TÜRKİYE BİLİMSEL VE TEKNOLOJİK ARAŞTIRMA KURUMU
BİLİM İNSANI DESTEK PROGRAMLARI BAŞKANLIĞI

27. ULUSAL BİLİM OLİMPİYATLARI - 2019
BİRİNCİ AŞAMA SINAVI
MATEMATİK

Soru kitapçığı türü

A

4 Mayıs 2019 Cumartesi, 09.30-12.30

ÇÖZÜMLER

1. Bir ABC üçgeninin $[BC]$ kenarı üzerinde bir D noktası ve $[AD]$ üzerinde bir E noktası alınıyor. $|DE| = 1$, $|AE| = 2$ ve $|BD| = |CD| = \sqrt{3}$ ise, $m(\widehat{BAC}) + m(\widehat{BEC})$ kaçtır?

Cevap: $180°$. $|DE| \cdot |DA| = 3 = |BD|^2 = |CD|^2$ olduğundan $\triangle DBE \sim \triangle DAB$ ve $\triangle DCE \sim \triangle DAC$ olur. Buradan da $\angle EBD = \angle BAD$, $\angle ECD = \angle CAD$ olduğundan $\angle BAC + \angle BEC = 180°$ dir.

2. 2020^{2019} sayısının 27 ile bölümünden kalan kaçtır?

Cevap: 10. $2020 \equiv 22 \pmod{27}$. Euler Teoremi'ne göre $22^{18} \equiv 1 \pmod{27}$. $2019 = 18 \cdot 112 + 3$ olduğundan $2020^{2019} \equiv 22^3 \equiv (-5)^3 = -125 \equiv 10 \pmod{27}$.

3. k bir sabit gerçel sayı olmak üzere,

$$\begin{aligned} x + y - 2z &= 1 \\ 3x + 4z &= 2 \\ kx + 2y &= 3 \end{aligned}$$

denklem sistemini sağlayan (x, y, z) gerçel sayı üçlüsü bulunmuyorsa, k kaçtır?

Cevap: 5. İlk denklem -2 ile ikinci denklem -1 ile çarpılıp üçümcü denkleme eklenirse $(k-5)x = -1$ elde edilir. $k \neq 5$ ise x bulunur ve son iki denklemden y ve z de bulunur. $k = 5$ ise, $0 = -1$ çelişkisi bulunur ve denklem sisteminin çözümü bulunmaz.

4. İki basamaklı pozitif tam sayılardan oluşan ve herhangi iki elemanının çarpımı 100 ile tam bölünmeyen bir kümenin eleman sayısı en fazla kaç olabilir?

Cevap: 80. 10, 20, …, 90 sayılarından en fazla biri bu kümenin elemanı olabilir. 25 ve 75 sayılarından herhangi biri kümenin elemanı olursa 4'ün katı olan iki basamaklı 22 sayıdan hiçbiri bu kümenin elemanı olamaz. Buna göre, en az 10 sayı kümenin elemanı olamaz ve dolayısıyle kümenin eleman sayısı en fazla $90 - 10 = 80$ olabilir. Şimdi eleman sayısı 80 olan bir örnek verelim. 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, 25, 75 sayılarının dışındaki tüm iki basamaklı sayılardan oluşan kümenin koşulları sağladığını gösterelim. Bu kümenin elemanlarından herhangi ikisinin çarpımı 25 ile bölünüyorsa, her iki sayının birer 5 çarpanı vardır. Bu sayılardan en fazla birinin 2 çarpanı olduğu için koşullar sağlanır.

5. Bir $ABCD$ dikdörtgeninin $[AB]$ kenarı üzerinde $m(\widehat{BDC}) = m(\widehat{EDA})$ olacak biçimde bir E noktası alınıyor. $[BD]$ doğru parçasının orta noktası F olmak üzere, $|AD| = 6$ ve $|BE| = 9$ ise, $|EF|$ kaçtır?

