Türkiye Bilimsel ve Teknolojik Araştırma Kurumu

31. Ulusal Matematik Olimpiyatı

İkinci Aşama Sınavı

20-21 Aralık 2023

Çözümler

1. Sonsuz çoklukta k pozitif tam sayısı için

$$\frac{n^2+m^2}{m^4+n}=k$$

olacak şekilde m ve n pozitif tam sayılarının bulunmadığını gösteriniz.

Çözüm 1: $p \equiv 3 \pmod 4$ bir asal sayı olmak üzere $k=p^2$ için eşitliği sağlayan m ve n pozitif tam sayılarının bulunmadığını göstereceğiz. Farzedelim ki bulunsun. p asalı m^2+n^2 yi böldüğü için $n=px$, $m=py$ olmalı. Denklemde yerine yazarsak $x^2+y^2=p^4y^4+px$ elde edilir. Yine $p \mid x^2+y^2$ olduğu için $x=pa$, $y=pb$ olmalı. Bu sayıları da son denklemde yerine yazarsak

$$a^2+b^2=p^6b^4+a \Rightarrow (b^2-a)=(p^3b^2-a)(p^3b^2+a)$$

elde edilir. a,b,p pozitif tam sayılar olduklarından, $p^3b^2+a>b^2+a>|b^2-a|$ sağlanır, dolayısıyla bu çarpımda eşitliğin sağlanmasının tek yolu iki tarafın da 0 olmasıdır. Ancak bu durumda da $b^2-a=p^3b^2-a=0$ gelir ve bu da $p=1$ demektir, p nin asal olması koşuluyla çelişir. Dolayısıyla böyle m,n pozitif tam sayıları bulunmaz.

Çözüm 2: Yine $p \equiv 3 \pmod 4$ bir asal sayı olmak üzere $k=p^2$ için eşitliği sağlayan m ve n pozitif tam sayılarının bulunmadığını göstereceğiz. Farzedelim ki bulunsun. Eşitliği

$$n^2-p^2n+(m^2-p^2m^4)=0$$

olarak yazarsak n'ye göre diskriminant tam kare olmalı.

$$p^4+4p^2m^4-4m^2=s^2$$

Bu durumda $p|(2m)^2+s^2$ olur ve $m=px$ ve $s=pt$ gelir. O halde

$$p^2+4p^4x^4-4x^2=t^2$$

elde edilir ve yine $p|(2x)^2+t^2$ gelir. $x=py$ ve $t=pu$ olur. Tekrar p^2 ile sadeleştirirsek

$$1+4p^6y^4-4y^2=u^2$$

bulunur. $z=2p^3$ olmak üzere, $y\neq 0$ ve $z>2$ olduğundan

$$(zy^2-1)^2=z^2y^4-2zy^2+1<z^2y^4-4y^2+1=u^2<z^2y^4=(zy^2)^2$$

elde edilir. O halde u^2 ardışık iki tam kare arasında kalır ve çelişki elde edilir.

Not: Benzer şekilde p^{2r}, $r \in \mathbb{Z}^+$, için de m ve n pozitif tam sayılarının bulunmadığı gösterilebilir.

2. Bir ABC üçgeninin iç bölgesinde bir P noktası alınıyor. BPC üçgeninin çevrel çemberine P noktasında içten teğet olan ω_A ve dıştan teğet olan Γ_A çemberleri, ABC üçgeninin çevrel çemberine de sırasıyla A_1 ve A_2 noktalarında içten teğettir. B_1, B_2 ve C_1, C_2 noktaları da benzer şekilde tanımlanıyor. O noktası ABC üçgeninin çevrel çember merkezi olmak üzere, A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 ve OP doğrularının noktadaş olduğunu gösteriniz.

