Türkiye Bilimsel ve Teknolojik Araştırma Kurumu

23. Ulusal Matematik Olimpiyatı
İkinci Aşama Sınavı

5-6 Aralık 2015

Çözümler

1. m ve n pozitif tam sayılar olmak üzere,

$$k = \frac{(m+n)^2}{4m(m-n)^2+4}$$

sayısı bir tam sayı ise, k nın bir tam kare olduğunu gösteriniz.

Çözüm : $m = n$ durumunda $k = m^2$ bir tam kare oluyor. $m \neq n$ durumunu inceleyelim. $x = m + n$ ve $n > m$ ise $y = n - m$, $n < m$ ise $y = m - n$ olsun. Her iki durumda da $x \equiv y \pmod 2$. $n > m$ ise $m = \frac{x-y}{2}$ ve $n < m$ ise $m = \frac{x+y}{2}$ olduğuna göre, $k = \dfrac{x^2}{2(x \pm y)y^2 + 4}$ olur. Buradan x'e göre ikinci dereceden

$$x^2 - 2ky^2x \pm 2ky^3 - 4k = 0. \tag{1}$$

denklemini elde diyoruz. x bir tam sayı olduğuna göre, (1) denkleminin diskriminantı bir tam kare olacaktır: $\dfrac{\Delta}{4} = k^2y^4 \mp 2ky^3 + 4k$ bir tam karedir.

$y = 1$ ise (1) den $k = \frac{x^2}{2x+2}$ ya da $k = \frac{x^2}{2x+6}$. Birinci durumda $2k = x - 1 + \frac{1}{x+1}$ bir tam sayı değildir. İkinci durumda $2k = x - 3 + \frac{9}{x+3}$ ve tek seçenek $x = 6$ olur. Fakat bu duurmda $x \equiv y \pmod 2$ sağlanmıyor.

$y \neq 1$ durumunda

$$(y^2k \mp y - 1)^2 < \frac{\Delta}{4} < (y^2k \mp y + 1)^2 \tag{2}$$

eşitsizliklerini ispatlayalım.

Birinci eşitsizlik: $(y^2k \mp y - 1)^2 = k^2y^4 + y^2 + 1 \mp 2ky^3 - 2ky^2 \pm 2y < k^2y^4 \mp 2ky^3 + 4k$. Bu da $(y \pm 1)^2 < k(2y^2 + 4)$ ve sonuç olarak $k > \dfrac{(y \pm 1)^2}{2y^2+4}$ eşitsizliğine denkdir. $2y^2 + 4 > (y \pm 1)^2 \Leftrightarrow (y \mp 1)^2 + 2 > 0$ olduğundan ispat tamamlanmıştır.

İkinci eşitsizlik: $k^2y^4 \mp 2ky^3 + 4k < (y^2k \mp y + 1)^2 = k^2y^4 + y^2 + 1 \mp 2ky^3 + 2ky^2 \mp 2y$. Bu da $4k < (y \mp 1)^2 + 2ky^2$ eşitsizliğine denkdir. $y \geq 2$ olduğundan ispat tamamlanmıştır.

$y \neq 1$ olduğundan (2) den $\dfrac{\Delta}{4} = (y^2k \mp y)^2$ elde ediyoruz. Buna göre, $4k = y^2$ ve k bir tam karedir.

Not: k sayısı sonsuz sayıda (m,n) ikilisi için bir tam sayı oluyor.

2. x, y ve z herhangi ikisinin toplamı 1 den farklı gerçel sayılar olmak üzere,

$$\frac{(x^2+y)(x+y^2)}{(x+y-1)^2}+\frac{(y^2+z)(y+z^2)}{(y+z-1)^2}+\frac{(z^2+x)(z+x^2)}{(z+x-1)^2}\geq 2(x+y+z)-\frac{3}{4}$$

olduğunu gösteriniz. Eşitlik durumunu sağlayan tüm (x,y,z) gerçel sayı üçlülerini bulunuz.