Cevap: $3\sqrt{2}$. Verilen açı bilgilerinden $ADE \sim CDB$ olduğu görülür. $\Rightarrow |AE| \cdot (|AE| + 9) = 36$. $\Rightarrow |AE| = 3$. $\Rightarrow |DE| = 3\sqrt{5}$ ve $|BD| = 6\sqrt{5}$. O zaman EDB üçgeninde kenarortay teoreminden $|EF| = 3\sqrt{2}$ bulunur.

6. $\dfrac{2019^p - 27^p}{p}$ ifadesinin bir tam sayı olmasını sağlayan p asal sayılarının toplamı kaçtır?

Cevap: 88. Fermat Teoremi'ne göre $2019^p \equiv 2019 \pmod p$ ve $27^p \equiv 27 \pmod p$. O halde $p|2019 - 27 = 1992 = 2^3 \cdot 3 \cdot 83$. O halde cevap $2 + 3 + 83 = 88$.

7. $P(x) = (x+1)^{2019} + (x-1)^{2019}$ polinomunun x^2+1 polinomu ile bölümünden kalan polinom nedir?

Cevap: $2^{1010}x$. $P(x) = (x+1)(x^2+2x+1)^{1009} + (x-1)(x^2-2x+1)^{1009} \equiv (x+1)2^{1009}x^{1009} - (x-1)2^{1009}x^{1009} = 2^{1010}x^{1009} = 2^{1010}x \cdot (x^2)^{504} \equiv 2^{1010}x \cdot (-1)^{504} \equiv 2^{1010}x \pmod{x^2+1}$.

8. $1, 2, \ldots, 27$ sayıları ile numaralandırılmış 27 top, $1, 2, \ldots, 27$ sayıları ile numaralandırılmış 27 kutuya her bir kutuda bir top bulunacak şekilde dağıtılacaktır. Her bir top için topun numarası bulunduğu kutunun numarasının iki katını geçmeyecek şekilde bu dağılım kaç farklı biçimde yapılabilir?

Cevap: $14! \cdot 14!$. 1 numaralı top sadece 1 ve 2 numaralı kutulara yerleştirilebilir. 2 numaralı top sadece 1,2,3 ve 4 numaralı kutulara yerleştirilebilir, bu sayılardan birinde 1 numaralı top olduğuna göre, 3 seçenek bulunuyor. Benzer şekilde devam edersek, $i = 3, 4, \ldots, 13$ olmak üzere, i numaralı topu $i+1$ farklı şekilde yerleştirebiliriz. Bundan sonra her top herhangi bir boş kutuya yerleştirilebilir. Buna göre cevap $14! \cdot 14!$ olur.

9. Bir ABC üçgeninin $[AB]$ kenarı üzerinde bir D noktası alınıyor. D noktasından $[BC]$ kenarına inen dikme ayağı E olmak üzere, $|AD| = 1$, $|BE| = 2$, $|CE| = 4$ ve $|CD| = \sqrt{21}$ ise, $|AC|$ kaçtır?

Cevap: $2\sqrt{5}$. Pisagor teoreminden $|DE| = \sqrt{5}$, $|BD| = 3$ elde ederiz. $|BD| \cdot |BA| = |BE| \cdot |BC|$ olduğundan A, D, E, C noktaları çemberdeş ve böylece $\angle DAC = 90°$ olur. Pisagor teoreminden $|AC| = 2\sqrt{5}$ elde ederiz.

10. x ve y tam sayılar ve $x^2y - 15 = 2x(y+1)$ olmak üzere, $x+y$ nin alabileceği farklı değerler toplamı kaçtır?

Cevap: -6. Verilen eşitlik $(x-2)(xy-2) = 19$ eşitliğine denktir. Buradan incelenmesi gereken 4 durum çıkar. $x-2 = 19, xy-2 = 1$ ise $x = 21, y = 1/7$ olacağından çözüm gelmez. $x-2 = 1$, $xy-2 = 19$ ise $x = 3$, $y = 7$ çözümü gelir. $x-2 = -19$, $xy-2 = -1$ ise $x = -17$, $y = -1/17$ olacağından çözüm gelmez. $x-2 = -1$, $xy-2 = -19$ ise $x = 1$, $y = -17$ çözümü gelir. $x+y$ alabileceği farklı değerler 10 ve -16 olup cevap -6 olur.

