TÜBİTAK

Türkiye Cumhuriyeti
SANAYİ VE TEKNOLOJİ BAKANLIĞI

MATEMATİK

24. ULUSAL
MATEMATİK OLİMPİYATI
BİRİNCİ AŞAMA SINAV
SORU VE ÇÖZÜMLERİ

2016

TÜRKİYE BİLİMSEL VE TEKNOLOJİK ARAŞTIRMA KURUMU
BİLİM İNSANI DESTEK PROGRAMLARI BAŞKANLIĞI

ULUSAL MATEMATİK OLİMPİYATLARI SORU ve ÇÖZÜMLERİ

Ankara

Nisan 2019

1. $AB \parallel CD$ ve $|AB| > |CD|$ olan bir $ABCD$ yamuğunda AC ve BD köşegenlerinin kesişim noktası E dir. DEC üçgeninin çevrel çemberine E noktasında teğet olan doğru $[AB$ ışınını F noktasında kesiyor. $|AF| = 9$, $|AB| = 5$ ise $|EF|$ kaçtır?

Cevap: 6. Paralellikten $m(\widehat{ABD}) = m(\widehat{EDC})$ olur. Teğetlikten dolayı ise $m(\widehat{EDC}) = m(\widehat{FEC})$ elde edilir. Dolayısıyla $m(\widehat{ABE}) = m(\widehat{FEC})$ ve buradan da $m(\widehat{EBF}) = m(\widehat{AEF})$ olduğu görülür. O zaman $AEF \sim EBF$ (A.A.A.) elde edilir. Bu benzerlikten $|EF|^2 = |AF| \cdot |BF| = 9(9-5) = 36$, yani $|EF| = 6$ sonucu çıkar.

2. $n^2 + mn + 14 = 7n + 3m$ denklemini sağlayan kaç farklı (m, n) tam sayı ikilisi vardır?

Cevap: 4. Denklemi $m = -n + 4 - \dfrac{2}{n-3}$ gibi yazarsak $n - 3 = \pm 1$ ve $n - 3 = \pm 2$ elde ederiz. Buradan $n = 2, 4, 1$ ve 5 olur.

3. $abc = 2$ koşulunu sağlayan a, b, c pozitif gerçel sayıları için $a^2 + 2b^2 + 4c^2 - 6b$ ifadesinin alabileceği en küçük değer nedir?

Cevap: 0. AGO eşitsizliğinden $a^2 + 4c^2 \geq 4ac = \dfrac{8}{b}$ ve $2b^2 + \dfrac{8}{b} = b^2 + b^2 + \dfrac{8}{b} \geq 3\sqrt[3]{8b^3} = 6b$ olduğundan cevap 0 olur.

4. 24×24 satranç tahtasının bazı birim karelerine birer taş nasıl yerleştirilirse yerleştirilsin, her taşı k renkten birine, aynı satır veya aynı sütun üzerinde olup aralarında başka taş bulunmayan herhangi iki taşın rengi farklı olacak şekilde boyayabiliyorsak, k nın alabileceği en küçük değer nedir?

Cevap: 3. 5 taşı döngü üzerine yerleştirirsek $k > 2$ olduğu görülür. Şimdi 3 rengin yeterli olacağını gösterelim. Boyamayı önce 1. , sonra 2., sonra 3. satır olarak ve her satır için soldan sağa yaparsak her defa yeni bir taşı boyarken onunla aralarında başka taş bulunmayan taş sayısı en fazla iki olacak ve yeni taş kurallara uygun şekilde boyanabilecek.

5. Bir ABC üçgeninde $m(\widehat{BAC}) = 45°$ ve $[AC]$ üzerinde alınan bir D noktası için $m(\widehat{DBC}) = 90°$ dir. $\dfrac{|CD|}{|AB|} = 2\sqrt{2}$ ise $m(\widehat{BDC})$ nedir?

Cevap: 75°. B den AC doğrusuna inilen dikmenin ayağı E olsun. $|AB| = \sqrt{2}BE$ olduğundan $|CD| = 4|BE|$ olur. $[CD]$ nin orta noktası F olsun. $m(\widehat{BDC}) > 45°$ olduğundan $|BC| > |BD|$ ve $F \in [EC]$ olur.

$|BF| = |CF| = |DF| = 2|BE|$ olduğundan $m(\widehat{EFB}) = 30°$ ve buradan da $m(\widehat{BDC}) = 75°$ olur.

6. n bir pozitif tam sayı ve $a_1, a_2, \ldots, a_n$ birer tam sayı olmak üzere her $i = 1, 2, \ldots, n$ için $b_i = a_i^2$ olarak tanımlanıyor. Hiçbir $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ tam sayı n-lisi için $2^{b_1} + 2^{b_2} + \cdots + 2^{b_n} - n^2$ ifadesi 7 ile tam bölünmüyorsa n kaç farklı değer alabilir?

