Türkiye Bilimsel ve Teknolojik Araştırma Kurumu

22. Ulusal Matematik Olimpiyatı
İkinci Aşama Sınavı

15-16 Kasım 2014

Çözümler

1. Bir torbada üstlerine 1 den 2014 e kadar tam sayılar yazılmış 1007 siyah ve 1007 beyaz top bulunuyor. Her adımda torbadan bir top çekerek masanın üstüne koyuyoruz ve istersek, o an masanın üstünde bulunan toplardan farklı renklerdeki herhangi ikisini seçip diğer bir torbaya koyabiliyoruz. Bunu yaparsak, bu iki topun üstlerinde yazılı olan sayıların farkının mutlak değeri kadar puan kazanıyoruz. 2014 adım sonunda en fazla kaç puan toplamayı garantileyebileceğimizi belirleyiniz.

Çözüm: Cevap: 1007^2.

1007^2 den fazla puan toplamayı garantileyemeyeceğimizi gösterelim. Seçilmiş top ikilileri seçilme sırasına göre $(a_1, b_1), (a_2, b_2), \ldots, (a_l, b_l)$ olsun. Burada $a_i > b_i$ ve $l \leq 1007$. O zaman elde edilen puan en fazla

$$\sum_{i=1}^{l}(a_i - b_i) = \sum_{i=1}^{l} a_i - \sum_{i=1}^{l} b_i \leq \sum_{i=1008}^{2014} i - \sum_{i=1}^{1007} i = 1007^2$$

olacaktır.

Şimdi her durumda 1007^2 puan kazanabileceğimizi gösterelim. Üstlerine $1, \ldots, 1007$ sayıları yazılmış topları birinci ve üstlerine $1008, \ldots, 2014$ sayıları yazılmış topları ikinci gruba dahil edelim. İlk 1007 adımda herhangi bir top ikilisi seçmezsek bundan sonraki her hamlede farklı gruplardan ve farklı renkli bir top ikilisi seçilebileceğini gösterelim. Masa üzerine ilk 1008 top yerleştirildikten sonra masa üzerinde farklı renkli ve farklı grubun elemanı olan en az bir top ikilisi bulunacaktır. Bu top ikililerinden herhangi birini seçip masadan kaldıralım. $i < 2014$ olmak üzere, $1008, 1009, \ldots, i$ adımlarda farklı renkli ve farklı grupların elemanı olan top ikililerin masadan alındığını varsayalım. i. adımdan sonra masa üzerinde $2014 - i$ tane top bulunacaktır. $(i + 1)$. hamlede ilk önce masa üzerine yeni bir top yerleştiriyoruz. İlk i hamle sonucunda her renk için; masa üzerinden kaldırılmış top sayısı $i - 1007$ ve masa üzerinden kaldırılmamış top sayısı $2014 - i$ dir. Her grup için bu grubun masa üzerinden kaldırılmamış eleman sayısı da $2014 - i$ dir. Buna göre, masa üzerinde farklı renkli ve farklı grubun elemanı olan en az bir top ikilisi bulunacaktır. Sonuç olarak bu yöntemle 2014 adım sonucunda masadaki tüm toplar alınacaktır. i. adımda masadan alınan top ikilisi $a_i > b_i$ olmak üzere (a_i, b_i) olarak işaretleyelim. Buna göre, elde edilen toplam puan

$$\sum_{i=1008}^{2014}(a_i - b_i) = \sum_{i=1008}^{2014} a_i - \sum_{i=1008}^{2014} b_i = \sum_{1} - \sum_{2}.$$

olacaktır. Her hamlede alınan iki top farklı grupların elemanları olduğuna göre, $\sum_1$ toplamındaki sayılar kümesi $\{1008, \ldots, 2014\}$ ve $\sum_2$ toplamındaki sayılar kümesi $\{1, \ldots, 1007\}$ olacaktır. Sonuç olarak $\sum_1 - \sum_2 = 1007^2$ olur.

2. $x^3 = 3^y 7^z + 8$ eşitliğini sağlayan tüm (x, y, z) pozitif tam sayı üçlülerini bulunuz.

