Türkiye Bilimsel ve Teknolojik Araştırma Kurumu

17. Ulusal Matematik Olimpiyatı
İkinci Aşama Sınavı

16-17 Aralık 2017

Çözümler

1. 25 çeşit yemeğiyle ünlü bir A köyünde yapılacak bir düğün için 2017 kişinin yaşadığı komşu B köyünden düğüne bazı kişiler davet edilecektir. B köyündeki her bir kişi bu 25 çesit yemekten en az birini sevmektedir ve her yemek için B köyünde o yemeği seven en az bir kişi bulunmaktadır. B köyünden düğüne davet edilen kişilerin kümesine, her bir yemek davet edilen en az bir kişi tarafından seviliyorsa, *uygun davetli listesi* diyelim. Her uygun davetli listesinden en az bir eleman içeren bir kümeye ise *kamber grubu* diyelim. Kendisi dışında hiçbir altkümesi kamber grubu olmayan herhangi bir kamber grubundaki herkesin sevdiği bir yemek bulunduğunu gösteriniz.

Çözüm : Yemekler $f_1, f_2, \ldots, f_{25}$ olsun. Her $1 \leq i \leq 25$ için F_i, B köyünden f_i yemeğini sevenlerin kümesi olsun. $L_1, L_2, \ldots, L_n$ tüm mümkün uygun davetli listeleri olsun. Tanımdan dolayı her $1 \leq i \leq 25$ ve $1 \leq j \leq n$ için $F_i \cap L_j \neq \emptyset$'dir. Bir S kümesi kamber grubudur ancak ve ancak $S \cap L_j \neq \emptyset$ her $1 \leq j \leq n$ için sağlanır. Bundan ötürü, her F_i bir kamber grubudur.

Kendisi dışında hiçbir altkümesi kamber grubu olmayan bir kamber grubu X olsun. $F_i \subseteq X$ olacak şekilde en az bir i bulunduğunu gösterelim. Aksini varsayalım. O zaman her $1 \leq i \leq 25$ için $F_i \backslash X \neq \emptyset$'dir. Her $1 \leq i \leq 25$ için $x_i \in F_i \backslash X$ olmak üzere, $L = \{x_1, x_2, \ldots x_{25}\}$ olsun. Bu durumda her $1 \leq i \leq 25$ için $L \cap F_i \neq \emptyset$ olur ve böylece L'nin bir uygun davetli listesi olduğunu görürüz. Fakat, tanım gereği L ve X ayrık kümelerdir ve bu da X'in bir kamber grubu olmasıyla çelişir. O halde $F_i \subseteq X$ olacak şekilde en az bir i bulunur. Öte yandan F_i de bir kamber grubudur ve sonuç olarak $F_i = X$ elde ederiz. Böylece X kümesindeki herkes f_i yemeğini sever.

2. Karşılıklı kenarları paralel olmayan bir $ABCD$ dörtgeninde AB ile CD doğruları X de kesişiyor. A merkezli r_1 yarıçaplı çember ile D merkezli r_2 yarıçaplı çember P ve Q da, B merkezli r_1 yarıçaplı çember ile C merkezli r_2 yarıçaplı çember R ve S de kesişiyor.

$$|XA| \cdot |XB| + r_1^2 = |XC| \cdot |XD| + r_2^2$$

ise, P, Q, R, S noktalarının çemberdeş olduğunu gösteriniz.

Çözüm : M ve N sırasıyla $[AB]$ ve $[CD]$ kenarlarının orta noktaları olsun. $[AB]$ ve $[CD]$ kenarlarının orta dikmelerinin kesişim noktası Y olsun.

$$XA \cdot XB = XM^2 - AM^2 = XY^2 - AY^2$$

$$XC \cdot XD = XN^2 - DN^2 = XY^2 - DY^2.$$

olduğu kolayca görülür. Dolayısıyla verilen eşitlikten ötürü

$$XY^2 - AY^2 + r_1^2 = XY^2 - DY^2 + r_2^2 \Rightarrow AY^2 - r_1^2 = DY^2 - r_2^2$$

elde ederiz. O zaman Y noktası, A merkezli r_1 yarıçaplı çember ile D merkezli r_2 yarıçaplı çemberin kuvvet ekseni üzerindedir. Başka bir deyişle, Y noktası PQ doğrusu üzerindedir. Benzer biçimde Y'nin RS doğrusu üzerinde olduğu da elde edilir. O halde $YP \cdot YQ = AY^2 - r_1^2 = DY^2 - r_2^2 = YR \cdot YS$'dir ve dolayısıyla P, Q, R, S noktaları çemberdeştir. (AD ve BC'nin paralel olmamasından dolayı PQ ve RS doğruları farklıdır ve bu çözümde kullanılmıştır.)