Cevap: 3. $k \equiv 0 \pmod 3$ için $k^2 \equiv 0 \pmod 3$ ve $2^{k^2} \equiv 1 \pmod 7$ olur. $k \not\equiv 0 \pmod 3$ için $k^2 \equiv 1 \pmod 3$ ve $2^{k^2} \equiv 2 \pmod 7$ olur. Yani 2^{k^2} ifadesi 7 modunda 1 veya 2 olur. Bu durumda $2^{a_1^2} + 2^{a_2^2} + \cdots + 2^{a_n^2}$ ifadesinin 7 modunda alabileceği değerler n ile $2n$ arasındaki tüm değerlerdir. Çünkü bir $k > n$ değeri alınabiliyorsa en az bir tane 2 kullanılmış olmalıdır. Bu 2 sayısı 1 ile değiştirilirse $k - 1$ değeri de alınmış olur. Hepsini 2 alarak $2n$ elde edileceğinden 1 azaltarak n değerine kadar gelebiliriz. Bu durumda hangi n sayıları için $n - n^2$ ile $2n - n^2$ arasında $7k$ formunda bir sayının var olmadığını bulmalıyız. $n \geq 6$ için aralık en az 7 ardışık sayı içerdiğinden kesinlikle böyle bir sayı vardır. $n = 1, 2, 3, 4, 5$ için incelersek $n = 3, 4, 5$ için böyle bir sayının olmadığını görürüz. Yani cevap 3 olur.

7. Bir $f : \mathbf{R} \setminus \left\{-\frac{2}{7}, \frac{1}{7}\right\} \to \mathbf{R}$ fonksiyonu, tanım kümesinde bulunan her x için

$$f(x) + f\left(\frac{x-1}{7x+2}\right) = x$$

eşitliğini sağlıyorsa $f(1)$ aşağıdakilerden hangisine eşit olabilir?

Cevap: 1/4. Sırasıyla $x = 1, 0, -1/2$ alırsak $f(1) + f(0) = 1$, $f(0) + f(-1/2) = 0$, $f(-1/2) + f(1) = -1/2$ denklemlerini elde ederiz. Buradan da $f(1) = 1/4$ bulunur.

8. Başlangıçta masa üzerinde her biri 51 gram süt içeren birkaç bardak bulunuyor. Bir kedi her işlemde önce masadaki her bardaktan 3 gram süt içiyor, daha sonra bir bardak alıp bu bardaktaki sütü diğer bardaklara eşit olarak dağıtıyor ve boş bardağı masadan atıyor. Birkaç işlem sonucunda masada tek bir bardak kalıyor. Bu son bardakta yine 51 gram süt bulunuyorsa kedi toplamda kaç gram süt içmiştir?

Cevap: 1581. Bardak sayısı n olsun. Toplam içilen suyu iki farklı biçmde hesaplayalım: $51 \times (n-1)$ ve $3(n + (n-1) + (n-2) + \cdots + 2)$. O zaman $51(n-1) = 3(\frac{n(n+1)}{2} - 1)$ ve buradan $n^2 - 33n + 32 = 0$. Buradan $n = 1$ ve $n = 32$ değerlerini elde ediyoruz. $n > 1$ olma zorundadır. $n = 32$ sorudaki koşulları sağlıyor ve cevap $51 \cdot 31 = 1581$ dir.

9. Bir ABC üçgeninde iç teğet çember BC, CA, AB kenarlarına sırasıyla D, E, F noktalarında teğettir. EF doğrusu $[CB$ ışınını P noktasında kesiyor. Buna göre $|BD| = 1$, $|CD| = 3$, $|PF| = \sqrt{5}$ ise $|CA|$ uzunluğu kaçtır?

Cevap: 5. $|PB| = x$ olsun. $|CE| = |CD| = 3$ ve $|BF| = |BD| = 1$ olduğundan Menelaus teoreminden $\dfrac{x}{x+4} \cdot \dfrac{3}{AE} \cdot \dfrac{AF}{1} = 1$ olur. $|AE| = |AF|$ olduğunu kullanarak $x = 2$ elde ederiz. Buradan da $|BP|^2 + |BF|^2 = |PF|^2$ olduğundan $m(\widehat{ABC}) = 90^\circ$ olur. $|AE| = |AF| = y$ olsun. Pisagor teoreminden $(y+1)^2 + 4^2 = (y+3)^2$ ve buradan da $y = 2$ olur. Yani $|CA| = 5$ olur.

10. $p \in \{7, 11, 13, 17, 19\}$ olmak üzere kaç farklı p asal sayısı için $a^2 + b + 1$ ve $b^2 + a + 1$ sayılarının her ikisi de p ile tam bölünecek biçimde a ve b tam sayıları bulunabilir?