Çözüm: (ABC), (BCP) ve ω_A çemberlerinin kuvvet eksenleri noktadaştır, yani ω_A çemberine P ve A_1 noktalarından çizilen teğetler BC üzerinde kesişir. Bu nokta D olsun. $DBA_1 \sim DA_1C$ olduğundan $\frac{BA_1}{A_1C} = \frac{DB}{DA_1} = \frac{DA_1}{DC}$, bu eşitlikleri çarparak da $(\frac{BA_1}{A_1C})^2 = \frac{DB}{DC}$ elde edilir. Benzer şekilde $DBP \sim DPC$ olduğundan, $(\frac{BP}{CP})^2 = \frac{DB}{DC}$ elde edilir ve $\frac{BA_1}{A_1C} = \frac{BP}{CP}$ bulunur. Benzer şekilde, $\frac{BA_2}{A_2C} = \frac{BP}{CP}$ elde edilir, dolayısıyla (ABC) çemberine A_1, A_2 den çizilen teğetler BC üzerindeki D noktasında kesişir. E, F de benzer şekilde tanımlansın. Menelaus teoreminden dolayı D, E, F noktaları doğrudaştır. Bu doğrunun (ABC) çemberine göre kutup noktası M olsun. Böylece D, E, F noktalarının her biri M noktasının kutup doğrusu üzerindedir ve La Hire Teoreminden dolayı bu üç noktanın kutup doğruları olan A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 doğruları M noktasında kesişir ve $OM \perp \overline{DEF}$ elde edilir. Son olarak, ABC üçgeninin çevrel çemberinin yarıçapı r olmak üzere, $DP^2 = DB.DC = DO^2 - r^2$ ve benzer şekilde $EP^2 = EO^2 - r^2$ olduğu için $DP^2 + EO^2 = DO^2 + EP^2$ bulunur. Bu da $OP \perp DE$ demektir, böylece OP doğrusu da M noktasından geçer ve ispat biter.

3. Rakamlarının biri 1, biri 2, …, biri 9 olan 9 basamaklı tüm sayılara *dengeli* sayı diyelim. Tüm dengeli sayıların yan yana ve küçükten büyüğe doğru yazılarak oluşturduğu rakam dizisi S olsun. S dizisindeki k ardışık terimden oluşan herhangi iki alt dizinin birbirinden farklı olmasını sağlayan en küçük k değerini bulunuz.

Çözüm: Cevap 17.

Öncelikle, dizinin iki farklı yerinde geçen 16 uzunluklu bir alt dizi örneği verelim. Bu dizideki ilk iki dengeli sayı

$$123456789123456798$$

olduğu için 2345678912345679 alt dizisi bu sayıların arasında geçer. Şimdi, 234567891 dengeli sayısının geçtiği yere bakalım. Bu sayıdan bir sonra geçen sayı 234567918 olacağı için, bu iki sayı yan yana yer alır ve ilk sayının 9 basamağı, ikinci sayının 7 basamağıyla oluşan 16 ardışık terimin oluşturduğu alt dizi yine 2345678912345679 olur, böylece bu alt dizi 2 farklı yerde geçer. Şimdi, S dizisinde 17 uzunluklu herhangi bir alt dizinin iki farklı yerinde geçmesinin mümkün olmadığını gösterelim. Öncelikle bir gözlem ile başlayalım.

İddia: D_1, D_2 sayıları S dizisindeki iki ardışık dengeli sayı olsun ve $n \leq 8$ bir pozitif tam sayı olsun. D_1 sayısının ilk k basamağının oluşturduğu sayı P_1 ve D_2 sayısının ilk k basamağının oluşturduğu sayı P_2 olsun. P_1 ve P_2 de geçen rakamlar birbirleriyle aynıysa $P_1 = P_2$ olmalıdır.

İspat: Aksini varsayalım, P_1 ve P_2 de geçen rakamlar birbirleriyle aynı fakat bu iki sayı birbirinden farklı olsun. Bu iki sayının ilk k basamak içinde birbirinden farklı olduğu ilk basamağı alalım. Bu iki sayı ardışık olduğu için, P_1 sayısında bu basamak j ise, P_2 sayısında bu basamak $j + 1$ olmalıdır ve

k. basamaktan önce yer almalılardır. Dolayısıyla, bu basamaktan önceki sayılar aynı oldukları için, P_1 sayısında j den sonraki rakamlarla yazılabilecek en büyük sayı, P_2 sayısında ise $j+1$ den sonraki rakamlarla yazılabilecek en küçük sayı yazılmıştır. Dolayısıyla, P_2 sayısında bu basamaktan sonraki en büyük rakam en sonda, P_1 sayısında ise j nin hemen yanındadır. Dolayısıyla, bu en büyük rakam P_1 sayısının ilk k basamağında yer alacak fakan P_2 sayısının ilk k basamağında yer almayacaktır, bu da rakamların aynı olması şartıyla çelişir. Dolayısıyla $P_1 = P_2$ olmalıdır. $\square$