Çözüm: İlk önce toplamları 1 den farklı her x, y gerçel sayı ikilisi için

$$\frac{(x^2+y)(x+y^2)}{(x+y-1)^2}\geq x+y-\frac{1}{4} \qquad (1)$$

eşitlizliğini ispatlayalım. $x+y=a$ ve $xy=b$ değişkenlerine geçersek (1) eşitsizliği

$$4\left(b^2+b(1-3a)+a^3\right)\geq (a-1)^2(4a-1)$$

şekline dönüşüyor ve

$$4\left(b^2+b(1-3a)+a^3\right)-(a-1)^2(4a-1)=(2b+3a-1)^2\geq 0$$

olduğu için ispat tamamlanıyor. Eşitlik durumu $2b+3a=2xy+3(x+y)=1$ iken sağlanıyor. (x,y), (y,z) ve (z,x) ikilileri için (1) eşitsizliklerini toplarsak istenilen

$$\frac{(x^2+y)(x+y^2)}{(x+y-1)^2}+\frac{(y^2+z)(y+z^2)}{(y+z-1)^2}+\frac{(z^2+x)(z+x^2)}{(z+x-1)^2}\geq 2(x+y+z)-\frac{3}{4}$$

elde edilir. Eşitlik durumunu sağlayan x, y ve z sayı üçlüleri

$$\begin{aligned}2xy+3(x+y)&=1\\2yz+3(y+z)&=1\\2zx+3(z+x)&=1\end{aligned}$$

denklem sisteminin kökleridir. İlk iki denklemi taraf tarafa çıkarırsak

$$(x-z)(2y+3)=0$$

elde ederiz. $y=-3/2$ olması durumunda ikinci denklemden dolayı $1=2yz+3y+3z=3y$ ve buradan da $y=1/3$ çelişkisi elde edilir. Bu nedenle $x=z$ olmalıdır. Benzer işlemler sonucu $x=y=z=u$ ve buradan da $2u^2+6u=1$ elde edilir. Sonuç olarak eşitliği sağlayan iki üçlü bulunuyor:

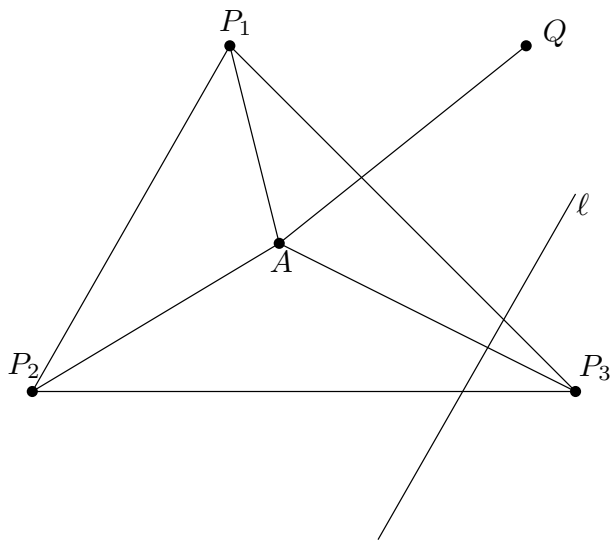
$$x=y=z=\frac{3+\sqrt{7}}{2} \quad \text{ve} \quad x=y=z=\frac{3-\sqrt{7}}{2}\,.$$

3. $n\geq 4$ olmak üzere düzlemde n nokta veriliyor. Tüm nokta ikilileri doğru parçalarıyla birleştirildikten sonra hiçbir diğer doğru parçasıyla uç noktaları dışında kesişmeyen doğru parçalarının

sayısı en çok kaç olabilir?

Çözüm : Cevap: $2n-2$.

Diğer hiçbir doğru parçasıyla uç noktaları dışında kesişmeyen doğru parçalarına *özel* doğru parçası diyelim. $n \geq 4$ için özel doğru parçalarının sayısının en fazla $2n-2$ olduğunu tümeverımla gösterelim. $n=4$ durumu barizdir.



