Türkiye Bilimsel ve Teknolojik Araştırma Kurumu

# 26. Ulusal Matematik Olimpiyatı
# İkinci Aşama Sınavı

24 - 25 Kasım 2018

Çözümler

**1.**

$$x^2 + y^2 + x + y = xy(x+y) - \frac{10}{27}$$
$$|xy| \leq \frac{25}{9}$$

koşullarını sağlayan tüm $(x, y)$ gerçel sayı ikililerini bulunuz.

**Çözüm :** Cevap: $(-1/3, -1/3)$ ve $(5/3, 5/3)$.

Öncelikle

$$x^2 + y^2 + x + y - xy(x+y) + 2 = -(1-x)(1-y)(x+y+2)$$

ve buradan da

$$(1-x)(1-y)(x+y+2) = \frac{64}{27}$$

elde ederiz. $k^3 = 1-x$, $\ell^3 = 1-y$, $m^3 = x+y+2$ olsun. Bu durumda $k^3+\ell^3+m^3 = 4$ ve $k\ell m = \frac{4}{3}$ olur. Buradan da $k^3 + \ell^3 + m^3 = 3k\ell m$ elde ederiz. Çarpanlara ayırarak

$$(k+\ell+m)((k-\ell)^2 + (\ell-m)^2 + (m-k)^2) = 0$$

ve böylece $k+\ell+m = 0$ veya $k = \ell = m$ olur. $k = \ell = m$ için tek çözüm $x = y = -1/3$'tür. $k+\ell+m = 0$ olsun. Bu durumda $k\ell m = 4/3$ eşitliğini kullanarak $k\ell(k+\ell) = -4/3$ buluruz. Öte yandan $|xy| = |(1-k^3)(1-\ell^3)| \leq 25/9$ eşitsizliği geçerlidir. $u = k+\ell$, $v = k\ell$ olarak tanımlayalım. Bu durumda

$$uv = -\frac{4}{3} \quad \text{ve} \quad |(1-k^3)(1-\ell^3)| = |u^3 - v^3 + 3| \leq \frac{25}{9}$$

elde ederiz. Bu iki koşuldan

$$-\frac{52}{9} \leq u^3 - v^3 = u^3 + \frac{64}{27u^3} \leq -\frac{2}{9} \quad (*)$$

buluruz. AGO eşitsizliğinden $u^2 \geq 4v = -16/(3u)$ ve buradan da $u > 0$ veya $u^3 \leq -16/3$ elde ederiz. $(*)$ dan dolayı $u > 0$ olamaz. Yani $u^3 \leq -16/3$ olmalıdır. Bu durumda ise $4/(9u^3) + 1 \geq 11/12 > 0$ olduğundan