17 uzunluklu bir alt dizinin iki farklı yerde geçtiğini varsayalım. 17 ardışık rakamdan oluşan her alt dizi, içinde bir dengeli sayının tamamını içermek zorundadır, aksi halde iki dengeli sayıyı kısmen içererek en fazla $8+8=16$ basamağa sahip olabilirdi. Bu alt dizinin geçtiği iki farklı yeri alalım ve bu iki basamak dizisinde bütün halinde yer alan dengeli sayıları inceleyelim. Bu sayılar K_1 ve K_2 olsun. İki farklı yerdeki diziye baktığımız için, K_1 ve K_2 aynı sayı olamazlar. Ayrıca, bu iki sayının paylaştığı ortak basamaklar olmalıdır, aksi halde ayrık olsalardı bu dizinin uzunluğu en az $9+9=18$ olurdu. Bu iki sayının paylaştığı basamak dizisi u_2 olsun. İki rakam dizisi a ve b nin birleşimiyle oluşan diziyi $a|b$ ile gösterelim. Genelliği bozmadan, $K_1 = u_1|u_2$ ve $K_2 = u_2|u_3$ olsun. Böylece, $u_1|u_2|u_3$ dizisi her iki yerde de geçer. Ayrıca, u_1 ve u_3 sayılarının her ikisi de u_2 de olmayan tüm rakamlardan oluştuğu için, bu iki sayının içerdiği basamaklar ve uzunlukları birbirleriyle aynıdır.

K_1 sayısını içeren diziyi inceleyelim. $K_1 = u_1|u_2$, ilk basamakları u_1 olan bir dengeli sayıdır ve bundan hemen sonra gelen dengeli sayı da ilk basamakları u_3 olan bir dengeli sayıdır. Dolayısıyla, iddiamız gereği $u_1 = u_3$ olmalıdır.

Şimdi de K_2 sayısını içeren diziyi inceleyelim. $K_2 = u_2|u_3$ şeklindedir ve bundan hemen önce gelen dengeli sayı u_1 ile bitmektedir, bu sayı $v|u_1$ olsun. Dolayısıyla, $v|u_1$ ve $u_2|u_3$ ardışık iki dengeli sayıdır. $u_1 = u_3$ olduğu için v ve u_2 sayısının basamakları birbirleriyle aynıdır, dolayısıyla iddiamız gereği $v = u_2$ olmalıdır. Bu durumda, $v|u_1 = u_2|u_3$ elde edilir fakat ardışık iki dengeli sayı birbirinin aynısı olamaz. Dolayısıyla 17 basamaklı herhangi bir alt dizi iki farklı yerde geçemez.

4. Başlangıçta tahta üzerinde her birinin 31 koordinatı olan 31 adet

$$(1,0,0,\ldots,0),\ (0,1,0,\ldots,0),\ \ldots,\ (0,0,0,\ldots,1)$$

31-lileri yazılmıştır. Her işlemde, tahtada bulunan $(a_1, a_2, \ldots, a_{31})$ ve $(b_1, b_2, \ldots, b_{31})$ 31-lileri seçiliyor ve $(a_1+b_1, a_2+b_2, \ldots, a_{31}+b_{31})$ 31-lisi de tahtaya yazılıyor. En az kaç işlem sonucunda tahtada

$$(0,1,1,\ldots,1),\ (1,0,1,\ldots,1),\ \ldots,\ (1,1,1,\ldots,0)$$

31-lilerinin tümü yer alabilir?

Çözüm. Cevap: $3 \cdot 31 - 6 = 87$.

$n \geq 3$ olmak üzere, başlangıçta tahta üzerinde her birinin n koordinatı olan n adet

$$(1,0,0,\ldots,0),\ (0,1,0,\ldots,0),\ \ldots,\ (0,0,0,\ldots,1)$$

n-lisi yazıldığı durumda cevabın $3n-6$ olduğunu göstereceğiz.