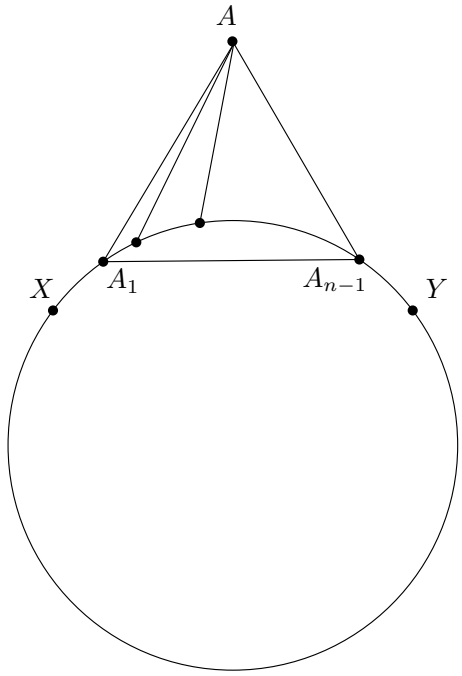
Verilen n nokta bir konveks n-genin koşeleri ise özel doğru parça sayısı tam olarak n oluyor (n-genin kenarları) ve bu durumda $n < 2n-2$. Aksi taktirde bu n noktadan biri olan A noktası bu n noktanın konveks örtüsünün (convex hull) sınırı üzerinde olmayacaktır. Kalan $n-1$ noktanın bazı ikililerini tüm kapalı alanlar üçgen olacak şekilde birleştirelim. (triangulation). A noktası bu üçgenlerin birinin içinde bulunmak zorundadır. Bu üçgen $P_1P_2P_3$ olsun. $P_1P_2P_3$ üçgeninin içinde kalan $n-3$ noktadan A dışında başka nokta bulunmadığı açıktır. A noktası atılırsa tümevarım varsayımına göre en fazla $2(n-1)-2 = 2n-4$ özel doğru parçası olabilir. A yeniden yerleştirildiğinde sadece $[AP_1], [AP_2], [AP_3]$ özel doğru parçaları eklenebilir (bir köşesi A olan diğer doğru parçaları $P_1P_2P_3$ üçgeninin kenarlarından biri ile kesişiyorlar).

A noktası atıldıktan sonra $[P_1P_2], [P_1P_3], [P_2P_3]$ doğru parçalarının en az biri özel değilse, bir ℓ doğru parçası $P_1P_2P_3$ üçgenini kesmelidir (ℓ nin bir uç noktası P_1, P_2 ve P_3 noktalarından biri olabilir). O zaman ℓ $[AP_1], [AP_2], [AP_3]$ doğru parçalarının en az birini kesecektir. Demek ki A yeniden yerleştirildiğinde $[AP_1], [AP_2], [AP_3]$ doğru parçalarından en fazla ikisi özel olabiliyor ve özel doğru parça sayısı en fazla $2n-4+2 = 2n-2$ oluyor.

A noktası atıldıktan sonra $[P_1P_2], [P_1P_3], [P_2P_3]$ doğru parçalarının hepsi özel ise, A noktası yeniden yerleştirildiğinde $n > 4$ olduğu için $P_1P_2P_3$ üçgeninin dışında bir Q noktası bulunuyor ve $[AQ]$ doğru parçası $[P_1P_2], [P_1P_3], [P_2P_3]$ doğru parçalarının en az birini kesiyor. Dolayısıyla $[P_1P_2], [P_1P_3], [P_2P_3]$ doğru parçalarının en az biri özel olma özelliğini kaybediyor. Sonuç olarak yine özel doğru parça sayısı en fazla $2n-4+2 = 2n-2$ oluyor.

Son olarak $2n-2$ özel doğru parçasının olabileceğini gösterelim. Bir çember ve bu çember dışında bir A noktası alalım. A noktasından bu çembere çizilen teğetler çemberle X ve Y noktalarında kesişmiş olsun. Küçük XY yayı üzerinde herhangi $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}$ noktalarını alalım. O zaman $[A_1A_2], [A_2A_3], \ldots, [A_{n-1}A_1], [AA_1], [AA_2], \ldots, [AA_{n-1}]$ doğru parçalarının her biri özel doğru parçası

olacaktır.



