Türkiye Bilimsel ve Teknolojik Araştırma Kurumu

17. Ulusal Matematik Olimpiyatı
İkinci Aşama Sınavı

6-7 Mart 2021

Çözümler

1. $n > 1$ bir tam sayı olmak üzere, $\{1, 2, \dots, n^2\}$ kümesinin k elemanlı her alt kümesinde $x^2 \mid y$ olacak şekilde x ve y elemanları bulunuyorsa, k nin alabileceği en küçük değeri bulunuz.

Çözüm : Cevap: $n^2 - n + 1$.

Çözüm 1: $\{n+1, n+2, \dots, n^2\}$ kümesinde $x^2|y$ olan x ve y elemanları bulunmaz. O halde $k \geq n^2 - n + 1$.

Farzedelim ki $n^2 - n + 1$ elemanlı olup $x^2|y$ olacak şekilde x ve y içermeyen en az bir altküme bulunsun. Bunlardan elemanları toplamı en büyük olan A ve $\min_{a \in A} a = m$ olsun. $m = 1 \in A$ olamayacağı açık. $|A| = n^2 - n + 1$ olduğundan $m \leq n$'dir ve dolayısıyla $m^2 \leq n^2$'dir. $B = (A \backslash \{m\}) \cup \{m^2\}$ kümesini ele alalım. B'de $x^2|y$ olan x ve y varsa, $x = m^2$ veya $y = m^2$'dir. $m^4|y$ olsaydı, $m^2|y$ olurdu ve bu A'nın seçimi ile çelişir. $x^2|m^2$ olsaydı, $x|m$ ve $x \leq m$ olurdu ve bu da m'nin seçimiyle çelişir. O zaman B de aynı koşulu sağlar. Ancak, $1 < m$ olduğundan B'nin elemanları toplamı A'nın elemanları toplamından daha büyüktür, çelişki.

Çözüm 2: $\{n+1, n+2, \dots, n^2\}$ kümesinde $x^2|y$ olan x ve y elemanları bulunmaz. O halde $k \geq n^2 - n + 1$.

$n^2 - n + 1$ elemanlı bir altkümede $x^2|y$ olan x ve y bulunduğunu ispatlayalım. Öncelikle, her $1 \leq i \leq n$ için $i^2|y_i$ olacak şekilde farklı $n < y_1, y_2, \dots, y_n \leq n^2$ tam sayılarının bulunduğunu gösterelim. Tümevarım ile göstereceğiz. $n = 2$ için, $y_1 = 3$ ve $y_2 = 4$ sağlar. $n = r \geq 2$ için koşulları sağlayan $y_1, \dots, y_r$ bulunsun. $y_i = r + 1$ olan i yoksa $y_{r+1} = (r+1)^2$ alırız ve koşullar sağlanır. $y_i = r + 1$ olan i varsa, $i^2|r+1$'dir. $y_i = r(r+1)$ ve $y_{r+1} = (r+1)^2$ alırız ve tüm şartlar sağlanır. O zaman $n^2 - n + 1$ elemanlı herhangi bir altkümede güvercin yuvası prensibinden dolayı en az bir i için i ve y_i bulunur.

Çözüm 3: $\{n+1, n+2, \dots, n^2\}$ kümesinde $x^2|y$ olan x ve y elemanları bulunmaz. O halde $k \geq n^2 - n + 1$.

$n^2 - n + 1$ elemanlı bir altkümede $x^2|y$ olan x ve y bulunduğunu ispatlayalım. $S = \{1, 2, \dots, n^2\}$ olsun. S'de tam kare olmayan sayılar $a_1, a_2, \cdots, a_m$ olsun. $m = n^2 - n$ olduğu açıktır. Her

$i = 1, \ldots, m$ için $S_i = \{a_i^{2^k} : \ k \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}\} \cap S$ olsun.

$i \neq j$ iken $S_i \cap S_j = \emptyset$ olduğunu gösterelim. $a_i^{2^k} = a_j^{2^l}$ olsun. Genelliği bozmadan $k \geq l$ varsayalım. $k = l$ olsaydı, $a_i = a_j$ yani $i = j$ olurdu. O halde $k > l$. O zaman $a_i^{2^{k-l}} = a_j$ olur ve bu da a_j'nin tam kare olması demektir, çelişki.

S'de 1'den farklı her elemanın bir S_i'ye ait olduğunu gösterelim. $x \in S$ ve $x > 1$ olsun. $x^{\frac{1}{2^k}}$'nın tam sayı olduğu en büyük negatif olmayan k tam sayısı r olsun. O zaman $x^{\frac{1}{2^r}}$ bir tam sayıdır ve tam kare değildir. Dolayısıyla S'de yer alır ve $a_i = x^{\frac{1}{2^r}}$ olan i vardır. O halde $x \in S_i$ olur.