Çözüm: Cevap: Sadece $(11, 3, 2)$.

Eşitliğin sağ tarafındaki ifade tek sayı olduğuna göre x sayısı da tek sayıdır. Eşitliği $(x-2)(x^2+2x+4) = 3^y 7^z$ şeklinde yazalım ve $d = ebob(x-2, x^2+2x+4)$ olsun. $d|(x-2)$ $\Rightarrow d|(x^2-4x+4)$ ve $d|(x^2+2x+4) \Rightarrow d|6x$. $d|(6x-12) \Rightarrow d|12$. d bir tek sayı olduğuna göre, $d = 1$ veya $d = 3$ olmak zorundadır. Çözümün devamını dört durum inceleyerek sürdüreceğiz.

Durum 1: $x - 2 = 3^y$ ve $x^2 + 2x + 4 = 7^z$. İlk eşitlikten $x \equiv 2 \pmod 3$ gelir ve ikinci eşitlikte bunu kullanırsak $1 + 4 + 4 \equiv 1 \pmod 3$ çelişkisi elde edilir.

Durum 2: $x - 2 = 7^z$ ve $x^2 + 2x + 4 = 3^y$. İlk eşitlikten $x \equiv 0 \pmod 3$ gelir ve ikinci eşitlikte bunu kullanırsak $0 + 0 + 1 \equiv 0 \pmod 3$ çelişkisi elde edilir.

Durum 3: $x - 2 = 3 \cdot 7^z$ ve $x^2 + 2x + 4 = 3^{y-1}$. İkinci eşitlikte $x = 3 \cdot 7^z + 2$ yazarsak $9 \cdot 7^{2n} + 18 \cdot 7^n + 12 = 3^{y-1}$ elde ederiz. $y = 1$ ve $y = 2$ durumlarında çözüm yoktur. $y > 2$ ise her iki tarafı 3 ile bölersek $3 \cdot 7^{2n} + 6 \cdot 7^z + 4 = 3^{y-2}$ gelir. Buradan $0+0+1 \equiv 0 \pmod 3$ çelişkisi elde edilir.

Durum 4: $x-2 = 3^{y-1}$ ve $x^2+2x+4 = 3 \cdot 7^z$. İkinci eşitlikte $x = 3^{y-1}+2$ yazarsak $(3^{y-1}+3)^2+3 = 3 \cdot 7^z$ elde ederiz. $y = 1$ ve $y = 2$ durumlarında çözüm yoktur. $y > 2$ ise $0+3 \equiv 3 \cdot (-1)^z \pmod 4$ gelir. Buna göre, z bir çift sayıdır. $(3^{y-1}+3)^2+3 = 3 \cdot 7^z$ de $z = 2l$ yazıp sadeleştirirsek $3^{y-1}(3^{y-2}+2) = (7^l-2)(7^l+2)$ elde ederiz. $7^l - 2$ sayısı 3 ile bölünmüyor. Buna göre, bir pozitif q tam sayısı için

$$7^l + 2 = 3^{y-1} q \quad \text{ve} \quad 7^l - 2 = \frac{3^{y-2}+2}{q} \tag{1}$$

eşitlikleri sağlanır. $q > 1$ olsun. (1) deki eşitlikleri taraf tarafa çıkarırsak

$$4 = 3^{y-1} q - \frac{3^{y-2}+2}{q} \tag{2}$$

gelir. $q \geq 2$ olduğu için (2) den

$$4 \geq 2 \cdot 3^{y-1} - \frac{3^{y-2}+2}{2} = \frac{11 \cdot 3^{y-2}}{2} - 1 > 5 \cdot 3^{y-2} - 1 \geq 4$$

çelişkisi gelir. O zaman $q = 1$ olmak zorundadır: $4 = 3^{y-1} - 3^{y-2} - 2$. Buna göre, tek çözüm $x = 11, y = 3, z = 2$ olur.