11. Ahmet'in 2019 yılındaki yaşı, doğum yılının son iki basamağının çarpımından 4 eksiktir. Buna göre Ahmet'in doğum yılının rakamları toplamı kaçtır?

Cevap: 25. Ahmet'in 2019 yılındaki yaşı en fazla $9^2 - 4 = 77$ dir. O halde Ahmet'in doğum yılı $20ab$ veya $19ab$ formundadır. İlk durumda $2019 - (2000 + 10a + b) = ab - 4$ ve dolayısıyla $23 = b + a(b+10)$. a ve b rakam olduklarından $a = 0$, $a = 1$ veya $a = 2$ bulunur. $a = 0$ ve $a = 1$ durumlarında b rakamı bulunmaz. $a = 2$ iken $b = 1$ bulunur ancak o zaman Ahmet'in 2019 yılındaki yaşı -2 olur, çalişki. O zaman Ahmet'in doğum yılı $19ab$'dir. $\Rightarrow 2019-(1900+10a+b) = ab-4$. $\Rightarrow 123 = ab+b+10a$. $\Rightarrow (b+10)(a+1) = 133 = 19 \cdot 7$. a ve b rakam olduklarından $a = 6$ ve $b = 9$ gelir. O halde Ahmet'in doğum yılı 1969 dur.

12. Özdeş 6 kırmızı top ve özdeş 6 beyaz top A, B, C, D ve E kutularına, A kutusunda kırmızı toplar beyaz toplardan fazla, B kutusunda beyaz toplar kırmızı toplardan fazla, C, D ve E kutularının her birinde ise eşit sayıda kırmızı ve beyaz top olacak biçimde kaç farklı şekilde dağıtılabilir?

Cevap: 252. Kırmızı ve beyaz topların farkı 1. kutuda k sayısına eşit olursa, 2. kutuda $-k$ sayısına eşit olacaktır. $k = 1$ durumunda 1. kutuya 1 kırmızı, 2. kutuya 1 beyaz top yerleştirip kalan topları birer kırmızı ve beyaz top içeren çiftlere ayıralım. Bu 5 çift 5 kutuya $\binom{5+5-1}{5-1} = 126$ şekilde dağıtılabilir.

Benzer şekilde toplar $k=2$ durumunda $\binom{4+5-1}{5-1}=70$, $k=3$ durumunda $\binom{3+5-1}{5-1}=35$, $k=4$ durumunda $\binom{2+5-1}{5-1}=15$, $k=5$ durumunda $\binom{1+5-1}{5-1}=5$ ve $k=6$ durumunda tek şekilde dağıtılabilir. Buna göre cevap $126+70+35+15+5+1=252$ olur.

13. $AB \parallel CD$ olan bir $ABCD$ yamuğunun $[BC]$ kenarı üzerinde alınan bir E noktası için, $|BE|>|EC|$, Alan$(ABE)=15$, Alan$(AED)=23$ ve Alan$(ECD)=4$ ise, $\dfrac{|BE|}{|EC|}$ oranı kaçtır?

Cevap: 5. DE ile AB doğrularının kesişimi F olsun. $|BE|/|EC|=|FE|/|ED|=k$ diyelim. O zaman Alan$(BEC)=4k^2$ olur. Ayrıca Alan$(AEF)/$Alan$(AED)=k$ olacağından $15+4k^2=23k$ eşitliği bulunur. Buradan $(k-5)(4k-3)=0$ elde edilir. Soruda $k>1$ verildiğinden $k=5$ tir.

14. A, B ve C farklı rakamlar olmak üzere, dört basamaklı $A477, B477$ ve $C477$ sayılarının her biri asal sayı olduğuna göre, $A+B+C$ kaçtır?