3. n pozitif bir tam sayı olmak üzere $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{nn}$ pozitif gerçel sayıları her $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ için $a_{ij} \cdot a_{ji} = 1$ koşulunu sağlıyor. $c_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ki}$ olmak üzere,

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{c_i} \leq 1$$

olduğunu gösteriniz.

Çözüm 1 : $\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{c_j} = c$ olsun. Şimdi $c \leq 1$ olduğunu gösterelim. Cauchy-Schwarz eşitsizliğine göre, her i pozitff tam sayısı ve $x_1, \ldots, x_n$ gerçel sayıları için

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{x_j^2}{a_{ji}} \geq \frac{\left(\sum_{j=1}^{n} x_j\right)^2}{\sum_{j=1}^{n} a_{ji}} \tag{1}$$

eşitsizliği sağlanır. Her i ve j için $a_{ij}a_{ji} = 1$'dir. Buna göre, $x_j = \frac{1}{c_j}$ alırsak her i için (1)' den

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{a_{ij}}{c_j^2} \geq c^2 \frac{1}{c_i} \tag{2}$$

elde ederiz. Tüm i sayıları için (2) eşitsizliklerini toplarsak,

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{a_{ij}}{c_j^2} \geq c^2 \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{c_i} = c^3 \tag{3}$$

elde ederiz. Şimdi

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{a_{ij}}{c_j^2} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{a_{ij}}{c_j^2} = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{1}{c_j^2} \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\right) = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{1}{c_j^2} c_j\right) = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{c_j} = c \tag{4}$$

olduğuna göre, (3) ve (4) eşitsizliklerinden $c \geq c^3$ gelir. c pozitif olduğuna göre, $c \leq 1$ olur.

Eşitlik durumu her (i,j) için $a_{i,j}=1$ iken elde edilir.

Çözüm 2 : n üzerine tümevarım uygulayacağız. $n=2$ durumunda $a_{1,2}=a$ alırsak, eşitsizlik $\dfrac{1}{c_1}+\dfrac{1}{c_2}=\dfrac{1}{1+a}+\dfrac{1}{1+1/a}=1$ eşitliğine dönüşüyor.

Eşitsizlik $n=k$ için doğru olsun: $\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{c_i}\leq 1$. Eşitsizliği $n=k+1$ için ispatlayalım. Cauchy-Schwarz eşitsizliğine göre, her $c,a,x\in\mathbb{R}$ için $(c+a)(\frac{x^2}{c}+\frac{1}{a})\geq(x+1)^2$. Bunu

$$\frac{1}{c+a}\leq\left(\frac{x^2}{c}+\frac{1}{a}\right)(x+1)^{-2}$$

olarak yazalım. Buna göre, her x için

$$\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{c_i+a_{k+1,i}}\leq\sum_{i=1}^{k}\left(\frac{x^2}{c_i}+\frac{1}{a_{k+1,i}}\right)(x+1)^{-2}\leq\frac{x^2+\sum_{i=1}^{k}a_{i,k+1}}{(x+1)^2}$$

elde ederiz. Şimdi $x=\sum_{i=1}^{k}a_{i,k+1}$ alırsak

$$\sum_{i=1}^{k+1}\frac{1}{\sum_{j=1}^{k+1}a_{j,i}}=\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{c_i+a_{k+1,i}}+\frac{1}{\sum_{j=1}^{k}a_{j,k+1}+a_{k+1,k+1}}\leq\frac{x^2+x}{(x+1)^2}+\frac{1}{x+1}=1$$

olur. İspat tamamlanmıştır.

4. $d(a)$ ile a pozitif tam sayısının farklı asal bölenlerinin sayısını gösterelim. Her n pozitif tam sayısı için $k-m=n$ ve $d(k)-d(m)=1$ şartlarını sağlayan k,m pozitif tam sayılarının bulunabileceğini gösteriniz.

Çözüm : n sayısını bölmeyen en küçük asal sayı p olsun. O zaman $p-1$ sayısının her asal böleni n sayısını bölecektir: $d((p-1)n)=d(n)$. Şimdi $k=pn$ ve $m=(p-1)n$ sayılarının koşulları sağladıklarını gösterelim: $k-m=n$ ve $d(k)-d(m)=d(pn)-d((p-1)n)=(d(n)+1)-d(n)=1$. Çözüm tamamlanmıştır.