3. D, E, F noktaları bir ABC üçgeninin sırasıyla, $[BC]$, $[CA]$, $[AB]$ kenarları üstünde olmak üzere, AD, BE, CF doğruları P noktasında kesişiyor ve A köşesinden geçen bir ℓ doğrusu ile $[DE$ ve $[DF$ ışınları sırasıyla, Q ve R noktalarında kesişiyor. $[DB$ ışını üstündeki bir M noktası ile $[DC$ ışını üstündeki bir N noktası için,

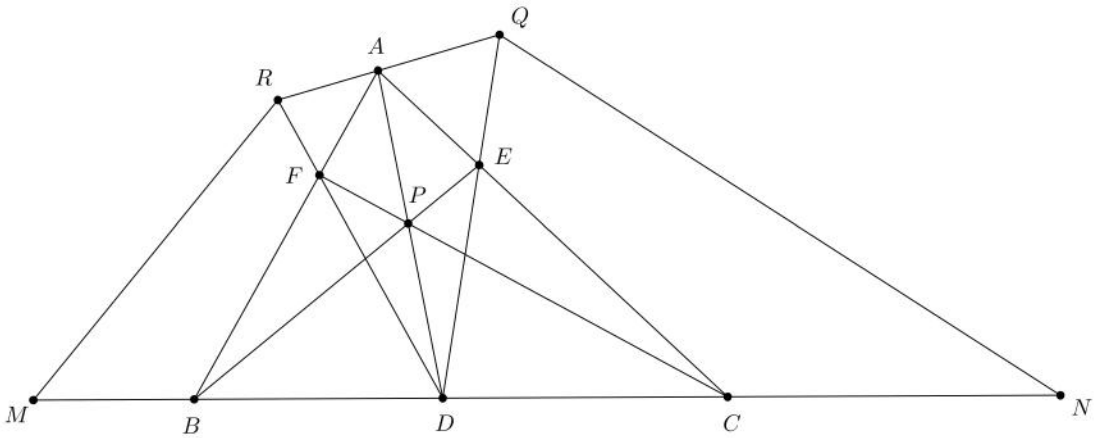
$$\frac{|QN|^2}{|DN|} + \frac{|RM|^2}{|DM|} = \frac{(|DQ| + |DR|)^2 - 2|RQ|^2 + 2|DM| \cdot |DN|}{|MN|}$$

eşitliği sağlanıyorsa, AD ve BC doğrularının birbirine dik olduğunu gösteriniz.

Çözüm: Çözüme aşağıdaki iddiayı ispatlayarak başlayalım.

İddia: $RDNQ$ ve $QDMR$ dörtgenleri paralelkenardır ve $DR = DQ$.

İspat: $DQ = x, DR = y, RQ = z, QN = p, RM = q, DM = u, DN = v, RN = e$ ve $QM = f$ olsun. $RDNQ$ ve $QDMR$ dörtgenlerindeki paralelkenar eşitsizliğinden



$$y^2 + v^2 + p^2 + z^2 \geq x^2 + e^2 \quad \text{ve} \quad x^2 + u^2 + q^2 + z^2 \geq y^2 + f^2$$

elde edilir. Bu iki eşitsizliği toplayarak

$$u^2 + v^2 + p^2 + q^2 + 2z^2 \geq e^2 + f^2 \tag{1}$$

buluruz. Stewart teoreminden

$$e^2 = v^2 + uv + \frac{(u+v)y^2 - q^2 v}{u} \quad \text{ve} \quad f^2 = u^2 + uv + \frac{(u+v)x^2 - p^2 u}{v}$$

eşitlikleri sağlanır. Bu eşitlikleri (1) ile birleştirirsek

$$u^2 + v^2 + p^2 + q^2 + 2z^2 \geq (u+v)^2 + \frac{(u+v)y^2 - q^2 v}{u} + \frac{(u+v)x^2 - p^2 u}{v}$$

olur ve böylece

$$2(z^2 - uv) \geq (u+v)\left(\frac{x^2 - p^2}{v} + \frac{y^2 - q^2}{u}\right) = (u+v)\left(\frac{x^2}{v} + \frac{y^2}{u}\right) - (u+v)\left(\frac{p^2}{v} + \frac{q^2}{u}\right)$$