Cevap: 14. $x \in \{A, B, C\}$ olsun.

$$x477 = 1000 \cdot x + 477 \equiv \begin{cases} x & \pmod 3 \\ 1-x & \pmod 7 \\ 4-x & \pmod{11} \end{cases}$$

olduğundan $x \notin \{3,6,9,1,8,4\}$ olur. Dolayısıyla x'in alabileceği değerler 2,5,7 olabilir. O halde $\{A,B,C\}=\{2,5,7\}$.

15. $2x^2+y^2=1$ eşitliğini sağlayan (x,y) gerçel sayı ikilileri için $2x+y$ toplamının alabileceği en büyük değer kaçtır?

Cevap: $\sqrt{3}$. $(2x+y)^2 \le (2x+y)^2+2(x-y)^2 = 3(2x^2+y^2)=3$ olduğundan $2x+y\le\sqrt{3}$ olur. Eşitlik $x=y=1/\sqrt{3}$ iken sağlanır.

16. A, B, C, D ve E noktaları çevresi 15 birim olan bir çember üzerinde bulunmaktadır. A noktasında bulunan bir böcek, A dan B ye, B den C ye, C den D ye, D den E ye ve E den A ya çember boyunca ilerleyerek gidiyor. Böceğin katettiği mesafeler sırasıyla $(s_1, s_2, s_3, s_4, s_5)$ olmak üzere, $(s_1, s_2, s_3, s_4, s_5)$ beşlisi $(3,7,6,5,6)$, $(3,6,5,2,6)$, $(6,4,3,7,7)$ ve $(5,3,4,5,6)$ beşlilerinden kaçı olabilir?

Cevap: 4. Saatin ters yönünü pozitif yön seçelim. $(s_1, s_2, s_3, s_4, s_5)$ değeri alınabiliyorsa k bir tam sayı olmak üzere, $\pm s_1 \pm s_2 \pm s_3 \pm s_4 \pm s_5 = 15k$ olacaktır. $3+7+6+5-6 = 15$, $3-6-5+2+6 = 0$, $6-4-3-7-7 = -15$, $5+3-4+5+6 = 15$ olduğuna göre, beşlilerin dördü de olabilir.

17. $k < n$ olmak üzere $A_1A_2 \dots A_k$ düzgün k-geni $A_1A_2B_3B_4 \dots B_n$ düzgün n-geninin içindedir. $A_3A_4B_4$ bir eşkenar üçgen ise, $k + n$ kaçtır?

Cevap: 27. $A_3A_4B_4$ eşkenar üçgen olduğundan $A_2A_3B_4B_3$ bir eşkenar dörtgendir. k-genin bir içaçısı x ve n-genin bir içaçısı y olsun. O zaman $180° = \angle A_3A_2B_3 + \angle A_2B_3B_4 = (y - x) + y = 2y - x$ olur. Öte yandan $360° = \angle A_4A_3B_4 + \angle A_4A_3A_2 + \angle A_2A_3B_4 = 60° + x + y$ olduğu görülür. Bu iki denklemden $y = 160°$ ve $x = 140°$ elde edilir ve dolayısıyla $n = 18$ ve $k = 9$ dur.

18. a ve b pozitif tam sayılar olmak üzere, $a*b$ işlemi, a nın b ile böümünden kalan sayı ile b nin a ile bölümünden kalan sayının çarpımı olarak tanımlanıyor. Örneğin, $18 * 7 = 28$ ve $5 * 10 = 0$ dır. $n * 23 = 30$ eşitliğini sağlayan n pozitif tam sayılarının toplamı kaçtır?

Cevap: 16. $n \geq 23$ ise $n * 23$ sayısı 23 ün tam katı olur. $\Rightarrow n < 23$. O halde n ile 23 ün n ile bölümünden kalan sayının çarpımı 30 dur. Mümkün ikililer 30 ve 1, 15 ve 2, 10 ve 3, 6 ve 5 tir. Bu durumlardan sadece son ikisi için eşitlik sağlanır. Cevap $10 + 6 = 16$.