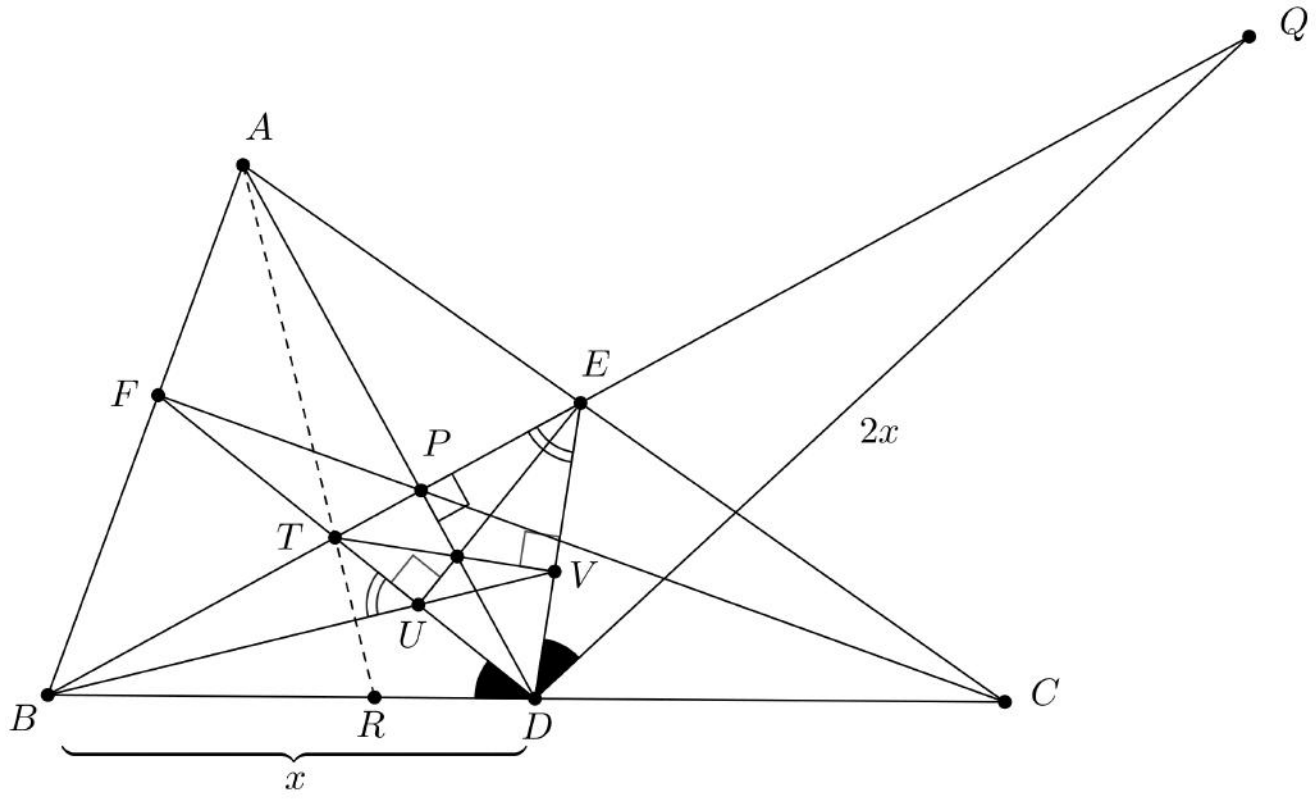
$$u^3 + \frac{64}{27u^3} + 52/9 = \left(u^3 + \frac{16}{3}\right)\left(\frac{4}{9u^3} + 1\right) \leq 0$$

buluruz. Son gözlemi kullanarak $(*)$ ancak $u^3 = -16/3$ ve $u^2 = 4v$ iken sağlanır. Bu ise $k = \ell = -\sqrt[3]{2/3}$ anlamına gelir. Bu durumda tek çözüm $x = y = 5/3$ olarak bulunur. Bulunan her

iki çözüm de soruda verilen şartları sağlar.

**2.** Bir $ABC$ üçgeninin iç bölgesinde bir $P$ noktası alınıyor. $AP, BP, CP$ doğruları $BC, CA, AB$ kenarlarını sırasıyla $D, E, F$ noktalarında kesiyor. $[BE$ ışını üzerinde bir $Q$ noktası $E \in [BQ]$ ve $m(\widehat{EDQ}) = m(\widehat{BDF})$ olacak şekilde alınıyor. $BE \perp AD$ ve $|DQ| = 2|BD|$ ise $m(\widehat{FDE}) = 60°$ olduğunu gösteriniz.

**Çözüm 1:**




$FD \cap BP = T$ ve $AT \cap BC = R$ olsun. Menelaus ve Seva teoremlerinden

$$\frac{BC}{DC} = \frac{BF}{AF} \cdot \frac{AP}{PD} = \frac{BR}{DR}$$

elde ederiz. Bu ise $B, R, D, C$ noktalarının harmonik olduğunu gösterir. $AB, AR, AD, AC$ doğruları bir harmonik kalem oluşturur ve buradan da $B, T, P, E$ noktaları da harmonik olur. $DTE$ üçgeninde $E$ ve $T$ köşelerinden karşı kenarlara inen dikme ayakları sırasıyla $U$ ve $V$ olsun. $[DP]$ yükseklik olduğundan $EU, TV, DP$ doğruları noktadaştır. $B, T, P, E$ noktaları harmonik olduğundan Seva teoremini kullanarak

$$\frac{EV}{VD} \cdot \frac{DU}{UT} = \frac{EP}{TP} = \frac{EB}{TB}$$

elde ederiz. Yani $B, U, V$ noktaları $TDE$ üçgeni için Menelaus teoremini sağlar ve $B, U, V$ noktadaş olur. $T, U, V, E$ noktaları çemberdeş olduğundan $\angle TUB = \angle TED$ ve buradan da $\triangle BUD \sim \triangle QED$ elde ederiz. Benzerlik oranı $BD/QD = 1/2$ olduğundan $UD/ED = 1/2$ olur. $EU \perp UD$ olduğundan $\angle UDE = \angle FDE = 60°$ olur ve ispat biter.