5. Azalmayan bir $x_0,x_1,\ldots,x_{2017}$ pozitif tam sayı dizisinde $x_0=1$ ve $x_1,x_2,\ldots,x_{2017}$ altdizisi tam olarak 25 farklı pozitif tam sayı içeriyor.

$$\sum_{i=2}^{2017}x_i(x_i-x_{i-2})\geq 623$$

olduğunu gösteriniz. Eşitliği sağlayan dizilerin sayısını bulunuz.

Çözüm :. Bu problemin genel bir halini çözelim. $x_0,x_1,\ldots,x_n$ azalmayan ve pozitif tam sayılardan oluşan bir dizi olsun. $x_0=1$ olsun. $x_1,x_2,\ldots,x_n$ altdizisi m farklı tam sayı içeriyorsa

$$\sum_{i=2}^{n}x_i(x_i-x_{i-2})\geq m^2-2$$

olduğunu gösteriniz.

Dizi azalmayan bir dizi olduğundan her $i \geq 2$ için $x_i - x_{i-2} - 1 \geq -1$'dir. Ayrıca $x_i - x_{i-2} - 1 = -1$ eşitliği $x_i = x_{i-1}$ olduğu sonucuna yol açar. Dolayısıyla her $i = 2, 3, \ldots, n$ için

$$(x_i - x_{i-2} - 1)(x_i - x_{i-1}) \geq 0 \qquad (1)$$

eşitsizliğini elde ederiz. (1) eşitsizliği

$${x_i}^2 - x_i x_{i-2} + x_{i-1} x_{i-2} - x_i x_{i-1} \geq x_i - x_{i-1}$$

eşitsizliğine denktir. Bu eşitsizliği $i = 2, 3, \ldots, n$ için taraf tarafa toplarsak

$$\sum_{i=2}^{n} x_i(x_i - x_{i-2}) \geq x_n(1 + x_{n-1}) - 2x_1$$

elde ederiz. $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ kümesi m farklı sayıdan oluştuğuna göre

$$x_n \geq x_1 + m - 1$$
$$x_{n-1} \geq x_1 + m - 2$$

elde ederiz. Sonuç olarak

$$\sum_{i=2}^{n} x_i(x_i - x_{i-2}) \geq (x_1 + m - 1)^2 - 2x_1 \qquad (2)$$

$$(x_1 + m - 1)^2 - 2x_1 - (m^2 - 2) = (x_1 - 1)(x_1 + 2m - 3) \geq 0. \qquad (3)$$

bulunur. (2) ve (3) kullanılarak istenen eşitsizlik ispatlanır.
Eşitlik durumunda

$$x_1 = 1,\ x_n = m,\ x_{n-1} = m - 1$$

ve her $i = 2, 3, \ldots, n$ için

$$x_i - x_{i-2} = 1 \quad \text{veya} \quad x_i = x_{i-1}$$

olmalı. $x_n \neq x_{n-1}$ olduğundan $x_{n-2} = m - 1$ elde ederiz. Her $2 \leq j \leq n$ için

$$x_j - x_{j-1} > 1 \quad \Longrightarrow \quad x_j - x_{j-2} \geq x_j - x_{j-1} > 1,\ x_j \neq x_{j-1}$$

olduğundan dolayı ardışık iki terim arasındaki fark en fazla 1 olabilir. İlaveten,

$$x_j - x_{j-1} = x_{j-1} - x_{j-2} = 1 \quad \Longrightarrow \quad x_j - x_{j-2} = 2 > 1,\ x_j \neq x_{j-1}$$

olduğu için dizi terimlerindeki 1 artış ard arda olamaz. Öte yandan, dizinin terimlerindeki artış hep 0 veya 1 ise ve ayrıca 1 artış ard arda yaşanmıyorsa eşitlik durumu elde edilir. Dolayısıyla, dizide 1 artışın görüldüğü yerlere göre saymalıyız. $x_j - x_{j-1} = 1$ olan $m - 2$ tane j'yi $\{2, 3, \ldots, n - 2\}$ kümesinden herhangi ikisi ardışık olmayacak şekilde seçmeliyiz. $1, 2, \ldots, a$ sayılarından herhangi ikisi ardışık olmayacak şekilde b tanesi $\binom{a-b+1}{b}$ farklı şekilde seçilebilir. O zaman genel durumda cevap $\binom{n-m}{m-2}$ olur. Soruda $n = 2017$ ve $m = 25$ olduğundan, bu durumda cevap $\binom{1992}{23}$.