19. $x = \dfrac{8}{(16+\sqrt{240})(4+\sqrt[4]{240})(2+\sqrt[8]{240})}$ olmak üzere, $\dfrac{1}{1-(1-x)^8}$ kaçtır?

Cevap: 16. x ifadesinde pay ve payda $2 - \sqrt[8]{240}$ ile çarpılırsa iki kare farkı özdeşliklerinden $x = (2 - \sqrt[8]{240})/2$ elde edilir. $\Rightarrow 2(1 - x) = \sqrt[8]{240}$. $\Rightarrow$ $1 - (1 - x)^8 = 1 - 240/256 = 1/16$ ve dolayısıyla cevap 16.

20. Aslı ve Berk, başlangıçta hiçbir birim karesi boyalı olmayan 27×27 bir tahta üzerinde sırayla hamleler yaparak bir oyun oynuyorlar. Oyuna ilk başlayan Aslı, sırası geldiğinde boyalı olmayan bir birim kareyi kırmızıya boyuyor. Sıra Berk'e geldiğinde ise Berk, tahtanın birim karelerinden oluşan ve hiçbir birim karesi boyalı olmayan bir 2×2 karenin dört birim karesini de maviye boyuyor. Bir oyuncu hamle yapamıyorsa oyun bitiyor ve Berk boyadığı birim kare sayısı kadar puan kazanıyor. Buna göre, Berk en fazla kaç puan kazanmayı garantileyebilir?

Cevap: 336. Koordinat sistemini satranç tahtasının sol alt birim karesinin merkezinin koordinatları $(0,0)$ olmak üzere yerleştirelim. Her birim kare bu birim karenin merkezinin koordinatlarıyla tanımlanmış olsun. $k, l = 0, 1, \ldots, 12$ olmak üzere, $(1+2k, 1+2l)$ kareleri özel birim kare olsun. Buna göre toplam 169 özel birim kare vardır. Berk'in her hamlesinde maviye boyadığı birim karelerden tam olarak biri özel birim kare olacaktır. Buna göre, Aslı her hamlesinde bir özel kareyi kırmızıya boyarsa, Berk en fazla $[169/2] = 84$ hamle yapabilir. Diğer taraftan, Berk satranç tahtasında herhangi ikisi ortak birim kare paylaşmayan 169 tane 2×2 kare belirleyip her hamlesinde sadece bu karelerden birini boyarsa, 84 tane 2×2 kareyi boyamayı garantiler. Buna göre, cevap $84 \cdot 4 = 336$ olur.

21. $m(\widehat{ACB}) = 90^\circ$ olan bir ABC dik üçgeninde C ye ait yükseklik ayağı D olmak üzere $|AD| = 8$ ve $|BD| = 17$ dir. $\widehat{ACB}$ ve $\widehat{CDB}$ açılarının iç açıortaylarının kesişim noktası E ise, $|CE|$ kaçtır?

Cevap: 10. $\angle ACE = \angle BDE = 45^\circ$ olduğundan A, C, E, D noktaları çemberdeştir. $\Rightarrow \angle CAE = \angle CDE = 45^\circ$ ve dolayısıyla CEA bir ikizkenar dik üçgendir. Öklid bağıntılarından $|AC| = \sqrt{8(8+17)} = 10\sqrt{2}$ elde edilir. $\Rightarrow |CE| = 10\sqrt{2}/\sqrt{2} = 10$.

22. Ardışık iki pozitif tam sayının her ikisinin de rakamları toplamı 11 ile tam bölünüyorsa, bu ardışık sayılardan küçük olanı en az kaç basamaklıdır?

Cevap: 7. Küçük olan sayının sonunda k tane 9 olsun. O zaman bu iki ardışık sayının rakamları toplamı farkı $9k-1$ olur. $\Rightarrow 11|9k-1$. $\Rightarrow k \equiv 5 \pmod{11}$. $\Rightarrow k \geq 5$. Ayrıca küçük olan sayıda sondaki 9 lar dışında yalnızca bir rakam bulunamaz, aksi takdirde büyük sayının rakamları toplamı en fazla 9 olur. O halde küçük olan sayının en az 7 basamağı vardır. Örnek: 2899999 ve 2900000.