$n^2 - n + 1$ elemanlı bir altkümede 1 yer alıyorsa koşul açıkça sağlanır. 1 yer almıyorsa, güversin yuvası prensibinden dolayı en az bir S_i için bu kümede S_i'den iki eleman vardır ve bu iki sayı koşulu sağlar.

2. Dar açılı bir ABC üçgeninin iç bölgesinde diklik merkezinden farklı bir P noktası alınıyor. A dan BP ve CP ye indirilen dikme ayakları sırasıyla D ve E, P den AB ve AC ye indirilen dikme ayakları sırasıyla F ve G dir. $[AP]$ doğru parçasının orta noktası X olmak üzere, DFX ve EGX üçgenlerinin çevrel çemberlerinin ikinci kesişim noktası BC üzerinde yer alıyorsa, $AP \perp BC$ veya $\widehat{PBA} = \widehat{PCA}$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm : $[BP]$ ve $[CP]$ nin orta noktaları sırasıyla Y ve Z olsun. $[BC]$, $[CA]$, $[AB]$ nin orta noktaları sırasıyla K, L, M olsun. PAB ve PAC üçgenlerinin dokuz nokta çemberlerini düşünürsek, (DFX) ve (XYM) aynı çember olur, (EGX) ve (XZL) aynı çember olur. (XYM) ve (XZL) çemberlerinin BC üzerindeki kesişim noktası T olsun.

Paralellikleri kullanarak açıları yazarsak,

$$\widehat{YTZ} = \widehat{YTX} + \widehat{ZTX} = 180° - \widehat{YMX} + 180° - \widehat{ZLX} = 360° - \widehat{XPY} - \widehat{XPZ} = \widehat{BPC} = \widehat{YKZ}$$

olur. Dolayısıyla, T noktası (YKZ) üzerindedir, bu da T noktasının PBC üçgeninin dokuz nokta çemberi üzerinde olduğunu gösterir. Buradan, $T = K$ veya $PT \perp BC$ buluruz.

- $T = K$ olsun. Paralelliklerden, $\widehat{PBA} = \widehat{ABC} - \widehat{PBC} = \widehat{LKC} - \widehat{ZKC} = \widehat{LKZ}$ bulunur. $(XLZK)$ çemberinden ve paralellikten $\widehat{PCA} = \widehat{LCZ} = \widehat{LXZ} = \widehat{LKZ}$ elde ederiz. Sonuç olarak, $\widehat{PBA} = \widehat{PCA}$ olur.

- $PT \perp BC$ olsun. $\widehat{MTY} = \widehat{MXY} = \widehat{MBY}$ ve $YB = YT$ olduğunu kullanarak $MB = MT$ elde ederiz. Süper üçlüden, $\widehat{ATB} = 90°$ olup, $AP \perp BC$ bulunur.

3. x, y, z pozitif gerçel sayılar olmak üzere,

$$2\sqrt{(x+y+z)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right)} - \sqrt{\left(1 + \frac{x}{y}\right)\left(1 + \frac{y}{z}\right)}$$

ifadesinin alabileceği en küçük değeri bulunuz.

Çözüm : Cevap: $1+2\sqrt{2}$. Eşitlik $x=2, y=\sqrt{2}, z=1$ iken sağlanır.

Cauchy-Schwarz eşitsizliğinden

$$\sqrt{(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)} \geq 1+\sqrt{\frac{x}{z}}+\sqrt{\frac{z}{x}}$$

ve

$$\sqrt{(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)} \geq \sqrt{\frac{z}{x}}+\sqrt{(x+y)\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)}$$

elde ederiz. AGO eşitsizliğinden

$$2\sqrt{\frac{z}{x}}+\sqrt{\frac{x}{z}} \geq 2\sqrt{2}$$

olur. Bu üç eşitsizliği taraf tarafa toplarsak

$$2\sqrt{(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)}-\sqrt{\left(1+\frac{x}{y}\right)\left(1+\frac{y}{z}\right)} \geq 1+2\sqrt{2}$$

elde edilir.

4. p bir asal sayı olmak üzere,

$$\frac{28^p-1}{2p^2+2p+1}$$

bir tam sayı ise, $2p^2+2p+1$'in pozitif tam bölen sayısının alabileceği tüm değerleri bulunuz.

Çözüm :. Cevap: Sadece 2.

$p=7$ için $2p^2+2p+1=113$ olur ve $28^7 \equiv 1 \pmod{113}$'tür. 113 asal sayı olduğundan pozitif tam bölen sayısı 2'dir.

$2p^2+2p+1$'in bir asal sayı olduğunu gösterirsek ispat biter. Farzedelim ki $2p^2+2p+1$ asal sayı olmasın. Bu sayının en küçük asal böleni q olsun. O halde $q^2 \leq 2p^2+2p+1 < (2p)^2$ olduğundan $q<2p$ elde edilir.