**Çözüm 2:** Çözüm 1'de olduğu gibi $B, T, P, E$ noktalarının harmonik olduğunu gösterebiliriz. $\angle FDB = \angle QDE = \alpha$, $\angle PDT = \beta$, $\angle EDP = \theta$ olsun. Buradan

$$\frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta+\theta)} \cdot \frac{TD}{DE} = \frac{BT}{BE} = \frac{PT}{PE} = \frac{\sin\beta}{\sin\theta} \cdot \frac{TD}{DE}$$

ve böylece

$$\frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta+\theta)} = \frac{\sin\beta}{\sin\theta}$$

elde ederiz. Trigonometrik dönüşüm uygulayarak

$$\sin\alpha \cdot \sin\theta = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\theta) - \cos(\alpha+\theta)\right)$$
$$\sin(\alpha+\beta+\theta) \cdot \sin\beta = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha+\theta) - \cos(\alpha+2\beta+\theta)\right)$$

buluruz. Buradan da

$$\cos(\alpha+\theta) = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\theta) + \cos(\alpha+2\beta+\theta)\right) = \cos(\alpha+\beta)\cdot\cos(\beta+\theta)$$

olur. $0^\circ < \alpha+\beta < 90^\circ$, $0^\circ < \alpha+\theta < 90^\circ$ ve $DP \perp BQ$ olduğundan

$$\frac{\cos(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\theta)} = \frac{DQ}{BD} = 2$$

sonucuna ulaşırız. Son olarak $\cos(\beta+\theta) = 1/2$ ve $\angle FDE = \beta+\theta = 60^\circ$ olur ve ispat biter.

**3.** $a_1, a_2, \ldots$ dizisi her $n$ pozitif tam sayısı için $\sum_{i=1}^{n} a_{\lfloor \frac{n}{i} \rfloor} = n^{10}$ şartını sağlıyor. $c$ herhangi bir pozitif tam sayı olmak üzere, her $n > 1$ pozitif tam sayısı için $\dfrac{c^{a_n} - c^{a_{n-1}}}{n}$ oranının tam sayı olduğunu gösteriniz.

**Çözüm:** $n > 1$ olmak üzere sorudaki eşitliği $n$ ve $n-1$ için yazıp taraf tarafa çıkardığımızda

$$\sum_{i=1}^{n-1}(a_{\lfloor \frac{n}{i} \rfloor} - a_{\lfloor \frac{n-1}{i} \rfloor}) + a_1 = n^{10} - (n-1)^{10}$$

elde ederiz. $b_1 = a_1 = 1$ ve her $n > 1$ için $b_n = a_n - a_{n-1}$ tanımlarsak, elde ettiğimiz eşitliği

$$\sum_{i|n} b_{\frac{n}{i}} = n^{10} - (n-1)^{10} \Rightarrow \sum_{i|n} b_i = n^{10} - (n-1)^{10}$$

şeklinde ifade edebiliriz. Bu eşitliğin $n > 1$ için geçerli olduğu gibi $n = 1$ için de geçerli olduğu görülür.

Şimdi, literatürde bilinen $\mu$-fonksiyonunun tanımını hatırlayalım:

$$\mu(n) = \begin{cases} (-1)^k & n \text{ kare-bölensiz ve } n \text{ nin asal bölen sayısı } k \text{ ise} \\ 0 & n \text{ kare-bölensiz değilse} \end{cases}$$

Yine bilinen şu teoremi hatırlayalım:

