Türkiye Bilimsel ve Teknolojik Araştırma Kurumu

28. Ulusal Ortaokul Matematik Olimpiyatı
İkinci Aşama Sınavı

5 Mart 2021

Çözümler

---

1. $2x^2 + y^2 + 7 = 2(x+1)(y+1)$ eşitliğini sağlayan tüm (x, y) gerçel sayı ikililerini belirleyiniz.

Çözüm : Cevap: Sadece $(2, 3)$.

Çözüm 1: Verilen ifade 5 ile çarptıktan sonra gerekli gruplamalar ile $(3x - 2y)^2 + (x + y - 5)^2 = 0$ elde edilir ve buradan $(2, 3)$ çözümü bulunur.

Çözüm 2: Verilen ifade $(y-x)^2+(x-1)^2+4 = 2y$ eşitliğine denktir. Buradan $a = y-x$ ve $b = x-1$ olmak üzere $a^2 + b^2 + 4 = 2(a + b + 1)$ elde edilir. Bu eşitlik de $(a-1)^2 + (b-1)^2 = 0$ olarak yazılırsa $a = b = 1$ bulunur ve sonuç olarak $x = 2$ ve $y = 3$ bulunur.

Çözüm 3: Verilen eşitliği $2x^2 - x(2y+2) + (y^2 - 2y + 5) = 0$ olarak yazalım. x'e göre ikinci dereceden bir denklem elde ederiz ve bunun çözümü olması için diskriminantın negatif olmaması gerekir.

$$\Delta = (2y+2)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (y^2 - 2y + 5) = -4y^2 + 24y - 36 = -4(y-3)^2 \geq 0$$

olur. Öte yandan $(y-3)^2 \geq 0$ olduğu için $(y-3)^2 = 0$, yani $y = 3$ elde edilir. $x = \dfrac{2y + 2 \pm \sqrt{\Delta}}{4}$ olduğundan $x = 2$ bulunur. Tek çözüm $(2, 3)$ ikilisidir.

2. m ve n pozitif tam sayılar olmak üzere

$$\frac{17m + 43n}{m - n}$$

oranı bir tam sayıysa (m, n) ikilisine *özel ikili* diyelim. $1, 2, \ldots, 2021$ sayıları arasından herhangi ikisi özel ikili oluşturmayan en çok kaç sayı seçilebilir?

Çözüm : Cevap: 289.

$$\frac{17m + 43n}{m - n} + 43 = \frac{60m}{m - n}$$

olduğuna göre, (m, n) ikilisinin bir özel ikili olması $\dfrac{60m}{m-n}$ sayısının tam sayı olmasına denktir. Buna göre, k tam sayısı için $k, k+1, k+2, k+3, k+4, k+5, k+6$ sayılarından herhangi ikisi özel ikilidir. Demek ki $1 \leq a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_p \leq 2021$ sayıları, $i = 1, 2, \ldots, p-1$ olmak üzere, her (a_i, a_{i+1}) ikilisi özel ikili olmayacak şekilde seçlirse, $a_{i+1} - a_i \geq 7$ ve buradan da $p \leq 1 + 2021/7 < 290$ olma zorundadır.

Şimdi herhangi ikisi özel ikili oluşturmayan 289 sayının seçilebileceğini gösterelim. $k = 1, 2, \ldots, 289$ olmak üzere, $1 + 7(k-1)$ şeklinde olan sayılardan herhangi ikisi özel ikili oluşturmuyor: $m = 1 + 7a$ ve $n = 1 + 7b$ olursa $\dfrac{60m}{m-n} = \dfrac{60(7a+1)}{7(a-b)}$ sayısı $60(7a+1) = 4 \pmod 7$ olduğuna göre tam sayı değildir.

3. $|AB| < |BC|$ olan dar açılı bir ABC üçgeninin çevrel çember merkezi O, $[AB]$ ve $[AC]$ kenarlarının orta noktaları sırasıyla D ve E olmak üzere, OE doğrusu BC yi K de kesiyor. OKB üçgeninin çevrel çemberinin OD ile ikinci kesişim noktası L, A dan KL doğrusuna indirilen dikmenin ayağı F olmak üzere F noktasının DE doğrusu üzerinde olduğunu gösteriniz.

Çözüm : D, E, F noktaları sırasıyla A noktasından OL, OK, KL doğrularına inen dikme ayaklarıdır. Dolayısıyla, A noktasının OKL üçgeninin çevrel çemberi üzerinde olduğunu gösterirsek, D, E, F noktaları A noktasının bu çembere göre Simson doğrusu üzerinde olur, ispat biter.

Soruda verilen bilgiden, O, L, K, B nin çembersel olduğunu biliyoruz, dolayısıyla A, O, K, B nin çembersel olduğunu göstermeliyiz. O noktasının ABC üçgeninin çevrel çemberi olduğunu kullanarak $\widehat{OKC} = \widehat{EKC} = 90° - \widehat{C} = \widehat{OAB}$ eşitliğini elde ederiz, buradan $\widehat{OKB} + \widehat{OAB} = 180°$ olur, ispat biter.

4. Ormandaki her cücenin üç kavuğu vardır, her kavuğun üzerinde $1, 2, \ldots, 28$ sayılarından biri yazılıdır ve her cücenin kavuklarındaki üç sayı birbirinden farklıdır. Bir gün üç şenlik düzenleniyor ve her cüce birinci şenliğe üzerindeki sayı en küçük olan kavuğunu giyerek, ikinci şenliğe üzerindeki sayı ortanca olan kavuğunu giyerek, üçüncü şenliğe ise üzerindeki sayı en büyük olan kavuğunu giyerek katılıyor. Daha sonra şenliklerden en az ikisine üzerlerindeki sayıların aynı olduğu kavuklarla katılan bir cüce ikilisinin bulunmadığı fark ediliyor. Buna göre, cücelerin sayısı en çok kaçtır?

Çözüm : Cevap: 182.

Her $k = 1, \ldots, 28$ sayısı için, ikinci şenliğe üzerinde k sayısı yazılı olan kavukla katılan cüce sayısını inceleyelim. Bu cücelerden her biri birinci ve üçüncü şenliklere de katılacaktır. Bu nedenle, bu cücelerin sayısının en fazla $min(k-1, 28-k)$ olabileceği açıktır. Buna göre, k üzerinden toplama yaparak ormandaki toplam cüce sayısının en fazla $(1 + 2 + \cdots + 13) \cdot 2 = 13 \cdot 14 = 182$ olabileceği elde edilir. Şimdi de ormandaki toplam cüce sayısının 182 olabileceğini gösterelim.

Örnek 1: $k = 1, 2, \ldots, 13$ olmak üzere, her k sayısı için $28 - 2k$ tane üçlü oluşturalım:

$$(k, k+1, 2k+1), (k, k+2, 2k+2), (k, k+3, 2k+3), \ldots, (k, 28-k, 28).$$

Bu kuralla $26 + 24 + \cdots + 2 = 182$ tane üçlü elde edilir. Her cücenin kavuklarındaki üç sayı bu 182 üçlüden birinin elemanlarına eşit olursa sorudaki koşul sağlanır.

Örnek 2: Üç elemandan oluşan ve $k = 1, 2, \ldots, 13$ olmak üzere, farkı k olan $(28-2) + (28-3) + \cdots + (28-26) = 182$ tane farklı aritmetik dizi vardır. Her cücenin kavuklarındaki üç sayı bu 182 dizinin birinin elemanlarına eşit olursa sorudaki koşul sağlanır.