Cevap: 4. $a^2 + b + 1 \equiv b^2 + a + 1 \equiv 0 \pmod{p}$ olduğundan $a^2 + b + 1 - (b^2 + a + 1) = (a - b)(a + b - 1) \equiv 0 \pmod{p}$ olur. $a \equiv b \pmod{p}$ için $a^2 + a + 1 \equiv 0 \pmod{p}$ ve buradan da $(2a+1)^2 \equiv -3 \pmod{p}$ olur. $a + b \equiv 1 \pmod{p}$ için ise $a^2 - a + 2 \equiv 0 \pmod{p}$ ve buradan da $(2a-1)^2 \equiv -7 \pmod{p}$ elde ederiz. Yani soruda verilen koşulları sağlayan bir a, b ikilisi vardır ancak ve ancak -3 ve -7 sayılarından en az biri p modunda karekalandır. $5^2 \equiv -3 \pmod{7}$, $6^2 \equiv -3 \pmod{13}$, $4^2 \equiv -3 \pmod{19}$ ve $2^2 \equiv -7 \pmod{11}$ olduğundan $7, 11, 13, 19$ şartları sağlar. $p = 17$ için ise karekalanlar $0, 1, 4, 9, 16, 8, 2, 15, 13$ olup -3 ve -7 karekalan değildir. Bu yüzden cevap 4 olur.

11.

$$
\begin{aligned}
(x+2y)(y+2z)(z+2x) &= 1 \\
(2x+y)(2y+z)(2z+x) &= 2 \\
(x+y)(y+z)(z+x) &= 3
\end{aligned}
$$

denklem sistemini sağlayan x, y, z gerçel sayıları için xyz ifadesi aşağıdakilerden hangisine eşit olabilir?

Cevap: $-5/2$. $A = x^2y + y^2z + z^2x$, $B = xy^2 + yz^2 + zx^2$, $C = xyz$ dersek,

$$\begin{aligned}(x + 2y)(y + 2z)(z + 2x) &= 2A + 4B + 9C\\ (2x + y)(2y + z)(2z + x) &= 2B + 4A + 9C\\ (x + y)(y + z)(z + x) &= A + B + 2C\end{aligned}$$

olur. Buradan da $6C = (2A+4B+9C)+(2B+4A+9C)-6(A+B+2C) = 1 + 2 - 6\cdot 3 = -15$ olduğundan $C = -5/2$.

12. İki basamaklı sayılardan oluşan her $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ kümesinin herhangi ikisinin her iki basamağı birbirinden farklı olan 5 elemanı bulunuyorsa, n en az kaç olabilir?

Cevap: 41. 40 elemandan oluşan $\{10, 11, ..., 18, 19, 20, 21, ..., 28, 29, 30, 31, ..., 38, 39, 40, 41, ..., 48, 49\}$ kümesinde herhangi ikisinin her iki basamağı birbirinden farklı olan 5 eleman bulunmuyor: $n \geq 40$. Şimdi $n = 41$ durumunda herhangi ikisinin her iki basamağı birbirinden farklı olan 5 elemanın bulunacağını gösterelim. İlk basamak için 9 seçenek olduğundan bir A rakmı için $\overline{A\cdot}$ şeklinde en az beş eleman var. Bunların dışında en az 31 eleman vardır. Bunların en az dördü bir $B \neq A$ rakamı için $\overline{B\cdot}$ şeklinde olacak. Bunların dışında en az 21 eleman vardır. Bunların en az üçü bir $C \neq B$ rakamı için $\overline{C\cdot}$ şeklinde olacak. Bunların dışında en az 11 eleman vardır. Bunların en az ikisi bir $D \neq B$ rakamı için $\overline{D\cdot}$ şeklinde olacak. Bunların dışında bir $E \neq D$ rakamı için bir $\overline{ET_1}$ elamanı vardır. Şimdi koşulları sağlayan beş elemanı sondan başlayarak bulabiliriz. İlk eleman $\overline{ET_1}$, ikinci eleman $T_2 \neq T_1$ olmak üzere, $\overline{DT_2}$, üçüncü eleman $T_3 \neq T_1, T_2$ olmak üzere, $\overline{CT_3}$, dördüncü eleman sonra $T_4 \neq T_1, T_2, T_3$ olmak üzere, $\overline{BT_4}$ ve son olarak $T_5 \neq T_1, T_2, T_3, T_4$ olmak üzere, $\overline{AT_5}$.

13. Bir ABC üçgeninin BC kenarına ait dış teğet çemberinin merkezi O olsun. O dan geçen bir doğru AB ve AC doğrularını sırasıyla D ve E de kesiyor. $|AD| > |AB|$, $|AE| > |AC|$, $|AD| = |AE|$, $|BD| = 9$, $|OD| = 8$, $|OC| = 4$ ise $|OB|$ kaçtır?

Cevap: $\dfrac{9}{2}$. İki dış açıortay ve bir iç açıortay noktadaş olduğundan AO doğrusu $\widehat{BAE}$ nin açıortayı olur. Dolayısıyla ikizkenar üçgen olan ADE de AO aynı zamanda kenarortaydır da. O zaman $|OE| = |OD| = 8$ elde edilir. $m(\widehat{BAC}) = 2\alpha, m(\widehat{ABC}) = 2\beta, m(\widehat{BCA}) = 2\theta$ olursa, $m(\widehat{BDO}) = m(\widehat{CEO}) = 90° - \alpha$, $m(\widehat{DBO}) = m(\widehat{COE}) = 90° - \beta$ ve $m(\widehat{BOD}) = m(\widehat{OCE}) = 90° - \theta$ elde edilir. Buradan da $BDO \sim OEC$

bulunur (A.A.A.). Bu benzerlikten de $|OB| = 9 \cdot 4/8 = 9/2$ bulunur.