**Teorem.** *$x_1, x_2, \ldots$ bir dizi olsun. Her $n$ pozitif tam sayısı için $y_n = \sum_{i|n} x_i$ olmak üzere her $n$ pozitif tam sayısı için*

$$x_n = \sum_{i|n} \mu(i) \cdot y_{\frac{n}{i}}$$

*sağlanır. $n > 1$ ise, $n$ nin asal bölenlerini $p_1, p_2, \ldots, p_k$ ile gösterirsek bu eşitlik daha açık halde*

$$x_n = y_n - y_{\frac{n}{p_1}} - \ldots - y_{\frac{n}{p_k}} + y_{\frac{n}{p_1 \cdot p_2}} + \ldots + y_{\frac{n}{p_{k-1} \cdot p_k}} - \ldots$$

*şeklinde ifade edilir.*

Şimdi, $\sum_{i|n} b_i = n^{10} - (n-1)^{10} = (10n^9 - 45n^8 + \ldots - 45n^2 + 10n - 1)$ olduğunu biliyoruz, o halde yukarıdaki teoremden her $n$ pozitif tam sayısı için

$$b_n = \sum_{i|n} \mu(i) \cdot \left( \left(\frac{n}{i}\right)^{10} - \left(\frac{n}{i} - 1\right)^{10} \right)$$

$$= 10 \cdot \sum_{i|n} \mu(i) \cdot \left(\frac{n}{i}\right)^9 - 45 \cdot \sum_{i|n} \mu(i) \cdot \left(\frac{n}{i}\right)^8 + \ldots + 10 \cdot \sum_{i|n} \mu(i) \cdot \left(\frac{n}{i}\right) - \sum_{i|n} \mu(i)$$

olduğunu görürüz. $n > 1$ için, $n$ nin asal bölenlerini $p_1, p_2, \ldots, p_k$ ile gösterirsek, her $r$ pozitif tam sayısı için

$$\sum_{i|n} \mu(i) \cdot \left(\frac{n}{i}\right)^r = n^r \cdot \left(1 - \frac{1}{p_1^r}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{p_k^r}\right)$$

$$= \phi(n) \cdot n^{r-1} \cdot \left(1 + \frac{1}{p_1} + \ldots + \frac{1}{p_1^{r-1}}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{p_k} + \ldots + \frac{1}{p_k^{r-1}}\right)$$

ifadesini buluruz. Ayrıca $n > 1$ olduğundan $\sum_{i|n} \mu(i) = 0$ olacaktır, o halde

$$b_n = \phi(n) \cdot \left( 10n^8 \prod \left(1 + \frac{1}{p} + \ldots + \frac{1}{p^8}\right) - 45n^7 \prod \left(1 + \frac{1}{p} + \ldots + \frac{1}{p^7}\right) + \ldots - 45n \prod \left(1 + \frac{1}{p}\right) + 10 \right)$$

olduğunu görürüz. Bu förmülden şu iki sonucu çıkarabiliriz:

(i) Her $n$ pozitif tam sayısı için $\phi(n) \mid b_n$. $n = 1$ için açık ve $n > 1$ için bulduğumuz förmülden görülüyor.

(ii) Her $n$ pozitif tam sayısı için $b_n > 0$, dolayısıyla $a_n \geq n$. Çünkü, $b_1 = 1 > 0, b_2 = 2^{10} - 2 > 0, b_3 = 3^{10} - 2^{10} - 1 > 0, b_4 = 4^{10} - 3^{10} - 2^{10} + 1 > 0$ dır ve $n \geq 5$ için bulduğumuz förmülden,

$$\frac{b_n}{\phi(n)} > n^7 \cdot (10n - 45) \prod \left(1 + \frac{1}{p} + \ldots + \frac{1}{p^7}\right) + \ldots + n \cdot (120n - 45) \prod \left(1 + \frac{1}{p}\right) + 10 > 0 \Rightarrow b_n > 0$$

olduğu görülür.

$n > 1$ olmak üzere $n$ nin asal bölenlerini $c$ yi bölenler ve bölmeyenler diye iki kümeye ayıralım ve $n = m \cdot s$ diye yazalım. Burada $m$ sayısı, $c$ nin yeterince büyük kuvvetlerini böler ve $s$ ise $c$ ile aralarında asaldır. Buna göre, $\phi(n) \mid b_n$ ve $a_{n-1} \geq n - 1$ olduğundan, $m \mid c^{n-1} \mid c^{a_{n-1}}$ ve $s \mid c^{\phi(s)} - 1 \mid c^{\phi(n)} - 1 \mid c^{b_n} - 1$ olur. Yani, $n \mid c^{a_{n-1}} \cdot (c^{b_n} - 1) = c^{a_n} - c^{a_{n-1}}$ olur.