23. Bir $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu her x gerçel sayısı için

$$f(x^2 - 4x + 1) = (f(x) - 5x + 5)(x^2 - 4x)$$

eşitliğini sağlıyorsa, $f(5)$ kaçtır?

Cevap: 28. $x = 0$ alırsak $f(1) = 0$ olur. $x = 1$ alırsak $f(-2) = 0$ olur. $x = -2$ alırsak $f(13) = 180$ olur. $x = 6$ alırsak $f(6) = 40$ olur. $x = 5$ alırsak $f(5) = 28$ olur. Eşitliği sağlayan bir örnek: $f(x) = x^2 + x - 2$.

24. $A_1, A_2, \ldots, A_8$ adalar olmak üzere, her $k = 1, 2, \ldots, 7$ için A_k ile A_{k+1} ve A_8 ile A_1 arasında ikişer köprü bulunmaktadır. A_1 adasında bulunan bir kişi, bu 16 köprünün her birinden tam olarak bir kez geçerek A_1 adasına dönecek şekilde kaç farklı güzergah izleyebilir?

Cevap: 4608. Kişi güzergah boyunca hiç yön değiştirmeyecekse, önce 2 yönden birini seçiyor ve daha sonra ilk 8 köprüyü 2^8 farklı şekilde belirliyor. Bundan sonra son 8 köprü tek türlü belirlendiği için toplam $2 \cdot 2^8$ güzergah oluşuyor. Kişi yön değiştirmeyi $m = 1, 2, \dots, 8$ olmak üzere, uğradığı m. adada yapabilir. $m = 1, 2, \dots, 7$ durumlarında kişi önce 2 yönden birini seçiyor ve ilk m köprüyü 2^m farklı şekilde belirliyor. Bundan sonra yün değiştiriyor ve A_1 adasına ulaşana dek kullandığı m köprü tek türlü belirleniyor. Daha sonra kullandığı $8 - m$ köprüyü yine 2^{8-m} farklı şekilde belirleyip yine aynı adada ikinci kez yön değiştiriyor. $m = 8$ durumunda ise ilk 8 köprü 2^8 farklı şekilde belirliyor ve A_1 adasında bir kez yön değiştiriyor. Buna göre, her $m = 1, 2, \dots, 8$ için $2 \cdot 2^8$ güzergah oluşuyor. Sonuç olarak toplamda $2 \cdot 2^8 + 8 \cdot 2 \cdot 2^8 = 18 \cdot 2^8 = 4608$ güzergah oluşuyor.

25. $C \in [AB]$ olmak üzere, $[AB]$ çaplı bir yarım çember üzerinde D ve E noktaları $m(\widehat{ACD}) = m(\widehat{BCE}) = 30^\circ$ olacak biçimde alınıyor. $|AC| = 27$ ve $|CB| = 3$ ise, $|CD| - |CE|$ kaçtır?

Cevap: $12\sqrt{3}$. Yarım çemberin merkezi O olsun. O zaman $|OC| = 12$ olur. $|CD| = x$ ve $|CE| = y$ olsun. OCD ve OEC üçgenlerinde Kosinüs teoreminden $x^2+144-12x\sqrt{3} = 225 = y^2+144+12y\sqrt{3}$ elde edilir. Buradan $(x-y)(x+y) = (x+y)12\sqrt{3}$ gelir ve dolayısıyla $x - y = 12\sqrt{3}$ tür.

26. n bir pozitif tam sayı ve $a_1, a_2, \dots, a_n \in \{-3, 2\}$ olmak üzere, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k \binom{n}{k} =$ 87 eşitliği sağlanıyorsa, n nin alabileceği en küçük değer nedir?