14. $3, 5, 7, 11, 13$ sayılarından kaç tanesi $(n+3)(n+7)(n+11)(n+15)+257$ ifadesini hiçbir n tam sayısı için tam bölemez?

Cevap: 4. $(n+3)(n+15) = n^2+18n+45$ ve $(n+7)(n+11) = n^2+18n+77$ olduğundan verilen ifade $(n^2+18n+61)^2 - 16^2 + 257 = (n^2+18n+61)^2+1$ e eşittir. Bir tam karenin 1 fazlasını 3,7 veya 11 bölemez. 5 in bu ifadeyi bölmesi için $n^2+18n+61 \equiv \pm 2 \pmod 5$ yani $(n+9)^2 \equiv \pm 2 \pmod 5$ olması gerekir. Ancak bir tam kare (mod 5) te 2 veya 3 değerini alamaz. $n = -1$ için ifade $44^2 + 1 \equiv 5^2 + 1 = 26 \equiv 0 \pmod{13}$ olur.

15. $1 \le |a|, |b|, |c| \le 10$, $a \ne c$ ve $b^2 \ge 4ac$ koşullarını sağlayan a, b, c tam sayıları için $ax^2+bx+c=0$ denkleminin en küçük kökü ile $cx^2+bx+a=0$ denkleminin en büyük kökü birbirine eşitse (a,b,c) üçlüsüne *karesel üçlü* diyelim. Kaç farklı karesel üçlü vardır?

Cevap: 80. (a,b,c) bir çözümse $(-a,-b,-c)$ de bir çözümdür. Ayrıca $ac > 0$ olmalıdır. Aksi halde her iki denklemin kökleri ters işaretli olacağından ilkinin en küçük kökü negatif ikincinin en büyük kökü pozitif olur ve çelişki elde ederiz. Simetriden $a > 0, c > 0$ durumundaki çözüm sayısı, $a < 0, c < 0$ durumu ile aynıdır. $a > 0, c > 0$ kabul edelim. $ax^2+bx+c=0$ denkleminin en küçük kökü $\dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ ve $cx^2+bx+a=0$ denkleminin en büyük kökü $\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2c}$ olur. Bu iki ifadeyi eşitleyip gerekli sadeleştirmeleri yaparsak $(a+c)^2 = b^2$ elde ederiz. Buradan da $a+c = |b|$ elde ederiz. $b > 0$ için $a+c = b$ ve $a > c$, $b < 0$ için ise $a+c = -b$ ve $c > a$ olmalıdır. Simetriden dolayı her iki durum için çözüm sayısı eşittir. $b > 0$ için $a+c = b$ ve $a > c$ durumunda her $b > 0$ değeri için $\lfloor (b-1)/2 \rfloor$ tane (a,c) ikilisi elde ederiz. $b = 1, 2, \dots, 10$ durumları için toplamda $0+0+1+1+2+2+3+3+4+4 = 20$ adet çözüm gelir. $b < 0$ için de 20 çözüm vardır. Buradan da 40 çözüm buluruz. Son olarak tüm çözümleri -1 ile çarparsak 40 yeni çözüm elde ederiz. Sonuç olarak toplam çözüm sayısı 80 olur.

16. $1, 2, \dots, 2016$ sayılarının her biri k renkten birine, $a \mid b$ ve $b \mid c$ koşullarını sağlayan herhangi üç farklı a, b ve c sayıları aynı renkte olmayacak şekilde boyanabiliyorsa, k en az kaç olabilir?

Cevap: 6. İlk önce en az 6 renk gerektiğini gösterelim. 1,2,4,8,16,32,64,128,256,512,1024 sayılaının herhangi üçü aynı renge boyanırsa koşullar sağlanmaz. Demek ki renk sayısı $11/2 = 5.5$'den az olmayacaktır. Şimdi 6 renk ile gereken boyamayı yapalım. $1, 2, \ldots, 2016$ sayılarını 11 gruba ayıralım: $G_1 = \{1\}$, $G_2 = \{2, 3\}$, $G_3 = \{4, 5, 6, 7\}$, $G_4 = \{8, 9, 10, \ldots 14, 15\}, \ldots$, $G_{10} = \{512, 513, \ldots, 1022, 1023\}, G_{11} = \{1024, 1025, \ \ldots, 2015, 2016\}$. Aynı gruptaki herhangi iki sayıdan daha küçük olan daha büyük olanı bölmüyor. Bu nedenle her renk en fazla iki grupta kullanılmak üzere, her gruptaki sayıların tümü aynı renge boyanırsa koşullar sağlanmış olur.

17. Dar açılı bir ABC üçgeninin AD kenarortayı, BE yüksekliği ve CF iç açıortayı noktadaştır. $|BC| = 10$, $|CA| = 6$ ise $|AB|$ kaçtır?