**4.** Bir $ABC$ üçgeninde $A$ köşesine ait iç açıortay $BC$ kenarına teğet olan dış teğet çemberi $D \in [AE]$ olacak şekilde $D$ ve $E$ noktalarında kesiyor. $\dfrac{|AD|}{|AE|} \leq \dfrac{|BC|^2}{|DE|^2}$ olduğunu gösteriniz.

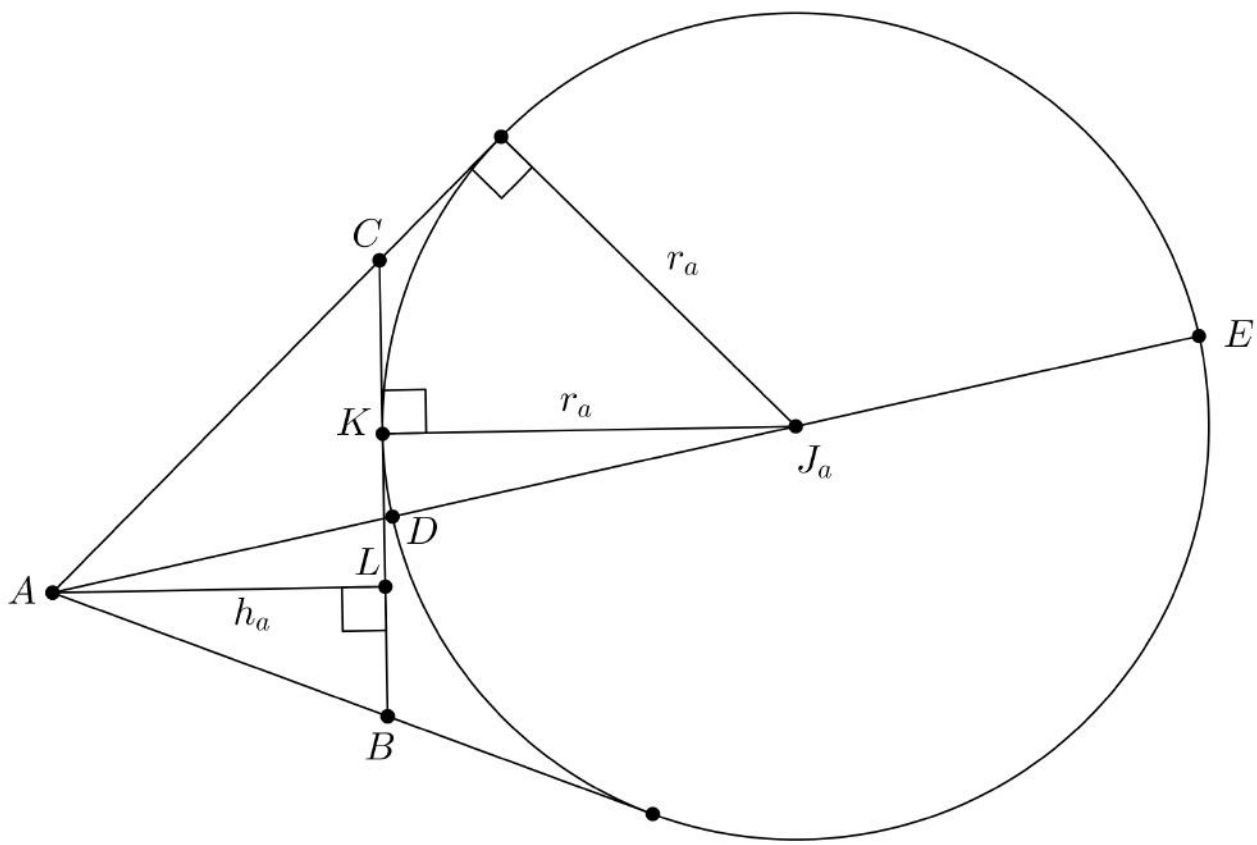
**Çözüm:** $BC = a$, yarı çevre uzunluğu $u$, $A$ köşesinden geçen yüksekliğin uzunluğu $h_a$ ve $BC$ kenarına teğet olan $J_a$ merkezli dış teğet çemberin yarıçapı $r_a$ olsun. $A, D, J_a, E$ noktaları doğrudaştır.