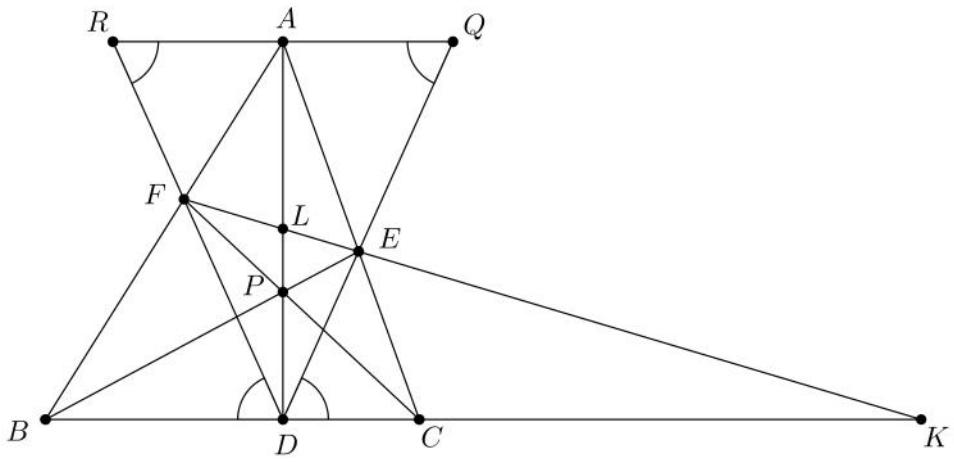
elde ederiz. Cauchy-Schwarz eşitsizliğinden

$$(u+v)\left(\frac{x^2}{v} + \frac{y^2}{u}\right) \geq (x+y)^2$$

bulunur. Dolayısıyla

$$2(z^2 - uv) \geq (x+y)^2 - (u+v)\left(\frac{p^2}{v} + \frac{q^2}{u}\right) \quad \text{ve} \quad \frac{p^2}{v} + \frac{q^2}{u} \geq \frac{(x+y)^2 - 2z^2 + 2uv}{u+v} \tag{2}$$

elde ederiz. Sorudaki verilerden ötürü (2)'de eşitlik olmalı. O halde kullandığımız tüm eşitsizliklerde eşitlik sağlanmalı. Sonuç olarak $RDNQ$ ve $QDMR$ dörtgenleri paralelkenar olmalı. Ayrıca, $z = u = v$



olduğundan ve kullandığımız Cauchy-Schwarz eşitsizliğinde eşitlik durumu sağlandığından $x = y$ elde ederiz ve iddia ispatlanmış olur.

QR ve BC doğruları paralel olması ve $DR = DQ$ eşitliğinden ötürü $\angle EDC = \angle DQR = \angle DRQ = \angle FDB$ olur. EF ve BC doğrularının kesişimi K olsun. (Bu iki doğru paralel ise doğruların sonsuzda kesiştiğini varsayıyoruz.) Genelliği bozmadan C noktasını B ve K arasında varsayalım. Menelaus ve Ceva teoremlerinden sırasıyla

$$\frac{KC}{KB} \cdot \frac{BF}{FA} \cdot \frac{AE}{EC} = 1 \quad \text{ve} \quad \frac{DC}{DB} \cdot \frac{BF}{FA} \cdot \frac{AE}{EC} = 1$$

elde edilir. Sonuç olarak $\dfrac{KC}{KB} = \dfrac{DC}{DB}$ olur ve dolayısıyla B, D, C, K noktaları harmoniktir. AP ve EF doğrularının kesişimi L olsun. AB, AD, AC, AK doğruları bir harmonik kalem oluşturduğundan F, L, E, K noktaları da harmoniktir. O zaman

$$\frac{LF}{LE} = \frac{KF}{KE} \qquad (3)$$

sağlanır. DC doğrusu FDE üçgeninde bir dış açıortaydır ve dış açıortay teoreminden