Cevap: $\sqrt{91}$. Açıortay teoreminden $|AF|/|FB| = 6/10 = 3/5$ bulunur. AD ile BE nin kesişimi K olsun. BFC üçgeninde A, K, D kesenine göre uygulanan Menelaus teoreminden $|CK|/|KF| = 8/3$ olduğu görülür. AFC üçgeninde B, K, E kesenine göre uygulanan Menelaus teoreminden ise $|AE|/|EC| = 3/5$ elde edilir. $|AC| = 6$ olduğundan $|AE| = 9/4$ ve $|EC| = 15/4$ bulunur. $|AB|^2 - |AE|^2 = |BC|^2 - |EC|^2$ olduğundan $|AB|^2 = 100 + \frac{81}{16} - \frac{225}{16} = 91$, yani $|AB| = \sqrt{91}$ elde edilir.

18. n bir pozitif tam sayı, p bir asal sayı, d_1 ve d_2 ise n sayısının birbirinden farklı iki pozitif tam böleni olmak üzere $n = p(d_1 + d_2)$ biçiminde yazılabiliyorsa n sayısına *dengeli sayı* diyelim. 100 den küçük kaç dengeli sayı vardır?

Cevap: 17. k_1 ve k_2 aralarında asal olmak üzere $d_1 = k_1 d$ ve $d_2 = k_2 d$ olsun. d_1 ve d_2 sayıları n nin birer böleni olduğundan $n = kk_1k_2d$ olacak şekilde bir k pozitif tamsayısı vardır. Bu durumda $kk_1k_2 = p(k_1 + k_2)$ elde ederiz. Buradan da $(k_1, k_2) = 1$ olduğundan $k_1 \mid p$ ve $k_2 \mid p$ bulunur. $d_1 \neq d_2$ olduğundan k_1 ve k_2 sayılarından biri 1 diğeri p olmalıdır. Genelliği bozmadan $d_1 = 1$, $d_2 = p$ olsun. Bu durumda $k = p + 1$ ve $n = p(p + 1)d$ olur. Yani n sayısının dengeli sayı olabilmesi için ancak ve ancak $p^2 + p \mid n$ olacak şekilde bir p asal sayısı bulunmalıdır. $n < 100$ olduğundan $p \leq 7$ olur. $p = 2, 3, 5, 7$ için sırasıyla $6, 12, 30, 56$ sayılarına bölünen sayılar dengeli sayıdır. Buradan da 6 veya 56 ile bölünen sayılar dengeli sayı olur. Toplam $16+1 = 17$ adet 100 den küçük dengeli sayı vardır.

19. Gerçel katsayılı bir P polinomu $P(1) = 1$ ve her x, y gerçel sayıları için $P(x) + P(y) = P(x + y) - 2xy + 1$ koşullarını sağlıyor. Buna göre $P(x)$ in alabileceği en küçük değer nedir?

Cevap: $3/4$. $Q(x) = P(x) - x^2 - 1$ alırsak $Q(x) + Q(y) = Q(x + y)$ elde ederiz. Q polinom olduğu için $Q(x) = cx$ olur. $P(1) = 1$ olduğundan $c = -1$

ve buradan da $P(x) = x^2 - x + 1 = (x - 1/2)^2 + 3/4$ olur. $P(x)$'in alabileceği en küçük değer $P(1/2) = 3/4$ olur.

20. Kaç $n \in \{12, 18, 42, 60, 72\}$ değeri için $1, 2, \ldots, n$ sayıları herhangi iki komşu sayının toplamı asal sayı olacak şekilde sıraya dizilebilir?

Cevap: 5. $n + 1$ ve $n - 1$ sayıları asal ise $1, 2, \ldots, n$ sayıları herhangi iki komşu sayının toplamı asal sayı olacak şekilde dizilebilir. Dizi

$$n, 1, n-2, 3, n-4, 5, ..., 6, n-5, 4, n-3, 2, n-1$$

şeklinde olacaktır (dizinin tek numaralı elemanları çift ve çift numaralı elemanları tek sayılardır ve çift sayılar azalan, tek sayılar artan alt dizi oluşturuyor). Bu durumda dizinin herhangi iki komşu elemanının toplamı $n + 1$ veya $n - 1$ olacaktır.

21. $|AB| = 13$, $|BC| = 4$, $|CA| = 15$ olan bir ABC üçgeninde iç teğet çemberin merkezi I ve BC kenarının orta noktası M dir. IM doğrusu BC kenarına ait yüksekliği K de kesiyor. Buna göre $|AK|$ kaçtır?

Cevap: $\dfrac{3}{2}$. Öncelikle $13^2 + 4^2 < 15^2$ olduğundan $m(\widehat{ABC}) > 90^\circ$ olduğu görülür. A dan BC ye inen dikme ayağı D olsun. $|AC|^2 - |CD|^2 = |AB|^2 - |BD|^2$ olduğundan $|BD| = 5$ elde edilir. Buradan da $|AD| = 12$ bulunur. AI ile BC nin kesişimi E olsun. ABC üçgeninde açırotay teoreminden $|BE| = 13/7$ ve $|EC| = 15/7$ olduğu görülür. Dolayısıyla $|EM| = 1/7$ dir. ACE üçgeninde açıortay teoreminden ise $|AI|/|IE| = 7$ elde edilir. ADE üçgeninde M, I, K kesenine göre uygulanan Menelaus teoreminden $|DK|/|KA| = 7$ bulunur ve bu da $|AD| = 12$ olduğundan $|AK| = 12/8 = 3/2$ sonucunu verir.