$$AD = AJ_a - J_aD = \sqrt{r_a^2 + u^2} - r_a, \quad DE = 2r_a, \quad AE = \sqrt{r_a^2 + u^2} + r_a$$

elde ederiz. Yani

$$\frac{AD}{AE} \cdot \frac{DE^2}{BC^2} = \frac{4r_a^2}{a^2} \cdot \frac{\sqrt{r_a^2 + u^2} - r_a}{\sqrt{r_a^2 + u^2} + r_a} = \left[\frac{2u}{a} \cdot \frac{r_a}{\sqrt{r_a^2 + u^2} + r_a}\right]^2$$

buluruz. $ABC$ üçgeninin alanı $ah_a/2 = r_a(u - a)$ olduğundan $h_a/r_a = 2(u - a)/a$ olur. $J_a$ ve $A$ noktalarından $BC$ doğrusuna inilen dikmelerin ayakları sırasıyla $K$ ve $L$ olsun. $AL + J_aK \leq AJ_a$ olduğu açıktır. Bu ise $h_a + r_a \leq \sqrt{r_a^2 + u^2}$ anlamına gelir. Böylece




$$\frac{\sqrt{r_a^2 + u^2} + r_a}{r_a} \geq \frac{h_a + 2r_a}{r_a} = \frac{2u}{a}$$

elde ederiz. Son eşitsizlikten dolayı ispat biter. Eşitlik $A, L, K, J_a$ doğrudaş yani $AB = AC$ iken sağlanır.

**5.** $a_1, a_2, a_3, a_4$ pozitif tam sayıları bir çember etrafına yan yana olanlar aralarında asal olacak şekilde dizilemiyor. $i, j, k \in \{1, 2, 3, 4\}$ ve $i \neq j, j \neq k, k \neq i$ olmak üzere en çok kaç $(i, j, k)$ sıralı üçlüsü $(\text{ebob}(a_i, a_j))^2 \mid a_k$ şartını sağlar?

**Çözüm :** Cevap: 16.

$(a_1, a_2, a_3, a_4) = (1, 2, 3, 6)$ için aşağıdaki 16 tane $(a_i, a_j, a_k)$ üçlüsünü seçebiliriz:

$$(1,2,3),(1,2,6),(1,3,2),(1,3,6),(1,6,2),(1,6,3),(2,3,6),(2,3,1),$$

$$(2,1,3),(2,1,6),(3,1,2),(3,1,6),(6,1,2),(6,1,3),(3,2,6),(3,2,1).$$

17 adet üçlü seçilemeyeceğini kanıtlayalım. Toplam $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ adet sıralı üçlü bulunur. Bu üçlüleri $i, j, k$ birbirinden farklı olmak üzere $\{(i, j, k),\ (j, k, i),\ (k, i, j)\}$ biçiminde 8 farklı kümeye ayırabiliriz. 17 tane üçlü seçtiğimiz durumda Güvercin Yuvası prensibinden bu kümelerin en az birindeki tüm üçlüleri seçmemiz gerekir. Yani $(a_1, a_2, a_3, a_4)$ ün bir permütasyonu $(a, b, c, d)$ olmak üzere

$$(\text{ebob}(a,b))^2 \mid c,\ \ (\text{ebob}(b,c))^2 \mid a,\ \ (\text{ebob}(c,a))^2 \mid b$$

olmalıdır. Bu durumda $\text{ebob}(a, b) = \text{ebob}(b, c) = \text{ebob}(c, a) = 1$ olması gerektiğini ispatlayacağız. Bir $p$ asalı ve negatif olmayan bir $\alpha$ tam sayısı için $p^\alpha \mid\mid \text{ebob}(a, b)$ olsun. Bu durumda

$$p^{2\alpha} \mid c \implies p^\alpha \mid \text{ebob}(b,c) \implies p^{2\alpha} \mid a \implies p^\alpha \mid \text{ebob}(c,a)$$