$q \nmid 28$ olduğu açıktır. Fermat Teoreminden $28^{q-1} \equiv 1 \pmod{q}$ elde edilir. Öte yandan $28^p \equiv 1 \pmod{q}$'dur. 28'in $\pmod{q}$'daki derecesi d olsun. O halde $d|p$ ve $d|q-1$'dir. $d|p$ olduğundan $d=p$ veya $d=1$'dir. $d=p$ olsaydı $p|q-1$ olurdu. $q<2p$ olduğundan $q=p+1$ olmalı ancak bu sadece $q=3$ ve $p=2$ için olabilir. Fakat $p=2$ için ifade tam sayı değildir. Sonuç olarak $d=1$ olmalı. Bu durumda $q|27$'dir ve dolayısıyla $q=3$ bulunur. Öte yandan $3|2p^2+2p+1$ koşulunu sağlayan bir p asal sayısı yoktur, çelişki. Demek ki $2p^2+2p+1$ bir asal sayıdır.

5. Her x gerçel sayısı için $\lfloor P(x)\rfloor = a_{\lfloor x^2\rfloor}$ olacak şekilde bir $a_0, a_1, a_2, \ldots$ tam sayı dizisinin bulunmasını sağlayan tüm gerçel katsayılı P polinomlarını bulunuz.

Not: x bir gerçel sayı olmak üzere $\lfloor x \rfloor$ ile x den büyük olmayan en büyük tam sayıyı gösteriyoruz.

Çözüm : Cevap: Herhangi bir c gerçel sabiti için $P(x) = c$ veya p, r tam sayılar ve $p > 0$ olmak üzere $P(x) = \frac{x^2+r}{p}$.

Öncelikle $\lfloor P(x) \rfloor = a_{\lfloor x^2 \rfloor} = \lfloor P(-x) \rfloor$ olduğundan $|P(x) - P(-x)| \leq 1$ olur. Fakat $P(x) - P(-x)$ ifadesi de bir polinom olup aldığı değerler sınırlı olduğundan $P(x) - P(-x) = 0$ olur. Yani bir Q polinomu için $P(x) = Q(x^2)$. Sorudaki koşul Q cinsinden şöyle yeniden ifade edilebilir:

$$\text{Negatif olmayan her } x \text{ gerçel sayısı için } \lfloor Q(x) \rfloor = a_{\lfloor x \rfloor}. \tag{1}$$

Q polinomu sabitse (dolayısıyla P sabitse), Koşul (1) sabit bir $a_0, a_1, \dots$ dizisi için sağlanır. Çözümün geriye kalan kısmında Q nun sabit olmadığını kabul edelim.
Şimdi $Q(x) \in \mathbb{Z}$ olacak şekilde yeterince büyük pozitif bir x alalım. Yeterince küçük bir $\epsilon > 0$ için $\lfloor x + \epsilon \rfloor = \lfloor x \rfloor$ olduğundan $\lfloor Q(x + \epsilon) \rfloor = Q(x)$ olmalıdır. Özel olarak $Q(x + \epsilon) \geq Q(x)$ olduğu görülür, yani Q azalan değildir. Dolayısıyla Q nun baş katsayısı pozitiftir. Şimdi $\lfloor Q(x - \epsilon) \rfloor = Q(x) - 1$ olması gerektiği görülür, yani $\lfloor x - \epsilon \rfloor \neq \lfloor x \rfloor$ olmalıdır. Dolayısıyla $x \in \mathbb{Z}$ olmalıdır.

Bu bulgulardan hareketle şunlara ulaşırız:

- n yeterince büyük bir pozitif tam sayı olmak üzere $n < x < n+1$ olan x değerleri için $Q(x)$ tam sayı değildir. O halde, $Q(n+1) \leq Q(n)+1$ olur, yani $Q(n+1)-(n+1) \leq Q(n)-n$ olur. Dolayısıyla $\text{der}(Q) = 1$ olmalıdır, çünkü aksi halde $Q(x) - x$ polinomunun baş katsayısı Q ile aynı olup pozitif olurdu, yani $Q(x) - x$ polinomu yeterince büyük x değerleri için artan olurdu.

- $Q(x) = ax + b$ olmak üzere yeterince büyük tüm N pozitif tam sayıları için $\frac{N-b}{a} \in \mathbb{Z}$, yani $\frac{1}{a}, \frac{b}{a} \in \mathbb{Z}$. Yani $p \in \mathbb{Z}^+$ ve $r \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $Q(x) = \frac{x+r}{p}$ formundadır.