$$\frac{EK}{FK} = \frac{ED}{FD} \qquad (4)$$

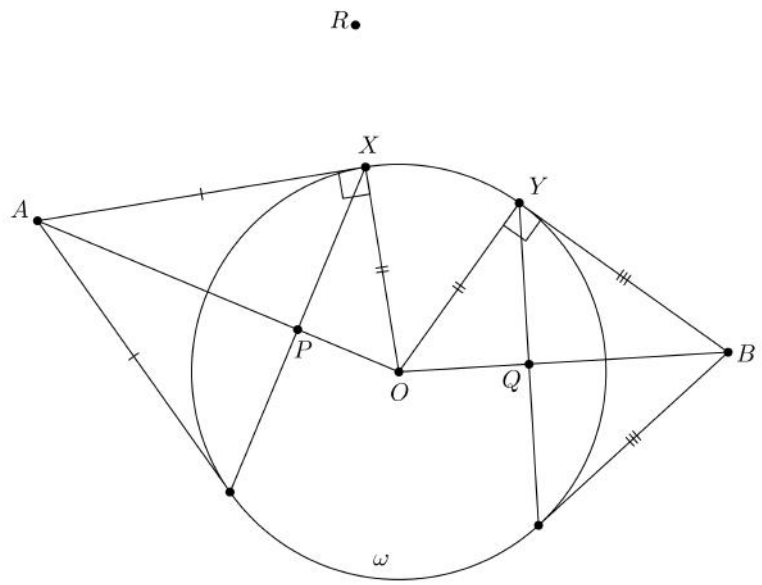
elde edilir. (3) ve (4)'ü kullanarak $\frac{EL}{FL} = \frac{ED}{FD}$ elde ederiz. O halde DL doğrusu FDE üçgeninde bir iç açıortaydır. Böylece AD ve BC doğrularının dik oldukları görülür ve ispat tamamlanır.

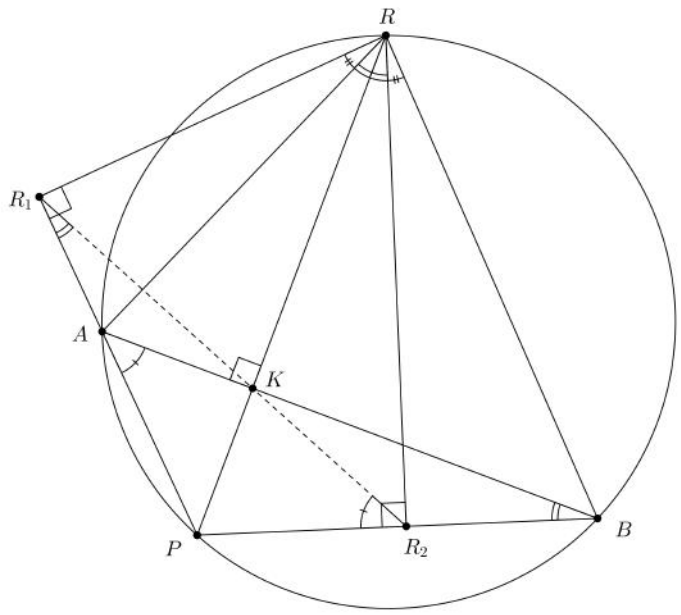
4. Bir çemberin birbirine paralel olmayan iki kirişinin orta noktaları P ile Q ve bu kirişlerin her birinin uç noktalarından çembere çizilen teğet doğruların kesişim noktaları sırasıyla, A ve B dir. ABP üçgeninin diklik merkezinin AB doğrusuna göre simetriği olan R noktasından AP, BP, AQ, BQ doğrularına inilen dikmelerin ayakları sırasıyla, R_1, R_2, R_3, R_4 noktaları ise,

$$\frac{|AR_1|}{|PR_1|} \cdot \frac{|PR_2|}{|BR_2|} = \frac{|AR_3|}{|QR_3|} \cdot \frac{|QR_4|}{|BR_4|}$$

olduğunu kanıtlayınız.