$$\implies p^{2\alpha} \mid b \implies p^{2\alpha} \mid \text{ebob}(a,b)$$

olacağından $\alpha = 0$ olur. Yani $\text{ebob}(a, b) = 1$ dir. Benzer şekilde $\text{ebob}(b, c) = \text{ebob}(c, a) = 1$ olduğunu görebiliriz. Eğer $d$ sayısı $a, b, c$ sayılarının ikisiyle aralarında asalsa $a, b, c, d$ sayılarını bir çember etrafına yan yana olanlar aralarında asal olacak biçimde dizebiliriz. (Öncelikle $a, b, c$ sayılarını çember etrafına rastgele koyarız. Ardından $d$ sayısını aralarında asal olduğu iki sayının arasına koyarız.) Bu durumda $d$ sayısı $a, b, c$ sayılarından en az ikisiyle aralarında asal olmamalıdır. Genelliği bozmadan $\text{ebob}(b, d) > 1$ ve $\text{ebob}(c, d) > 1$ varsayalım.

$$(\text{ebob}(b,d))^2 \mid a \implies \text{ebob}(a,b) > 1$$

$$(\text{ebob}(b,d))^2 \mid c \implies \text{ebob}(b,c) > 1$$

$$(\text{ebob}(c,d))^2 \mid a \implies \text{ebob}(a,c) > 1$$

$$(\text{ebob}(c,d))^2 \mid b \implies \text{ebob}(b,c) > 1$$

olduğundan $(\text{ebob}(a_i, a_j))^2 \mid a_k$ şartını sağlamayan en az 8 tane $(i, j, k)$ üçlüsü bulunur. Bu ise cevabın 16 dan büyük olamayacağını gösterir ve ispat biter.

**6.** Başlangıçta masanın üzerinde birbirinden farklı 2018 kutu bulunuyor. İlk aşamada Yazan ve Bozan, ilk hamleyi Yazan yapmak üzere, sırayla 2016 şar hamle yapıyorlar ve her hamlede sırası gelen tahtada yazılı olmayan bir kutu ikilisi seçip tahtaya yazıyor. İkinci aşamada Bozan tahtadaki ikilileri 1 den 4032 ye kadar istediği gibi numaralandırıyor ve $k$ numaralı ikilideki kutulara $k$ şer top koyuyor. Bozan, kutulardaki top sayılarının birbirinden farklı olmasını garantileyebilir mi?

**Çözüm:** Cevap: Bozan, kutulardaki top sayılarının birbirinden farklı olmasını garantileyebilir.

Yazan, ilk hamlesinde tahtaya $(A_1, A_2)$ kutu ikilisini yazsın. Bozan ilk aşamadaki hamlelerinde tahtaya mümkünse sadece $A_1$ kutusunu içeren kutu ikililerini yazarak tüm $(A_1, A_i)$ $i = 2, 3, \ldots, 2018$ ikililerinin tahtaya yazılmasını garantileyebilir. İkinci aşamada Bozan, ilk önce $A_1$ kutusunu içermeyen 2015 kutu ikililerini $1, 2, \ldots, 2015$ sayılarıyla rastgele numaralandırıp bu numaralandırmaya göre kutulara topları dağıtıyor. $A_i$ kutusundaki top sayısı $t(A_i)$ olsun. Genelliği bozmadan, bu işlem sonucunda

$$t(A_2) \leq t(A_3) \leq \cdots \leq t(A_{2018})$$

olduğunu varsayabiliriz. Daha sonra Bozan $i = 2, 3, \ldots, 2018$ olmak üzere, $(A_1, A_i)$ ikilisini $2014 + i$ sayısıyla numaralandırıp buna göre topları dağıtırsa,

$$t(A_2) < t(A_3) < \cdots < t(A_{2018})$$

olur. $i = 2, 3, \ldots 2018$ olmak üzere her $A_i$ kutusuna en fazla 2016 kez top yerleştirilmiştir ve bu işlemlerin sadece birinde yerleştirilen top sayısı 2015 den fazla olmuştur. Bu nedenle

$$t(A_1) = 2016 + 2017 + \cdots + 4032 > 2016 \cdot 2016 + 4032 > t(A_i)$$

ve sonuç olarak tüm kutulardaki top sayıları birbirinden farklıdır.