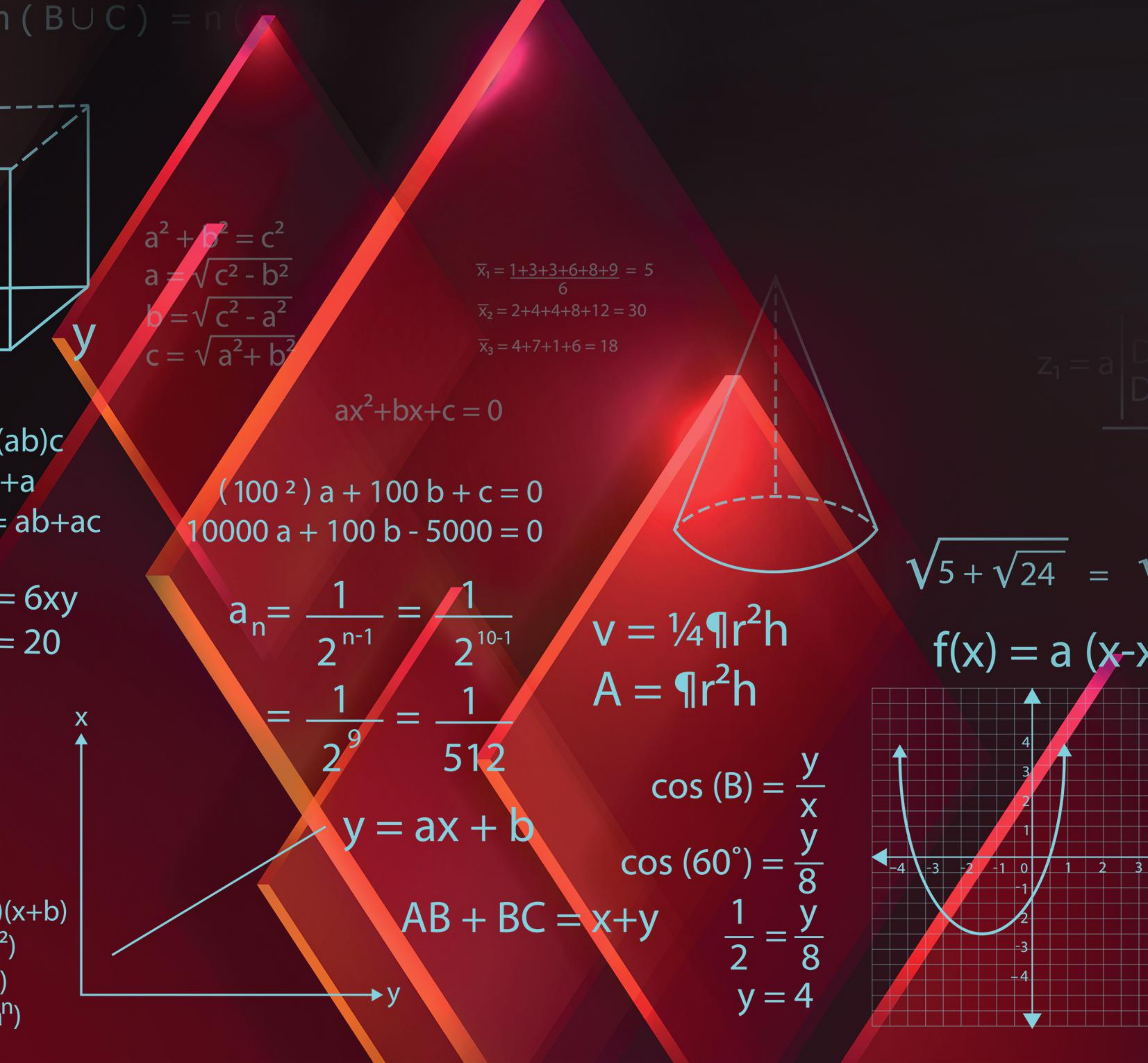
TÜBİTAK

Türkiye Cumhuriyeti
SANAYİ VE TEKNOLOJİ BAKANLIĞI

MATEMATİK

26. ULUSAL
MATEMATİK OLİMPİYATI
BİRİNCİ AŞAMA SINAV
SORU VE ÇÖZÜMLERİ

2018



TÜRKİYE BİLİMSEL VE TEKNOLOJİK ARAŞTIRMA KURUMU
BİLİM İNSANI DESTEK PROGRAMLARI BAŞKANLIĞI

ULUSAL MATEMATİK OLİMPİYATLARI SORU ve ÇÖZÜMLERİ

Ankara

Nisan 2019

1. $m(\widehat{BAC}) = 140^\circ$ ve $m(\widehat{ABC}) = 30^\circ$ olan bir ABC üçgeninde, A noktasının BC doğrusuna göre simetriği D, B noktasının AC doğrusuna göre simetriği ise E dir. $m(\widehat{DEC})$ kaçtır?

Cevap: 50°. $m(\widehat{CBD}) = m(\widehat{CBA}) = 30^\circ$. O zaman $m(\widehat{ABD}) = 60^\circ$ ve dolayısıyla ABD bir eşkenar üçgendir. O halde $|AB| = |AD|$. Ayrıca simetriden $|AB| = |AE|$. Dolayısıyla ABD bir ikizkenar üçgendir. $m(\widehat{BAD}) = m(\widehat{EAB}) + m(\widehat{BAD}) = 80^0 + 60^\circ = 140^0$. Buradan $m(\widehat{DBA}) = 20^\circ$ ve dolayısıyla $m(\widehat{DBC}) = m(\widehat{DBA}) + m(\widehat{AEC}) = 20^\circ + 30^\circ = 50^\circ$ olduğu bulunur.

2. $x_0, x_1, \ldots, x_{2018}$ tam sayıları $x_0 = 1$, $x_1 = 2$ ve her $n \geq 1$ için $x_{n+1} = 3x_n - 2x_{n-1}$ koşulunu sağlıyorsa, x_{2018} sayısının 2018 ile bölümünden kalan kaçtır?