Çözüm: Çember ω, çemberin merkezi O ve resimdeki gibi X ve Y teğet noktaları olsun. $\angle OPX = \angle OXA = 90^\circ$ olduğundan OPX ve OXA üçgenleri benzerdir ve $OP \cdot OA = OX^2$. Benzer şekilde OQY ve OYB üçgenleri benzerdir ve $OQ \cdot OB = OY^2$. Buradan $OP \cdot OA = OQ \cdot OB$ ve dolayısıyla A, P, Q, B noktalarının çemberdeş olduğu elde edilir. Diğer taraftan R noktasının ABP üçgeninin çevrel çemberi üzerinde olduğu biliniyor. Buradan A, P, Q, B, R noktalarının da çemberdeş olduğu elde edilir.





AB ve PR doğruları K noktasında kesişsin. Simson doğrusuna göre, R_1, K, R_2 noktaları doğrudaştır. Açıları yazarak $\angle AR_1K = \angle ARK = \angle ABP$ ve $\angle KAP = \angle KR_2P$ elde edilir. Buradan PAB ve PR_2R_1 üçgenlerinin benzer oluğu ve dolayısıyla $\dfrac{PR_2}{PR_1} = \dfrac{AP}{BP}$ elde edilir.
$\angle RBR_2 = \angle RAR_1$ ve $\angle R_2RB = \angle R_1RA$ olduğundan, RAR_1 ve RBR_2 üçgenleri benzerdir. Buradan

$\dfrac{AR_1}{BR_2} = \dfrac{AR}{BR}$ bulunur. Sonuç olarak

$$\frac{AR_1}{PR_1} \cdot \frac{PR_2}{BR_2} = \frac{AP}{BP} \cdot \frac{AR}{BR} \qquad (1)$$

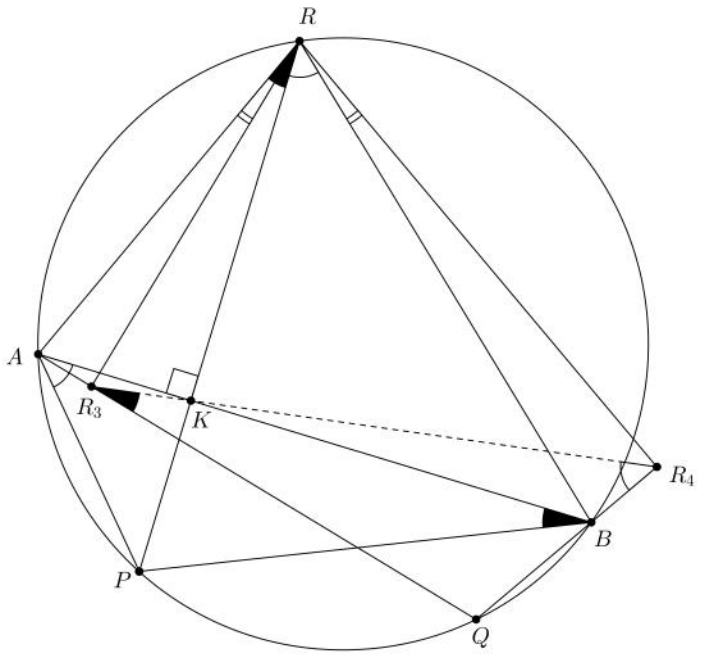
olur. Yine Simson doğrusuna göre, R_3, K, R_4 noktaları doğrudaştır. Açıları yazarsak

$$\angle KR_3Q = \angle KRA = \angle PBA \quad \text{ve} \quad \angle KR_4Q = \angle KRB = \angle PAB$$

elde ederiz. Buna göre, APB ve R_4QR_3 üçgenleri benzerdir. Sonuç olarak $\dfrac{QR_4}{QR_3} = \dfrac{AP}{BP}$ olur. $\angle RAR_3 = \angle RBR_4$ ve $\angle ARR_3 = \angle BRR_4$ olduğuna göre ARR_3 ve BRR_4 üçgenleri benzerdir ve dolayısıyla $\dfrac{AR_3}{BR_4} = \dfrac{AR}{BR}$ olur. Sonuç olarak

$$\frac{AR_3}{QR_3} \cdot \frac{QR_4}{BR_4} = \frac{AP}{BP} \cdot \frac{AR}{BR} \qquad (2)$$

bulunur. (1) ve (2) eşitlikleri çözümü tamamlıyor.