İlk önce $3n-6$ işlemin yeterli olduğunu iki farklı şekilde gösterelim. i. koordinatı 1 ve kalan koordinatları 0 olan n boyutlu vektör v_i^n, i. koordinatı 0 ve kalan koordinatları 1 olan n boyutlu vektör ise u_i^n olsun.

Yöntem 1. n üzerinden tümevarım. $n=3$ durumunda $v_1^3+v_2^3$, $v_1^3+v_3^3$ ve $v_2^3+v_3^3$ işlemleri sonucunda gereken u_1^3, u_2^3 ve u_3^3 vektörleri elde ediliyor. $n=k$ durumunda $3k-6$ işlemin yeterli olduğunu varsayalım. $n=k+1$ olsun. İlk işlemde v_k^{k+1} ve v_{k+1}^{k+1} vektörlerini toplayarak $v_k^{k+1}+v_{k+1}^{k+1} \equiv w_{k,k+1}^{k+1}$ vektörünü elde edelim. Tümevarım varsayımına göre, $v_1^k, v_2^k, \ldots, v_{k-1}^k$ ve v_k^k vektörlerinden $3k-6$ işlem sonucunda $u_1^k, u_2^k, \ldots, u_{k-1}^k$ ve u_k^k vektörleri elde ediliyor. v_1^k yerine v_1^{k+1}, v_2^k yerine $v_2^{k+1}, \ldots, v_{k-1}^k$ yerine v_{k-1}^{k+1} ve v_k^k yerine $w_{k,k+1}^{k+1}$ alıp aynı $3k-6$ işlemi uygularsak $v_1^{k+1}, v_2^{k+1}, \ldots, v_{k-1}^{k+1}$ ve $w_{k,k+1}^{k+1}$ vektörlerinden $u_1^{k+1}, u_2^{k+1}, \ldots, u_{k-1}^{k+1}$ ve son iki koordinatı 0 olup kalan koordinatları 1 olan $\bar{w}_{k,k+1}^{k+1}$ vektörü elde ediliyor. Son olarak $v_k^{k+1}+\bar{w}_{k,k+1}^{k+1}$ ve $v_{k+1}^{k+1}+\bar{w}_{k,k+1}^{k+1}$ işlemlerini uygularsak u_k^{k+1} ve u_{k+1}^{k+1} vektörleri elde edilir. Sonuç olarak $1+(3k-6)+2=3(k+1)-6$ işlem sonucunda gereken $u_1^{k+1}, u_2^{k+1}, \ldots, u_k^{k+1}$ ve u_{k+1}^{k+1} vektörleri elde edildi.

Yöntem 2. Önce $A_1, \ldots, A_{n-2}$, sonra $B_1, \ldots, B_{n-2}$ ve son olarak $C_1, \ldots, C_{n-2}$ işlemlerini uygulayacağız:

$A_1 : v_1^n + v_2^n \equiv s(1,2)$.

$A_2 : u(1,2) + v_3^n \equiv s(1,2,3)$.

.
.
.

$A_{n-3} : u(1,2,\ldots,n-3) + v_{n-2}^n \equiv s(1,2,\ldots,n-2)$.

$A_{n-2} : u(1,2,\ldots,n-2) + v_{n-1}^n \equiv s(1,2,\ldots,n-1) = u_n^n$.

$B_1 : v_n + v_{n-1}^n \equiv t(n-1,n)$.

$B_2 : t(n-1,n) + v_{n-2}^n \equiv t(n-2,n-1,n)$.

.
.
.

$B_{n-3} : t(4,\ldots,n-1,n) + v_3^n \equiv t(3,4,\ldots,n)$.

$B_{n-2} : t(3,\ldots,n-1,n) + v_2^n \equiv t(2,3,\ldots,n) = u_1^n$.

$C_1 : v_1^n + t(3,\ldots,n-1,n) = u_2^n$.

$C_2 : s(1,2) + t(4,\ldots,n-1,n) = u_3^n$.

.
.
.

$C_{n-2} : s(1,2,\ldots,n-2) + v_n^n = u_{n-1}^n$.

Bu $(n-2)+(n-2)+(n-2) = 3n-6$ işlem sonucunda $u_1^n, u_2^n, \ldots, u_n^n$ vektörlerinin hepsi elde edildi.