4. 2015 tablonun gösterildiği bir sergide her katılımcı bir tablo ikilisi seçip tahtaya yazıyor. Sonra Sahte Sanatçı (S.S.) tahtada yazılı ikililerden bazılarını seçip, bu ikililerin her birinde tablolardan herhangi birini daha güzel olarak işaretliyor. Daha sonra Sanatçının Yardımcısı (S.Y.) her adımında, tahtada A, B den daha güzel ve B, C den daha güzel olarak belirtilmişse, tahtada A nın C den daha güzel olduğunu belirtiyor. S.S., tahtaya hangi ikililer yazılmış olursa olsun en fazla k ikiliyi kıyaslayarak S.Y. nin sonlu adım sonucunda tahtadaki tüm ikilileri kıyaslamasını sağlayabiliyorsa, k nın alabileceği en küçük değer nedir?

Çözüm: Tablo sayısı n olduğu durumda cevap $k = n - 1$ dir.

Soruyu n tablo için çizge teorisi kavramlarını kullanarak yeniden formüle edelim. G çizgesinin köşe sayısı n olsun. İlk aşamada bu çizgenin en fazla k tane kenarını yönlendiriyoruz. İkinci aşamanın her adımında $\overrightarrow{(v_1, v_2)}$ ve $\overrightarrow{(v_2, v_3)}$ birer yönlü kenar olmak üzere, çizgenin (v_1, v_3) kenarını $\overrightarrow{(v_1, v_3)}$ yönlü kenarına dönüştürüyoruz. İkinci aşama sonucunda her G cizgesinin tüm kenarları yönlü yapılabiliyorsa, k nın alabileceği en küçük değer nedir? Her bağlantılı çizge için cevabın $k = n - 1$ olduğunu gösterelim (l tane bağlantılı alt çizgeden oluşan çizgeler için cevap $k = n - l$ olacaktır). G nin bir ağaç olduğu durumda $n - 1$ kenarın her biri ilk aşamada yönlendirilmek zorundadır ve buna göre $k \geq n - 1$ olur. Şimdi $k \leq n - 1$ olduğunu gösterelim. Bir yönlü çizgede v_0 köçesinden her köşeye bir veya birkaç yönlü kenarla ulaşılıyorsa, v_0 köçesine *kök köşe* diyelim. Çözümü tamamlamak için n üzerinden tümevarımla daha kuvvetli bir önerme ispatlayacağız:

Lemma. v_0, n köşeli bağlantılı bir G çizgesinin herhangi bir köşesi olsun. Başlangıçta G çizgesinin en fazla $k = n-1$ kenarı öyle yönlendirilebilir ki, v_0 köşesi ikinci aşamadan sonra bir kök köşeye dönüşsün.

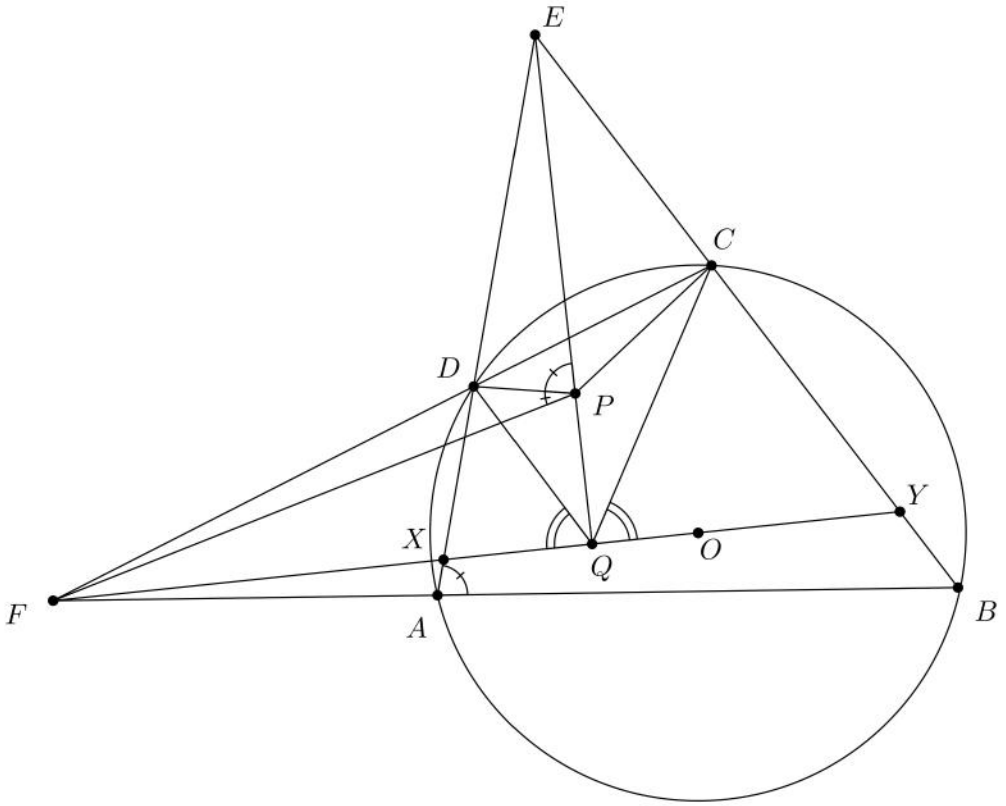
İspat. v_0 köşesini ve bu köşeden çıkan tüm kenarları sildikten sonra kalan çizge $G_1, \ldots, G_m$ bağlantılı alt çizgelere parçalanmış olsun. G çizgesinin her $1 \leq i \leq m$ için $v_i \in G_i$ olmak üzere bir (v_0, v_i) kenarı vardır. Tümevarım varsayımına göre, her $1 \leq i \leq m$ için G_i çizgesinin en fazla $|G_1| - 1$ kenarı öyle