5. Hangi n pozitif tam sayıları için,

$$\{a_i + \frac{(-1)^i}{a_i} : 1 \leq i \leq n\} = \{a_i : 1 \leq i \leq n\}$$

koşulunu sağlayan birbirinden ve sıfırdan farklı $a_1, a_2, \ldots, a_n$ gerçel sayılarının bulunduğunu belirleyiniz.

Çözüm: Cevap: 1'den büyük tek tam sayılar.

Koşulları sağlayan bir n çift sayısının ve $a_1, \ldots, a_n$ gerçel sayılarının bulunduğunu varsayalım. O zaman her $1 \leq i \leq n$. için $a_i + \dfrac{(-1)^i}{a_i} = a_{\sigma(i)}$ olacak şekilde $\{1, 2, \ldots, n\}$'nin bir σ permütasyonu vardır. O halde her i için

$$a_i^2 - a_i a_{\sigma(i)} = (-1)^{i+1} \qquad (1)$$

sağlanır. (1)'deki eşitliğin 2 katı her i için toplanırsa

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i - a_{\sigma(i)})^2 = 2 \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} = 0$$

elde edilir. Dolayısıyla her i için $i = \sigma(i)$ olmalı ve buradan $\frac{(-1)^i}{a_i} = 0$ çelişkisi gelir. Sonuç olarak n çift sayı olamaz.

n'nin 1 olamayacağı açık. n, 1'den büyük bir tek tam sayı olsun. $x > 0$ olmak üzere, $a_1 = 1 + x$ ve her $1 \leq i \leq n$. için $a_{i+1} = a_i + (-1)^i / a_i$ for every $1 \leq i \leq n$.olsun. $a_{n+1} = a_1$ ve $a_1, \ldots, a_n$ farklı sayılar olacak şekilde bir x gerçel sayısının bulunduğunu göstereceğiz. i tek and $a_i > 1$ ise, $a_{i+2} = a_i + 1/(a_i^3 - a_i) > a_i$ olur. O zaman, tümevarımla $a_1 < a_3 < \cdots < a_n$ olduğu kolayca görülür. Ayrıca, i çift ve $a_i > 0$ ise, $a_{i+2} = a_i + 1/(a_i^3 + a_i) > a_i$ olur. O halde $a_2 = (x^2 + 2x)/(1 + x) > 0$ olduğundan, tümevarımla $a_2 < a_4 < \cdots < a_{n+1}$ olduğu kolayca elde edilir. Sonuç olarak, $a_{n+1} = a_1$ olacak şekilde bir x gerçel sayısının bulunduğunu gösterirsek ispat tamamlanır. x sayısı 0'a yaklaştıkça $a_1 \to 1$ ve $a_2 \to a_1 - 1/a_1 \to 0$. O halde $x \to 0$ iken

$$a_{n+1} - a_1 \geq a_4 - a_1 = 1/(a_2^3 + a_2) - 1/(1 + x) \to +\infty$$

olur ve dolayısıyla yeterince küçük x için $a_{n+1} > a_1$ sağlanır.
$a_2 > x$ ve i çiftken

$$a_{i+2} = a_i + 1/(a_i^3 + a_i) < a_i + 1/a_i^3 \leq a_i + 1/a_2^3$$

olduğu için $a_{n+1} < a_2 + (n-1)/(2x^3)$ elde edilir. Öte yandan,

$$a_1 - a_2 - (n-1)/(2x^3) = 1/(1+x) - (n-1)/(2x^3) = (2x^3 - (n-1)(1+x))/(2x^3(1+x))$$

ifadesi x'in yeterince büyük değerlerinde pozitif olduğu için $a_{n+1} < a_1$ eşitsizliği x'in yeterince büyük değerlerinde sağlanır. O zaman $a_{n+1} - a_1$ ifadesi pozitif x sayıları üzerinde sürekli bir fonksiyon olduğu için ara değer teoreminden 0 değerini alır. Böylece $a_{n+1} = a_1$ eşitliğini sağlayan en az bir $x > 0$ gerçel sayısı vardır.