Cevap: 4. İndirgemeli dizilerden veya $x_{\mathrm{n+1}} - x_{\mathrm{n}} = 2(x_{\mathrm{n}} - x_{\mathrm{n-1}})$ den $x_{\mathrm{n}} = 2^{\mathrm{n}}$ bulunur. $x_{2018} = 0 \pmod 2$ ve $x_{2018} = 4 \pmod{1009}$ ve Çinli kalan teoreminden $x_{2018} = 4 \pmod{2018}$.

3. $(x^2 - 2x\sqrt{2} + 7)(y^2 + 2y\sqrt{3} + 8) = 25$ denklemini sağlayan kaç farklı (x, y) gerçel sayı ikilisi vardır?

Cevap: 1. $((x - \sqrt{2})^2 + 5)((y + \sqrt{3})^2 + 5) = 25$ her iki çarpanın en küçük değeri 5 olur.

4. Her elemanı 6^{12} sayısının bir pozitif böleni olan ve herhangi iki farklı elemanının çarpımı tam küp olmayan bir kümede en çok kaç eleman bulunabilir?

Cevap: 73. Her $i, j \in \{0, 1, 2\}$ için $A_{ij} = \{2^s 3^t : 0 \leq s, t \leq 12, s \equiv i \pmod 3, t \equiv j \pmod 3\}$ olsun. Çarpımları tam küp olan iki eleman içermeyen bir küme; A_{00}'dan en fazla 1, $A_{01} \cup A_{02}$'den en fazla 20, $A_{10} \cup A_{20}$'den en fazla 20, $A_{11} \cup A_{22}$'den en fazla 16, $A_{12} \cup A_{21}$'den en fazla 16, toplamda en fazla 73 eleman içerebilir. 73 elemanlı $\{1\} \cup A_{01} \cup A_{10} \cup A_{11} \cup A_{12}$ kümesinde çarpımları tam küp olan iki eleman yoktur.