yönlendirilebilir ki, v_i köşesi ikinci aşamadan sonra bir *kök* köşeye dönüşsün. Her $1 \leq i \leq m$ için (v_0, v_i) kenarını v_0 dan v_i'ye doğru yönlendirirsek v_0 köşesi G çizgesinin kök köşesine dönüşür. Bu durumda ilk aşamada yönlendirilmiş kenar sayısı en fazla $\sum_{i=1}^{m}(|G_i| - 1) + (m - 1) = n - 1$ olur.

Not: Lemma en uzun yönlü yolun uzunluğu üzerinden tümevarımla ya da G çizgesinin n köşeli bir agacının kenarlarını yönlendirerek de ispatlanabilir.

5. En büyük iç açısı D olan bir $ABCD$ kirişler dörtgeninde BC ve AD doğruları E, AB ve CD doğruları ise F noktasında kesişiyorlar. $ABCD$ dörtgeninin iç bölgesinde $\angle EPD = \angle FPD = \angle BAD$ olacak şekilde bir P noktası alınıyor. $ABCD$ nin çevrel çemberinin merkezi O olmak üzere, FO doğrusu AD, EP, BC doğrularını sırasıyla X, Q, Y noktalarında kesiyor. $\angle DQX = \angle CQY$ ise $\angle AEB = 90°$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm:



İlk önce Q noktasının tek olduğunu göstereceğiz. $\angle DXQ = \alpha, \angle CYQ = \beta, \angle DQX = \angle CQY = \theta$ olsun. DXQ ve CYQ üçgenlerinde sinüs teoremi uygularsak

$$\frac{|QX|}{|DX|} = \frac{\sin(\alpha + \theta)}{\sin\theta} = \sin\alpha\cot\theta + \cos\alpha$$

$$\frac{|QY|}{|CY|} = \frac{\sin(\beta + \theta)}{\sin\theta} = \sin\beta\cot\theta + \cos\beta$$

elde ederiz. Buradan

$$\frac{|QX|}{|DX| \cdot \sin\alpha} - \frac{|QY|}{|CY| \cdot \sin\beta} = \cot\alpha - \cot\beta \tag{1}$$

gelir. Diğer yandan,

$$|QX| + |QY| = |XY|. \tag{2}$$

(1) ve (2) den $|QX|$ ve $|QY|$ tek türlü belirleniyor ($\alpha, \beta, |DX|, |CY|$ ve $|XY|$ sayıları Q noktasına bağlı değildir). Buna göre, Q noktası tek türlü belirleniyor.