Cevap: 9.

$$87 = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \binom{n}{i} \le 2 \cdot \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} = 2(2^n - 1)$$

olduğundan $n \ge 6$ dır.

$$2 \equiv 87 \equiv 2 \cdot \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} \equiv 2(2^n - 1) \pmod 5$$

olduğundan $4 \mid n - 1$ dir. Yani n en az 9 olabilir. $n = 9$ için örnek:

$$-3\left[\binom{9}{1} + \binom{9}{3} + \binom{9}{6} + \binom{9}{8} + \binom{9}{9}\right] + 2\left[\binom{9}{2} + \binom{9}{4} + \binom{9}{5} + \binom{9}{7}\right] = 87.$$

27.

$$x = y^2 + y + 1$$
$$5y = 2 - x - x^2$$

denklem sistemini sağlayan kaç (x, y) gerçel sayı ikilisi vardır?

Cevap: 2. $-5y = x^2 + x - 2 = (x+2)(x-1) = (x+2)y(y+1)$ olur. $y = 0$ için $x = 1$ sağlar. $y \neq 0$ için $-5 = (x+2)(y+1) = (y^2+y+3)(y+1)$ ve buradan da $y^3 + 2y^2 + 4y + 8 = (y+2)(y^2+4) = 0$ elde ederiz. $y = -2, x = 3$ diğer çözümdür.

28. Bir ağaç üzerinde bulunan 22 yuvanın herhangi ikisi $r_1, r_2, \dots, r_n$ renklerinden biri ile boyalı bir iple birleştirilmiştir. Bir salyangoz, her $k = 1, 2, \dots, n$ için herhangi bir yuvadan herhangi başka bir yuvaya sadece r_k rengine boyalı ipler üzerinde ilerleyerek varabiliyorsa, n nin alabileceği en büyük değer nedir?

Cevap: 11. Her renge boyalı en az 21 ip bulunması gerekiyor. Buna göre, $k \leq \dfrac{\binom{22}{2}}{2} = 11$ olacaktır. Şimdi $2n$ yuva için iplerin n renge boyanabileceğini n üzerinden tümevarım yaparak gösterelim. $n = 1$ durumu açıktır. n için boyamanın yapılabileceğini varsayalım. $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$ yuvalarını birleştiren ipler $r_1, r_2, \dots, r_n$ renkleriyle boyanmış olsun. Her $i = 1, 2, \dots, n$ için a_{n+1} ve a_i yuvalarını birleştiren iple b_{n+1} ve b_i yuvalarını birleştiren ipi r_i rengine boyayalım. Daha sonra a_{n+1} ve b_i yuvalarını birleştiren iple b_{n+1} ve a_i yuvalarını birleştiren iplerin hepsini r_{i+1} rengine boyayalım. Son olarak a_{n+1} ve b_{n+1} yuvalarını birleştiren ipi de r_{n+1} rengine boyarsak koşullar sağlanmış olacaktır.

29. Bir dikdörtgenler prizmasının bir yüzeyi kırmızıya, iki yüzeyi maviye ve üç yüzeyi sarıya boyanmıştır. Kırmızı renkli yüzeyin alanı 100 cm^2, mavi renkli yüzeylerin alanları toplamı 109 cm^2 ve sarı renkli yüzeylerin alanları toplamı 59 cm^2 ise, bu prizmanın hacmi kaç cm^3 tür?

Cevap: 150. Ortak bir köşeye sahip üç yüzeyin alanları $A \geq B \geq C$ olsun. A, A, B, B, C, C sayıları, biri 100'e, ikisinin toplamı 109'a ve üçünün toplamı 59'a eşit olacak şekilde üç gruba ayrılmıştır. Kolayca görüleceği üzere $A = 100$ olmalıdır. O halde $\{x, y\} = \{B, C\}$ olmak üzere, $A + x = 109$ ve $x + 2y = 59$ olur. Buradan da $x = 9$ ve $y = 25$ elde edilir. Sonuç olarak $\{A, B, C\} = \{100, 25, 9\}$ bulunur ve hacim de $\sqrt{ABC} = \sqrt{100 \cdot 25 \cdot 9} = 150$ cm^3 bulunur.

