan farklı x, y, z gerçel sayıları bulunur?

Çözüm: Cevap: $-2 < a < 0$ veya $0 < a < 2$.

$c = x + y + z$ dersek x, y, z sayıları $P(t) = t^3 - 3t + a + 3c$ polinomunun kökleridir. O halde Vieta teoreminden dolayı $x + y + z = 0$ dır, yani $c = 0$ olup $P(t) = t^3 - 3t + a$ dır. Dolayısıyla $P(t) = t^3 - 3t + a$ polinomunun üç farklı gerçel kökü vardır. Üstelik sorudaki ifadelerin paydaları 0'dan farklı olduğundan bu gerçel kökler 0'dan farklıdır. Öte yandan bu gözlemin tersi de doğrudur: $P(t) = t^3 - 3t + a$ polinomunun 0'dan ve birbirlerinden farklı üç gerçel kökü varsa bu köklere x, y, z dersek soruda verilen eşitlikler sağlanır.

Şimdi $a > 2$ durumunda pozitif t gerçel sayıları için $t^3 + a > t^3 + 2 = t^2 + 1 + 1 \geq 3t$ (AGO) olacağından $P(t)$ polinomunun pozitif kökü olmaz, yani üç gerçel kökü olamaz. Benzer şekilde $a < 2$ durumunda negatif kök olmaz ve yine üç gerçel kök bulunmaz. Ayrıca $a = 2$ ve $a = -2$ durumlarında sırasıyla $t = 1$ ve $t = -1$ çift katlı kök olur. Yine $a = 0$ durumunda köklerden biri 0 olur.

Bütün bu durumların dışında $-2 < a < 0$ veya $0 < a < 2$ dir. Nitekim $0 < a < 2$ durumunda $P(0) = a > 0$ ve $P(1) = a - 2 < 0$ olacağından $(-\infty, 0)$, $(0, 1)$ ve $(1, \infty)$ aralıklarında birer gerçel kök bulunur. Benzer şekilde $-2 < a < 0$ durumunda $(-\infty, -1)$, $(-1, 0)$ ve $(0, \infty)$ aralıklarında birer gerçel kök bulunur.

5. ABC üçgeninde $90 > \widehat{A} > \widehat{B} > \widehat{C}$ dir. Diklik merkezi H ve çevrel çember merkezi O olmak üzere HO ile BC doğrularının kesişimi T, AHO üçgeninin çevrel çemberinin merkezi ise X olsun. H noktasının TX doğrusuna göre yansımasının ABC nin çevrel çemberi üzerinde olduğunu gösteriniz.

Çözüm: AH nin çevrel çember ile ikinci kesişimi S, (AHO) çemberinin çevrel çember ile ikinci kesişimi M olsun. $OA = OM$ olduğundan $\angle MHO = \angle OHS$ olur, yani M ve S noktaları OH doğrusuna göre yansıma durumundadır. O halde $[MH]$ nin orta dikmesi, $[SH]$ nin orta dikmesi (yani BC doğrusu) ve HO noktadaştır; yani $[MH]$ nin orta dikmesi T den geçer. O halde H nin TX doğrusuna göre yansıması M dir.

6. 2022 öğrencinin bulunduğu bir okulda tatil boyunca her gün ya müze gezisi ya da doğa gezisi düzenleniyor. Hiçbir öğrenci aynı tür geziye ikinci kez katılmıyor ve tüm gezilere farklı sayıda öğrenci katılıyor. İki geziye beraber katılan iki öğrenci bulunmadığına göre, toplam gezi sayısının alabileceği en büyük değeri bulunuz.

Çözüm: Cevap: 77. Öncelikle koşulları sağlayan 77 günlük bir gezi programı örneği verelim. $26 \cdot 71 = 2002$ öğrenci alınıp bunların $26 \cdot 51 = 1326$ sı A sınıfına konulsun ve her birine

$$A = \{(i, j) : i, j \in \mathbb{Z}_+,\ \ i + j \leq 52\}$$

kümesinden farklı birer ikili verilsin, kalan $26 \cdot 26 = 676$ sı ise B sınıfına konulsun ve her birine

$$B = \{(i, j) : i, j \in \mathbb{Z}_+,\ \ i \leq 26, j \leq 26\}$$

kümesinden farklı birer ikili verilsin. Sonra $1 \leq k \leq 77$ olmak üzere k-nci günde

(i) $k \leq 51$ ise A sınıfından $i = 52 - k$ koşulunu sağlayan k öğrenci müze gezisine gitsin,

(ii) $k \geq 52$ ise A ve B sınıflarından $j = 78 - k$ koşulunu sağlayan toplam k öğrenci doğa gezisine gitsin.

Şimdi de koşulları sağlayan n günlük bir gezi programı için $n \leq 77$ olduğunu gösterelim. En kalabalık 52 gezi grubu $M_1, M_2, \ldots, M_k, D_{k+1}, \ldots, D_{52}$ olsun (M_i ler müze gezisi gruplarını, D_i ler ise doğa gezisi gruplarını göstersin). Koşullardan dolayı $|M_i \cap D_j| \leq 1$ dir ve $i \neq j$ için $|M_i \cap M_j| = 0$ ve $|D_i \cap D_j| = 0$ dır. O halde

$$\sum |M_i| + \sum |D_i| =$$
$$|M_1 \cup \ldots \cup M_k \cup D_{k+1} \cup \ldots \cup D_{52}| + \sum |M_i \cap D_j| \leq$$
$$2022 + k(52 - k) \leq 2698 < 26 \cdot 104$$

tür. Öte yandan tüm gezi gruplarında farklı sayıda öğrenci bulunduğundan

$$\sum |M_i| + \sum |D_i| \geq n + (n-1) + \ldots + (n - 51) = (2n - 51) \cdot 26$$

dır. Dolayısıyla $2n - 51 < 104$ olup $n \leq 77$ dir.

Not 1: Çözümde $n \leq 77$ nin ispatlandığı kısımda en kalabalık 52 gruba bakmak yerine herhengi bir $46 \leq m \leq 58$ sayısı için en kalabalık l gruba bakmak da aynı sonuca ulaştırır.

Not 2: Soruda 2022 yerine herhangi bir m sayısı olursa cevap $n(n+1) \leq 3m$ koşulunu sağlayan en büyük n tam sayı değeri olur.