Şimdi ise en az $3n-6$ işlemin gerekli olduğunu gösterelim. $n \geq 3$ olmak üzere, n boyutlu vektörler için gereken en az işlem sayısı $f(n)$ olsun. Tümevarımla $f(n) \geq 3n-6$ olduğunu gösterelim.

$n = 3$ durumunda $f(3) \geq 3$ olduğu açıktır.

Tümevarım varsayımı $n = k$ için doğru olsun: $f(k) \geq 3k-6$. $n = k$ için yapılan işlemleri inceleyelim. v_{k+1}^{k+1} vektörünün ilk kez kullanıldığı işlem A olsun: A işleminde v_{k+1}^{k+1} ve en az bir $m \neq k+1$ için m. koordinatı 0 olmayan bir $r(m)$ vektörü toplanmıştır. Sadece m. koordinatı 0 olan vektörü elde etmek için v_{k+1}^{k+1} en az bir kez daha kullanılacaktır, bu işlem de B olsun. Bir C işleminde de sadece $k+1$. koordinatı 0 olan vektör elde edilecektir. A, B, C işlemlerini yapmayıp, kalan işlemlerde de sonuncu koordinatı silersek $n = k$ için gereken vektörleri elde ederiz. Demek ki $f(k+1) - 3 \geq f(k) \geq 3k-6$ ve buradan da $f(k+1) \geq 3(k+1) - 6$.

5. 23 gerçel sayıdan oluşan bir kümenin, boş olmayan ve elemanlarının çarpımı rasyonel sayı olan alt kümelerinin sayısı tam olarak 2422 olabilir mi?

Çözüm: Cevap: Evet.

n bir pozitif tam sayı olmak üzere, bu kümenin elemanları $i = 0, 1, \ldots, 22$ için $2^{\frac{2^i}{n}}$ olsun. Her bir pozitif tam sayı 2'nin farklı kuvvetlerinin toplamı olarak tek türlü yazılabilir. Bu sebeple, elemanlarının çarpımı rasyonel olan kümelerin sayısı 1'den $K = 2^{23} - 1$'e kadar olan tam sayılardan n ile tam bölünenlerin sayısına eşittir. Bu sayı da $\left\lfloor \frac{K}{n} \right\rfloor$ sayısına eşittir. Bu sayısının 2422 olması ise,

$$\left\lfloor \frac{K}{n} \right\rfloor = 2422 \iff 2422 \leq \frac{K}{n} < 2423 \iff \frac{K}{2423} < n \leq \frac{K}{2422}$$

olmasına denktir. $K/2422 - K/2423 \geq 1$ iken şartı sağlayan bir n pozitif tam sayısı bulunur. $2422 \cdot 2423 < (2^{11}\sqrt{2} - 1)^2 < 2^{23} - 1 = K$ olduğu için buna uygun bir n vardır ve bu n için sorudaki şart sağlanır.

6. Bir ABC üçgeninin BC, AC, AB kenarları üzerinde sırasıyla D, E, F noktaları $DE \parallel AB$, $DF \parallel AC$ ve $\dfrac{|BD|}{|DC|} = \dfrac{|AB|^2}{|AC|^2}$ olacak şekilde alınıyor. AEF üçgeninin çevrel çemberi, AD doğrusu ile ikinci kez R noktasında ve ABC üçgeninin çevrel çemberine A noktasından çizilen teğet ile ikinci kez S noktasında kesişiyor. EF doğrusu, BC ve SR doğruları ile sırasıyla L ve T noktalarında kesişiyor. SR doğrusunun $[AB]$ doğru parçasını ortalaması için gerek ve yeter koşulun BS doğrusunun $[TL]$ doğru parçasını ortalaması olduğunu gösteriniz.

Çözüm: Sorudaki şarttan dolayı AD simedyandır. Üçgenin kenar uzunlukları a, b, c olmak üzere, $AF/FB = CD/DB = b^2/c^2$ olduğu için $AF = b^2c/(b^2+c^2)$ ve benzer şekilde $AE = c^2b/(b^2+c^2)$ elde edilir. Buradan da $AE.AC = AF.AB$ gelir yani B, E, C, F çemberdeş bulunur. (ABC) çemberine Γ, (AEF) çemberine ω diyelim. AD ile Γ ikinci kez Q noktasında kesişsin. $AS \cap BC = P$ olsun. Γ ve ω çemberlerinin A dan farklı kesişim noktası M olmak üzere, bu iki çember ve $(BCEF)$ nin kuvvet eksenleri noktadaştır, bu nokta $AM \cap EF \cap BC = T$ olsun. A noktasından BC ye çizilen paralel Γ ile ikinci kez A' noktasında kesişsin. $\angle C = \angle AFE = \angle EAA'$ olduğundan AA' ve ω teğettir.