22. Pozitif tam sayılardan oluşan bir $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ dizisinin terimleri her $n \geq 1$ için $a_{n+1} = a_n^3 + 1376$ eşitliğini sağlamaktadır. Buna göre bu dizinin terimleri arasında en fazla kaç tane tam kare olabilir?

Cevap: 2. (mod 7) de bir tam kare $0, 1, 2, 4$ e bir tam küp ise $0, 1, 6$ ya denk olabilir. $1376 = 7 \cdot 196 + 4$ olduğundan her $n \geq 1$ için $a_{n+1} \equiv a_n^3 + 4 \pmod 7$ dir. Farzedelim ki bir $k \geq 3$ için a_k tam kare olsun. O zaman $a_{k-1}^3 + 4 \equiv 0, 1, 2, 4 \pmod 7$. $a_{k-1}^3 \equiv 0, 1, 6 \pmod 7$ olduğundan tek mümkün durum $a_{k-1} \equiv 0 \pmod 7$ dir. O halde $a_{k-2}^3 \equiv 3 \pmod 7$, ancak bu mümkün değil, çelişki. Demek ki bu dizideki tam kareler a_1 veya a_2 olabilir. $a_1 = 49$ için $a_2 = 49^3 + 1376 = 119025 = 345^2$ elde edilir.

23. Tüm terimleri birbirinden ve sıfırdan farklı bir $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ gerçel sayı dizisi $a_0 = \sqrt{2}$ ve her $n \geq 1$ için $a_n a_{n+1} + \dfrac{4}{a_n a_{n-1}} = 2\left(1 + \dfrac{a_{n+1}}{a_{n-1}}\right)$ koşulunu sağlıyor. Buna göre $a_1 \cdot a_2 \cdots a_{2016}$ çarpımının alabileceği kaç farklı değer vardır?

Cevap: 1. İfade düzenlenirse $(a_n a_{n+1} - 2)(a_n a_{n-1} - 2) = 0$ elde edilir. Buradan da tüm terimler farklı olduğundan her $i = 0, 2, 4, ...$ için $a_i a_{i+1} = 2$ veya her $i = 1, 3, 5, ...$ için $a_i a_{i+1} = 2$ olmalıdır. $a_0 = \sqrt{2}$ olduğundan ilki olamaz. Bu durumda da $a_1 \cdot a_2 \cdots a_{2016} = 2^{1008}$ olur.

24. Elimizde 12 kırmızı ve 12 beyaz top bulunuyor. Bir doğru üzerindeki 6 boş kutunun her birine bu toplardan 2 tanesi, herhangi iki komşu kutuda aynı renkli top bulunması koşuluyla kaç farklı biçimde dağıtılabilir?

Cevap: 239. Elimizde $2n$ kırmızı ve $2n$ beyaz top bulunsun. Bir doğru üzerindeki n boş kutunun her birine bu toplardan 2 tanesi, herhangi iki komşu kutuda aynı renkli top bulunması koşuluyla dağıtım sayısı $f(n)$ olsun. Bu $f(n)$ dağıtımdan ilk kutuda beyaz top bulunduranların sayısı ise $g(n)$ olsun. O zaman ilk kutuda bir kırmızı ve bir beyaz top bulunduran dağılımların sayısı $f(n-1)$, iki beyaz top bulunduran dağılımların sayısı $g(n-1)$, iki kırmızı top bulunduran dağılımların sayısı da simetriden dolayı $g(n-1)$ olacak: $f(n) = f(n-1) + 2g(n-1)$. İlk kutuda bir kırmızı ve bir beyaz top bulunduran dağılımların sayısı $f(n-1)$, iki beyaz top bulunduran dağılımların sayısı $g(n-1)$ olacak: $g(n) = f(n-1) + g(n-1)$. Son olarak $f(2) = 7$ ve $g(2) = 5$ olduğundan sırayla $f(3) = 7 + 10 = 17$, $g(3) = 12$, $f(4) = 17 + 24 = 41$, $g(4) = 17 + 12 = 29$, $f(5) = 41 + 58 = 99$, $g(5) = 29 + 41 = 70$ ve $f(6) = 99 + 140 = 239$ değerlerini elde ediyoruz.

25. Dar açılı bir ABC üçgeninde BC kenarına ait yükseklik C den geçen ve AB doğrusuna A da teğet olan çemberi ikinci kez K de kesiyor. Benzer şekilde AC kenarına ait yükseklik C den geçen ve AB doğrusuna B de teğet olan çemberi ikinci kez L de kesiyor. $|CK| = 12$, $|KL| = 9$ ise $|CL|$ uzunluğunun alabileceği değerlerin toplamı kaçtır?