30. Ahmet aklında bir pozitif tam sayı tutuyor. Sonrasında Ahmet Betül'e, bu sayının üç basamaklı olduğunu ve bu sayının sırasıyla 10, 11 ve 12 ile bölümünden kalanları söylüyor. Betül yalnızca bu bilgileri kullanarak Ahmet'in sayısını bulabiliyor. Buna göre, Ahmet'in tuttuğu sayının alabileceği en büyük değer ile en küçük değer arasındaki fark kaçtır?

Cevap: 419. Ahmet'in tuttuğu sayı n olsun. $\text{okek}(10, 11, 12) = 660$ olduğundan Ahmet'in verdiği biligiler $100 \leq n \leq 999$ ve n nin 660 ile bölümünden kalan sayıdır. $100 \equiv 760 \pmod{660}, 101 \equiv 761 \pmod{660}, \dots, 339 \equiv 999 \pmod{660}$ olduğundan n sayısı $100, \dots, 339, 760, \dots, 999$ sayılarından biri olamaz. $340, 341, \dots, 759$ sayılarından herhangi biri için o sayıya $\pmod{660}$ da denk üç basamaklı yalnızca bir sayı bulunduğundan Ahmet'in tutuğu sayının alabileceği değerler $340, 341, \dots, 759$ dur ve dolayısıyla cevap $759 - 340 = 419$ olur.

31. $x^9 + x^7 + x^6 + x^5 + x^2 - x - 1$ polinomunun gerçel köklerinin toplamı A ve çarpımı B olmak üzere, $A(B + 1)$ kaçtır?

Cevap: -1. $x^9 + x^7 + x^6 + x^5 + x^2 - x - 1 = (x^3 + x + 1)(x^6 + x^2 - 1)$ dir. $P(x) = x^3 + x + 1$ tek dereceli ve artan olduğundan tek gerçel kökü vardır. Öte yandan bu kök negatif olduğundan bir $a > 0$ sayısı için $-a^2$ formundadır. $x^6 + x^2 - 1 = -P(-x^2)$ olduğundan bu polinomun da ters işaretli iki tane gerçel kökü vardır. Bu kökler $-a$ ve a olmalıdır. $a^6 + a^2 = 1$ dir. Yani toplam üç gerçel kök vardır ve bunlar $-a, a, -a^2$ formundadır. Bu durumda $A = -a^2$, $B = a^4$ olacağından $A(B + 1) = -a^2(a^4 + 1) = -a^6 - a^2 = -1$ olur.

32. Düz bir yol üzerinde yan yana yer alan 27 bahçenin herhangi ikisinde aralarındaki hiçbir bahçede bulunmayan aynı bir ağaç türü yer almaktadır. Buna göre, bu bahçelerin en az birinde yer alan ağaç türü sayısı en az kaçtır?

Cevap: 182. Bahçelerin koordinat doğrusu üzerinde $1, 2, \dots, 27$ noktalarında bulunduklarını varsayalım. $1, 2, \dots, 13$ noktalarındaki bahçeler birinci, $14, 15, \dots 27$ noktalarındaki bahçeler ise ikinci bahçe grubunu oluştursun. Biri birinci, bir diğeri ikinci gruptan olan bahçelerin oluşturdukları $13 \cdot 14 = 182$ tane bahçe ikilisi vardır. Bu bahçe ikililerine temel ikili diyelim. Koşullara göre, herhangi temel bahçe ikilisinde diğer temel bahçe ikililerinde bulunmayan bir ağaç türü bulunuyor. Buna göre, en az 182 ağaç türü vardır. Diğer taraftan, x ve y noktalarındaki bahçelerin oluşturduğu temel bahçe ikilisinde bulunup diğer temel bahçe ikililerinde bulunmayan ağaç türü, k pozitif tam sayı olmak üzere, $x - k|y - x|$ ve $y + k|y - x|$ noktalarındaki bahçelerde de bulunursa, bu 182 ağaç türü yeterli olur.