Şimdi, M merkezli ve $F \to B$, $E \to C$ götüren σ spiral homotetisine bakalım, ω çemberini Γ ya götüreceği için $S \to A$, $A \to A'$ ve $R \to Q$ olur. AQ simedyan olduğundan Γ çemberinde Q ve A dan çizilen teğetler BC üzerinde kesişiyor, dolayısıyla σ altında ω ya R ve S den çizilen teğetler EF üzerinde kesişecek. Ayrıca, DEF çemberi ile BC doğrusu teğet olduğu için $TD^2 = TE.TF = TB.TC$

elde edilir, $(P, D; B, C) = -1$ olduğu içn de T noktası PD nin orta noktası bulunur. AA' ve BC paralel olduğu için de $(AP, AD; AT, AA') = -1$ harmonikliğini ω ya yansıtırsak $(S, R; M, A) = -1$ gelir, yani S ve R den çiziler AM üzerinde de kesişir, bu durumda iki doğrunun kesişimi T noktasıdır.

Böylece $p_\omega(T) = SR$ olur, AM ve EF doğruları T noktasında kesiştiği için Brokard Teoremi sebebiyle AF ve EM, kutup doğrusu olan SR üzerinde kesişir. Yani AB, EM, SR noktadaştır, ayrıca L noktası kutup doğrusu SR üzerinde olduğu için $(T, L; F, E) = -1$ olur. Ayrıca, ω üzerindeki $(S, Q; A, M) = -1$ harmonikliği σ altında $(A, Q; M, A') = 1$ harmonikliğine gider, yani A', M, P doğrusaldır ve $A'M \cap AQ = V$ dersek $(P, V; M, A') = -1$ olur. Son olarak, $AA' \parallel BC$, σ altında $SA \parallel EF$ olur ve $(S, R; M, A) = -1$ harmonikliğini S üzerinden ω ya çekip EF doğrusuna yansıtarak, $W = SM \cap EF$ olmak üzere $(SS, SR; SM, SA) = (T, L; W, \infty_{EF}) = -1$ elde edilir yani W, TL nin orta noktasıdır.

Şimdi, sorudaki şartları yorumlamaya geçelim. İki şartın da $\angle B = 2\angle C$ veya $180 + \angle B = 2\angle C$ olmasına denk olduğunu göstereceğiz. Bu iki durum, yalnızca $\angle B > \angle C$ veya $\angle B < \angle C$ olması ile ilişkilidir ve tamamen aynı şekilde çözülebilir, biz $\angle B > \angle C$ durumunu inceleyeceğiz. Öncelikle, $\angle AMA' = B - C$ olması σ altında $\angle SMA = B - C$ verecektir, ayrıca $\angle AME = \angle AFE = C$ olur. $B = 2C$ olması sırasıyla aşağıdakilere denktir:

1. $B = 2C \Leftrightarrow \angle SMA + \angle AMB = B - C + (180 - C) = 180 \Leftrightarrow B$, M, W, S doğrusal
2. $B = 2C \Leftrightarrow \angle AMA' = B - C = C = \angle AME \Leftrightarrow P$, M, E, A' doğrusal

İlk şarttan dolayı, BS nin $[TL]$ yi ortalaması $B = 2C$ olmasına denktir. AB, SR, EM noktadaşlığından dolayı ise SR nin $[AB]$ yi ortalaması ile EM nin $[AB]$ yi ortalaması birbirine denktir. EM nin $[AB]$ yi ortalaması ise $(EA, EB; EM, ED) = -1$ olmasına, bunu da BC doğrusuna yansıtınca E, M, P nin doğrusal olmasına denktir. 2. şarttan dolayı da bu $B = 2C$ olmasına denktir ve böylece soruda istenen gösterilmiş olur.