Cevap: 24. Teğetlikten $m(\widehat{ACK}) = m(\widehat{BAK}) = 90^\circ - m(\widehat{ABC})$ elde edilir. Benzer şekilde $m(\widehat{BCL}) = 90^\circ - m(\widehat{BAC})$ bulunur. Öte yandan $90^\circ - m(\widehat{ABC}) + 90^\circ - m(\widehat{BAC}) = m(\widehat{ACB})$ olduğundan $m(\widehat{ACK}) + m(\widehat{BCL}) = m(\widehat{ACB})$ elde edilir ve bu da K, L ve C nin doğrusal olması demektir. O halde $|CL| = |CK| \pm |KL| = 12 \pm 9 = 3, 21$

olabilir. Her iki durum için de uygun ABC üçgeni oluşturulabilir.

26. $\binom{3n}{n}$ ifadesinin 2016 ile tam bölünmesini sağlayan en küçük n pozitif tam sayısı kaçtır?

Cevap: 23. $v_p(n)$ ile p asalının $\binom{3n}{n}$ sayısını bölen en büyük kuvvetini gösterelim. $2016 = 7 \cdot 9 \cdot 32$ olduğundan $v_2(n) \geq 5$ olmalıdır. Her bir k pozitif tamsayısı için $\left\lfloor \frac{3n}{2^k} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{2n}{2^k} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n}{2^k} \right\rfloor$ ifadesi 0 veya 1 olabilir. ($k = 1$ için kesinlikle 0 olur.) Bu yüzden $3n < 64$ için $v_2(n) = \sum_{k=1}^{5} \left\lfloor \frac{3n}{2^k} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{2n}{2^k} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n}{2^k} \right\rfloor < 5$ olur. Yani $n \geq 22$ olmalıdır. $v_2(22) = 4$ olduğundan $n = 22$ şartları sağlamaz. Öte yandan $n = 23$ için $v_2(23) = 5$, $v_3(23) = 2$ ve $v_7(n) = 1$ olur ve şartlar sağlanır.

27. $P(x) = (x^3 + x + 1)(x^3 - 3x^2 + 4x - 3)$ polinomunun gerçel köklerinin toplamı kaçtır?

Cevap: 1. $Q(x) = x^3 + x + 1$ için $R(x) = x^3 - 3x^2 + 4x - 3 = -Q(1 - x)$ olur. Q polinomu tüm reel eksende artan olduğundan tam olarak bir tane gerçel kökü vardır. Bu köke α dersek R polinomunun da tek gerçel kökü vardır ve bu kök $1 - \alpha$ olur. Yani cevap $\alpha + (1 - \alpha) = 1$ olur.

28. Bir torbada başlangıçta 2016 adet eşit uzunluklu çubuk bulunuyor. Her işlemde bir çubuk seçilip iki eşit parçaya bölünüyor. İşlemler nasıl yapılırsa yapılsın torbada her zaman en az n tane eşit uzunluklu çubuk bulunuyorsa, n nin alabileceği en büyük değer nedir?

Cevap: 1009. Birkaç işlem sonucunda eşit uzunluklu çubuk sayısı en fazla 1008 olursa toplam uzunluk $1008 \cdot (1 + 1/2 + 1/4 + ...) < 2016$ olur ve çelişki elde ediyoruz. Şimdi $n = 1009$ için bir örnek verelim: 2016 çubuktan 1009 tanesine dokunmuyoruz ve kalan 1007 çubuğun her birini iki eşit parçaya ayırıyoruz. Bu işlem sonucunda eşit uzunluklu çubuklardan oluşan en büyük gruptaki çubuk sayısı 2014 olur. Bu 2014 çubuktan 1009 tanesine dokunmuyoruz ve kalan 1005 çubuğun her birini iki eşit parçaya ayırıyoruz. Bu işlem sonucunda eşit uzunluklu çubuklardan oluşan en büyük gruptaki çubuk sayısı 2010 olur. Her işlemde eşit uzunluklu çubuklardan oluşan en büyük gruptan 1009 çubuk ayırıp kalan çubuklardan her birini iki eşit parçaya ayırıyoruz. İşlem yapılan her gruptaki toplam çubuk sayısı 2018 den az olması nedeniyle her işlem sonucunda eşit uzunluklu çubuklardan oluşan en büyük gruptaki çubuk sayısı azalıyor. Bu sayı 1010'dan daha küçük olanadek işlemleri tekrarlarsak eşit uzunluklu çubuklardan oluşan en büyük gruptaki çubuk sayısı 1009 olur.

29. $m(\widehat{ABD}) = 45°$ koşulunu sağlayan bir $ABCD$ kirişler dörtgeninde CD doğrusu $[BA$ ışınını E de kesiyor. $|AB| + |BD| = |AE|$ ve $|ED| = 2|AC|$ ise $m(\widehat{DEB})$ nedir?