Yukarıdaki gibi $Q(x) = \frac{x+r}{p}$ olmak üzere $a_n = \lfloor \frac{n+r}{p} \rfloor$ dizisi için Koşul (1) sağlanır. Sonuç olarak erhangi bir c gerçel sabiti için $P(x) = c$ veya p, r tam sayılar ve $p > 0$ olmak üzere $P(x) = \frac{x^2+r}{p}$ polinomları elde edilir.

6. Bir çember üzerindeki 2021 noktadan her biri $1, 2, \dots, k$ renklerinden birine boyanmıştır. Her nokta ve her $1 \leq r \leq k$ rengi için bu noktayı içeren ve üzerindeki noktaların en az yarısının r renginde olduğu bir yay bulunuyor. Buna göre, k nin alabileceği en büyük değeri bulunuz.

Çözüm : Cevap: 2.

Çember üzerindeki 2021 noktayı her noktanın en az bir komşusu kendisiyle aynı renkte olmayacak şekilde 2 renge boyarsak koşullar sağlanır.

Şimdi $k < 3$ olduğunu göstereceğiz. Her yayı, bu yayın içindeki uç noktalarla temsil edeceğiz: üzerindeki noktalar saat yönünde sırasıyla $A, B, \dots, Z$ olan yay (A, Z) olarak işaretlenecektir. Bir r rengi ve r rengine boyalı olmayan herhangi bir A noktası için koşulları sağlayan yaylardan en az sayıda nokta içeren yay $l_A(r) = (B, C)$ olsun.

Gözlem 1. $l_A(r) = (B, C)$ ise ya $(B, C) = (B, A)$ ya da $(B, C) = (A, C)$ olacaktır.

Aksini varsayalım. (B, A) yayındaki nokta sayısı m, r rengine boyalı nokta sayısı ise b, (A, C) yayındaki nokta sayısı n, r rengine boyalı nokta sayısı ise c olsun. O zaman $\dfrac{b}{m} < \dfrac{1}{2}$ ve $\dfrac{c}{n} < \dfrac{1}{2}$ olur. Buradan $2b \leq m - 1$ ve $2c \leq n - 1$ gelir. Buna göre,

$$2b + 2c \leq m + n - 2 < m + n - 1 \text{ ve sonuç olarak } \frac{b + c}{m + n - 1} < \frac{1}{2}$$

elde edilir. Bu da $l_A(r) = (B, C)$ yayının koşulları sağladığı ile çelişiyor.

Şimdi genelliği bozmadan r rengi ve r rengine boyalı olmayan herhangi bir A noktası için $l_A(r) = (A, C)$ olsun. Tanımlara göre, C noktası r rengindedir.

Gözlem 2. (A, C) yayındaki nokta sayısı n, r rengine boyalı nokta sayısı ise c olsun. O zaman $\dfrac{c}{n} = \dfrac{1}{2}$.

Aksini varsayalım: $\dfrac{c}{n} > \dfrac{1}{2}$ olsun. O zaman $2c > n$ ve $2c \geq n + 1$ olur. Buna göre,

$$2c - 2 \geq n - 1 \text{ ve } \frac{c - 1}{n - 1} \geq \frac{1}{2}$$

elde edilir. Bu da (A, C) yayının en az sayıda nokta içeren yay olması ile çelişiyor.

Gözlem 3. r rengi ve r rengine boyalı olmayan A ve B $(A \neq B)$ noktaları için $l_A(r) = (A, C)$ ve $l_B(r) = (B, D)$ olsun. O zaman $C \neq D$.

Aksini varsayalım: $C = D$ olsun. Genelliği bozmadan Genelliği bozmadan $B \in (A, C)$ olduğunu varsayalım. A noktasından saat yönünde ilerlerken B den önceki nokta T olsun. Gözlem 2 ye göre, AC yayında r renkli noktaların oranı ile BC yayında r renkli noktaların oranı $\dfrac{1}{2}$ dir. Buna göre (A, T) yayında da r renkli noktaların oranı $\dfrac{1}{2}$ olacaktır. Bu ise, (A, C) yayının A noktası ve r rengi için koşulları sağlayan ve en sayıda nokta içeren yay olması ile çelişiyor.

$k \geq 3$ olsun. O zaman en fazla 673 noktanın boyalı olduğu bir renk vardır, bu renk 1 olsun. 1 rengine boyalı olmayan her A noktası için Gözlem 1 e göre, $l_A(r)$ yayı ya (A, E) ya da (F, A) şeklindedir (E ve F noktaları 1 rengindedir). Gözlem 3 e göre, 1 rengine boyalı her nokta bu tür yaylardan en fazla ikisinin uç noktası alabilir. 1 rengine boyalı olmayan nokta sayısı en az 1348 ve $1348 > 2 \cdot 673$ olduğuna göre, çelişki elde edilir. İspat tamamlanmıştır.