AC ve BD köşegenlerininn kesişim noktası K, EK ve FO, AB, CD nin kesişim noktaları sırasıyla L, M, N olsun. Brocard teoremine göre, $EL \perp FO$. AC, BD, EM doğruları noktadaş olduğuna göre, F, A, M, B noktaları harmoniktir. Demek ki EF, EA, EM, EB bir harmonik kalemdir ve buna göre de F, D, N, C noktaları da harmoniktir. $\angle NLF = 90°$ olduğuna göre, bilinen lemmadan $\angle DLN = \angle CLN$ ve $\angle DLX = \angle CLY$ gelir. Q noktası tek olduğuna göre, $Q \equiv L$ olur.

F, D, N, C noktaları harmonik olup $\angle FPD = \angle DPN$ dir. Yine bilinen lemmadan $\angle DPC = 90°$. $\angle ECD = \angle DAB = \angle EPD$ olduğuna göre, $ECPD$ bir kirişler dörtgenidir ve buradan da $\angle AEB = \angle DEC = 180° - \angle DPC = 90°$ elde edilir.

6. n ile aralarında asal olan her a pozitif tam sayısı için $2n^2 \mid a^n - 1$ olmasını sağlayan tüm n pozitif tam sayılarını bulunuz.

Çözüm: Cevap: $2, 6, 42$ ve 1806.

$p > 2$ n nin bir asal böleni (varsa) olsun ve p nin n yi bölen en büyük kuvveti m olsun: $v_p(n) = m$. a sayısını $a \equiv p + 1 \pmod{p^2}$ ve $a \equiv 1 \pmod{\frac{n}{p^m}}$ olacak şekilde seçelim. $p \mid a - 1$ olduğundan $v_p(a^n - 1) = v_p(a - 1) + v_p(n) = m + 1$ oluyor. $a^n - 1$ sayısı n^2 ile bölünüyor. O zaman $m + 1 \geq 2m \Rightarrow m \leq 1 \Rightarrow m = 1$. Şimdi m sayısı 2 nin n yi bölen en büyük kuvveti olsun : $v_2(n) = m$. a sayısını $a \equiv 5 \pmod 8$ ve $a \equiv 1 \pmod{\frac{n}{2^m}}$ olacak şekilde seçelim. $4 \mid a - 1$ olduğundan $v_2(a^n - 1) = v_2(a - 1) + v_2(n) = m + 2$. Yukarıdakine benzer şekilde $m + 2 \geq 2m + 1 \Rightarrow m \leq 1$. Sonuç olarak n kare bölensiz bir sayıdır.

p asal sayısı n nin bir çarpanı olmak üzere, $\pmod p$ de bir ilkel köke, $\pmod{\frac{n}{p}}$ de ise 1 e denk olan bir a sayısı ele alalım. $p \mid a^n - 1$ olduğundan $p - 1 \mid n$ elde ediyoruz. Yani $p \mid n \Rightarrow p - 1 \mid n$. Bu koşulu sağlayan tüm kare-bölensiz sayıların sarudaki koşulu sağlıyor. $p_1 < p_2 < \ldots < p_k$ olmak üzere, $n = p_1 \cdot p_2 \cdots p_k$ olsun. Her i için $p_i - 1 \mid n \Rightarrow p_i - 1 \mid p_1 \cdot p_2 \cdots p_{i-1}$. $n = 1$ koşulları sağlamıyor: $k \geq 1$. Şimdi

$p_1 - 1 \mid 1 \Rightarrow p_1 = 2$.
$i = 2$ için $p_2 - 1 \mid p_1 = 2$ ve $p_2 > p_1 = 2$ olduğundan $p_2 = 3$.
$i = 3$ için $p_3 - 1 \mid p_1 \cdot p_2 = 6$ ve $p_3 > p_2 = 3$ olduğundan $p_3 = 7$.
$i = 4$ için $p_4 - 1 \mid p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 = 42$ ve $p_4 > p_3 = 7$ olduğundan $p_4 = 43$.
$i = 5$ için $p_5 - 1 \mid p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot p_4 = 1806$ ve $p_5 > p_4 = 43$, çelişki ($1807 = 13 \cdot 139$, $603 = 3 \cdot 7 \cdot 43$, $259 = 7 \cdot 37$, $87 = 3 \cdot 29$). Demek ki $k \leq 4$ olmak zorundadır.
Buna göre, n nin alabileceği tüm değerler: $2, 6, 42$ ve 1806 dır.