Cevap: 22.5°. $|AE| = a$, $|BD| = b$, $|AC| = x$ olsun. $|ED| = 2x$, $|AB| = a - b$ olur. $m(\widehat{ECA}) = m(\widehat{EBD})$ olduğundan $\triangle EAC \sim \triangle EDB$ ve buradan da $2x^2 = ab$ olur. $4x^2 = 2ab$ olduğundan $4x^2 - b^2 = a^2 - (a-b)^2$ ve buradan da $m(\widehat{DAB}) = 90°$ olur. $[ED]$ nin orta noktası M olsun. $x = |ME| = |MD| = |MA| = |AC|$ olduğundan $m(\widehat{CMA}) = m(\widehat{MCA}) = 45°$ ve buradan da $m(\widehat{DEB}) = 22.5°$ bulunur.

30. $23, 29, 31, 37, 41$ sayılarından kaç tanesi en az bir (m, n) pozitif tam sayı ikilisi için $m^7 - n^7 - 3$ sayısını tam böler?

Cevap: 4. $p \not\equiv 1 \pmod 7$ koşulunu sağlayan p asalları için x^7 sayısı p modunda her değeri alabilir. Çünkü aksi halde bir $x \not\equiv y \pmod p$ ikilisi için $x^7 \equiv y^7 \pmod p$ olur. Buradan da $y \not\equiv 0 \pmod p$ ve $(x/y)^7 \equiv 1 \pmod p$ buluruz. x/y sayısının p modundaki derecesi d olmak üzere $d \mid 7$ olur. $x \not\equiv y \pmod p$ olduğundan $d > 1$ ve buradan da $d = 7$ olur. Öte yandan $d \mid p-1$ olduğundan çelişki buluruz. Bu durumda $7k+1$ formunda olmayan $23, 31, 37, 41$ asalları için şartlar sağlanır. $p = 29$ ve $x \not\equiv 0 \pmod{29}$ için $x^{28} \equiv 1 \pmod{29}$ olduğundan $x^{14} \equiv \pm 1 \pmod{29}$ ve buradan da $x^7 \equiv 0, -1, 1, 12, -12 \pmod{29}$ elde ederiz. Bu durumda da $x^7 - y^7 - 3$ sayısı 29 modunda $2, 8, 9, 10, 13, 14, 15, 24, 25, 26, 27, 28$ değerlerini alabilir. Yani cevap 4 olur.

31. $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = 1$ koşulunu sağlayan a, b, c pozitif gerçel sayıları için $(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2$ ifadesi $2016^{-2}, 2016^{-1}, 1, 2016$ sayılarından kaç tanesine eşit olabilir?

Cevap: 3. $1 = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a+b+c)[(a+b+c)^2 - 3(ab+bc+ca)]$ ve $2(a+b+c)^2 - 6(ab+bc+ca) = (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2$ olduğundan $a+b+c = x$, $ab+bc+ca = y$ dersek $x(x^2-3y) = 1$ olmak üzere $2(x^2-3y)$ ifadesinin alabileceği değerleri bulmalıyız. $y > 0$ olduğundan $x^2 - 3y < x^2$ ve buradan da $x > 1$ buluruz. $x > 1$ olduğu için $x^2 - 3y = 1/x < 1$ olur. Ayrıca $x^2 \geq 3y$ olduğundan $0 \leq S < 2$ elde ederiz. Öte yandan her $0 < S < 2$ için şartları sağlayan $a, b, c > 0$ bulunabilir. Örneğin $b = c$ alırsak

$a+2b = x = 2/S$ ve $(a-b)^2 = x^2 - 3y = S/2$ olacağından $|a-b| = \sqrt{S/2}$ ve buradan da $a = \frac{1}{3}\left(2/S + 2\sqrt{S/2}\right)$ ve $b = \frac{1}{3}\left(2/S - \sqrt{S/2}\right)$ bir çözümdür. Yani cevap 3 olur.

32. Aslı ve Berk başlangıçta birkaç sayı yazılmış tahtada sırayla hamle yaparak bir oyun oynuyorlar. Sırası gelen oyuncu tahtadaki bir sayıyı siliyor veya tahtadaki bir sayıyı silip yerine o sayının bir fazlasını, tahtadaki tüm sayıların birbirinden farklı olması ve hiçbirinin 24 ü aşmaması koşuluyla yazıyor. Oyunu son hamleyi yapan oyuncu kazanıyor. Oyuna her seferinde Aslı başlamak üzere, oyun tahtadaki sayılar $\{2,3,22,23\}$, $\{1,2,3,21,22,23\}$, $\{1,7,12,13,19,24\}$, $\{5,6,11,17,18\}$ ve $\{10,11,12,13,14\}$ olarak birer kez oynanırsa, Aslı bu oyunların kaçını kazanmayı garantileyebilir?

Cevap: 4. Bir oyuncu kendi hamlesi sonucunda tahtadaki tek ve çift sayıların sayısını birbirlerine eşit yaparsa her zaman hamlesi olur. Aslı $\{2,3,22,23\}$ sayılarıyla başlayan oyun dışında bunu yapabiliyor. $\{2,3,22,23\}$ sayılarıyla başlayan oyunda ise Aslının hamlesi ne olursa olsun Berk ilk hamlesi sonucunda tek ve çift sayıların sayısını birbirlerine eşit yaparak oyunu kazanmayı garantiler.