6. Her biri 2017 br uzunluğunda olan sonlu sayıda çubuk bir levhanın üzerinde dikey olarak çakılı halde bulunuyor. Bu çubukların her birinin üzerinde serbestçe kaydırılabilen bir boncuk bulunuyor. Bazı boncuk ikilileri lastik parçalarıyla birbirlerine birleştirilmiştir. Bu düzenekte ayrıca, tüm lastik

parçaları üzerinde yürüyebilen bir adet Genç Karınca ve sadece uçlarındaki boncukların yükseklikleri arasında 1 br fark bulunan lastik parçaları üzerinde yürüyebilen bir adet Yaşlı Karınca bulunuyor. Genç Karınca lastikleri kullanarak her boncuktan her boncuğa ulaşabiliyor.

Her boncuğun yerden yüksekliğinin tam sayı olduğu ve her lastik parçasının uçlarındaki boncukların farklı yüksekliklerde bulunduğu durumlara *geçerli durum* diyelim. Bu düzenekte en az bir geçerli durum varsa Yaşlı Karıncanın her boncuktan her boncuğa ulaşabildiği an az bir geçerli durumun olduğunu gösteriniz.

Çözüm: Soruyu çizge teorisi kavramlarını kullanarak yeniden formüle edelim: Bir çizgenin her bir köşesi $0, 1, \ldots, 2017$ renklerinden birine, her kenarın uçlarındaki köşeler farklı renkte olacak şekilde boyanmış ise bu boyamaya *düzgün boyama* diyelim. Bir düzgün boyamada, x köşesinin rengi $f(x)$ ile gösterilmek üzere, herhangi a ve b köşeleri için, her $i = 1, \ldots, n-1$ için $|f(x_i) - f(x_{i+1})| = 1$ olacak şekilde $a = x_1, x_2, \ldots, x_n = b$ yolu bulunuyorsa bu boyamaya *süper düzgün boyama* diyelim. Soruda bizden göstermemiz istenen şu soruya denktir:
Bağlantılı bir G çizgesinin düzgün boyaması varsa, süper düzgün boyaması da vardır.

G düzgün boyanmış bir çizge olsun. G'nin süper düzgün boyamaya sahip en büyük alt çizgesi G_1 olsun. Biz $G_1 = G$ olduğunu göstereceğiz. Aksini varsayalım. Bir H çizgesinin köşeler kümesi $V(H)$, kenarlar kümesi $E(H)$ ile gösterilsin.

$$min_{(x,y)\in E(G), x\in V(G_1), y\in V(G-G_1)}(|f(x) - f(y)|) = |f(x_0) - f(y_0)|$$

olsun. Tanımlara göre $|f(x_0) - f(y_0)| > 1$'dir. İlk önce, $f(x_0) > f(y_0)$ kabul edelim. $G - G_1$ çizgesinde $f(y_0)$ renkli köşeleri $f(x_0) - 1$ rengine ve $f(x_0) - 1$ renkli köşeleri $f(y_0)$ rengine boyayalım. Bu yeniden boyama işleminden sonra elde edilen boyamanın da düzgün olacağını gösterelim: $G - G_1$ alt çizgesinde $f(x_0) - 1$ ve $f(y_0)$ renkleri yer değiştirmiştir ve sonuç olarak herhangi iki komşu köşe farklı renklerde olacaktır. Ayrıca, $|f(x_0) - f(y_0)|$ ifadesinin minimum olmasından dolayı yeniden boyamadan sonra $f(x) \neq f(y)$ koşulu tüm $x \in G_1$ ve $y \in G - G_1$ köşeleri için sağlanacaktır. $f(x_0) < f(y_0)$ simetrik durumunda da $G - G_1$ alt çizgesinde $f(y_0)$ renkli köşeleri $f(x_0) + 1$ rengine ve $f(x_0) + 1$ renkli köşeleri $f(y_0)$ rengine boyarsak benzer şekilde düzgün bir boyama elde edeceğiz. G_1 çizgesine y_0 köşesinin ve y_0 ile G_1 arasındaki tüm kenarların eklenmesiyle oluşan çizge G_2 olsun. Bu yeni boyama G_2 için bir süper düzgün boyamadır ve G_2 alt çizgesi G_1 alt çizgesini kapsamaktadır, çelişki. O halde $G_1 = G$'dir ve bu da G'nin bir süper düzgün boyamaya sahip olduğunu gösterir.