6. Otuz altı hava alanından herhangi ikisi arasındaki karşılıklı uçuşlardan her biri beş havayolu şirketinden biri tarafından yapılacaktır. Ulaştırma Bakanlığı her hava alanına, o hava alanında aralarında aktarma yapılabilen aynı şirkete ait her uçuş ikilisi için 1 milyon lira destek vermeye karar veriyor. Bakanlığın bu uygulama için harcayacağı paranın en az ne kadar olabileceğini belirleyiniz.

Çözüm: Cevap: $6 \cdot \binom{36}{2}$.

Soruyu çizge kavramını kullanarak yeniden formüle edelim: *Her kenarı 5 renkten birine boyalı olan 36 köşeli bir tam çizgede aynı renkli "açı" sayısı en az kaç olabilir?*

n köşeli bir tam çizgenin her kenarı r renkten birine boyalı olsun. $i = 1, \ldots, r$ olmak üzere, her v köşesi için bu köşeye bağlı olan i renkli kenar sayısı $f(v, i)$ olsun. Buna göre, v köşesine bağlı aynı

renkli "açı" sayılarının toplamı $\sum_{i=1}^{r}\binom{f(v,i)}{2}$ olacaktır. r boyutlu $(f(v,1),\ldots,f(v,r))$ ve $(1,1,\ldots,1)$ vektörlerine Cauchy-Schwarz eşitsizliğini uygularsak

$$\sum_{i=1}^{r}\binom{f(v,i)}{2}=\frac{1}{2}((\sum_{i=1}^{r}f^2(v,i))-n+1)\geq\frac{1}{2}(\frac{(n-1)^2}{r}-(n-1)) \qquad (1)$$

elde ederiz. (1) eşitsizliklerini tüm n köşeleri için toplarsak aynı renkli "açı" sayısının en az

$$\binom{n}{2}(\frac{n-1}{r}-1)$$

olduğunu görürüz. Buradan $n=36, r=5$ durumunda $6\cdot\binom{36}{2}$ cevabı elde ediliyor.

Şimdi aynı renkli toplam "açı" sayısının $6\cdot\binom{36}{2}$ olduğu bir örnek verelim. 6 köşeli bir G_0 tam çizgesinin köşelerini $1,2,\ldots,6$ sayılarıyla numaralandıralım ve i ile j köşelerini birleştiren (i,j) kenarını $(i+j) \pmod 5$ rengine boyayalım. Şimdi 6 köşeli bir G_0 tam çizgesinin her köşesine G_0 çizgesinin birer kopyasını yerleştirelim. Buna göre, G_0 çizgesinin i ve j köşelerini birleştiren kenar t renkli ise, elde edilen 36 köşeli çizgede i ve j köşelerine yerleştirilmiş G_0' ve G_0'' çizgelerinin $a\in G_0'$ ve $b\in G_0''$ köşelerini birleştiren kenar da t renginde olsun. Bir $b\in G_0'$ köşesi için aynı renkli açı oluşturan (a,b,c) köşe üçlülerinin sayısını hesaplayalım. $a\in G_0'$ durumunda tam olarak bir G_0'' için $c\in G_0''$ olmak üzere tüm (a,b,c) üçlüleri aynı renkli açı oluşturacaktır, buradan $5\cdot 6$ durum elde ediliyor. $a,c\notin G_0'$ durumunda ise herhangi bir G_0'' alırsak $a,c\in G_0''$ olmak üzere tüm (a,b,c) üçlüleri aynı renkli açı oluşturacaktır, buradan $5\cdot\binom{6}{2}$ durum elde ediliyor. Sonuç olarak

$$36\cdot\left(5\cdot 6+5\cdot\binom{6}{2}\right)=6\cdot\binom{36}{2}$$

tane (a,b,c) üçlüsü elde ediliyor.