5. C açısı dik olan bir ABC üçgeninde $4|AC| = 3|BC|$ dir. ABC nin iç teğet çemberi BC ye D de, AC ye ise E de teğettir. AD doğrusu iç teğet çemberi D den farklı bir S noktasında, BE doğrusunu ise T noktasında kesiyor.

$\dfrac{|AS|}{|TD|}$ kaçtır?

Cevap: $\dfrac{22}{15}$. F noktası iç teğet çemberin AB ye değme noktası, r iç teğet çemberin yarıçapı olsun. $3k \cdot 4k/2 = (3+4+5)k \cdot r/2$ ve buradan $r = k$. Yani $CE = CD = k$, $BD = BF = 3k$, $AE = AF = 2k$. CAD üçgeninde BE kesenine göre Menelaus teoreminden $3k/4k \cdot k/2k \cdot AT/TD = 1$ ve buradan $AT/TD = 8/3$ olur. Pisagor teoreminden $AD = k\sqrt{10}$ ve kuvvetten $AS \cdot AD = 4k^2$. Yani $AS = 4k/\sqrt{10}$ ve $TD = 3k\sqrt{10}/11$ olur. Sonuç olarak $AS/TD = 22/15$ olur.

6. Bir a pozitif tam sayısını tam bölmeyen en küçük pozitif tam sayıya a nın *ilk bölmeyeni* diyelim. Kaç $n \leq 26$ pozitif tam sayısı için ilk bölmeyeni n olan bir pozitif tam sayı bulunur?

Cevap: 14. a ve n herhangi pozitif tam sayılar olmak üzere her p asal sayısı için $p^{v_p(n)} \mid a$ ise $n \mid a$ sağlanır. Yani $n \nmid a$ ise en az bir p asal sayısı için $p^{v_p(n)} \nmid a$ olmalıdır.

Yukarıdaki gözlemden dolayı, a nın ilk bölmeyeni n ise $n = p^{v_p(n)}$ dir, yani bir k pozitif tam sayısı için $n = p^k$ formundadır. Öte yandan $n = p^k$ ise $n \nmid okek(1, 2, \ldots, n-1)$olduğundan n bu sayının açıkça ilk bölmeyenidir. Soruda verilen aralıktaki p^k formundaki sayılar şunlardır: $2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 11, 13, 16, 17, 19, 23, 25$, yani 14 tanedir.

7. $n_1, n_2, \ldots, n_{2018}$ tam sayılar olmak üzere,

$$n_1^2 + n_2^2 + \cdots + n_{2018}^2 + 4036 = 3(n_1 + n_2 + \cdots + n_{2018})$$

eşitliği sağlanıyorsa, $n_1^2 + n_2^2 + \cdots + n_{2018}^2$ toplamının alabileceği kaç farklı değer vardır?

Cevap: 2019. Her n_i tam sayısı için $n_i^2 - 3n_i + 2 = (n_i - 1)(n_i - 2) \geq 0$ olur. Bu yüzden $n_1^2 + n_2^2 + \cdots + n_{2018}^2 + 4036 \geq 3(n_1 + n_2 + \cdots + n_{2018})$ olur. Eşitlik durumu her i için $n_i \in \{1, 2\}$ iken sağlanır. $n_1 + n_2 + \cdots + n_{2018}$ toplamı 2018 ile 4036 arasındaki tüm tam sayı değerlerini alabilir. $n_1 + n_2 + \cdots + n_{2018}$ toplamının her bir değerine karşılık bir $n_1^2 + n_2^2 + \cdots + n_{2018}^2$ değeri olduğundan cevap 2019 olur.

8. 12×12 satranç tahtasının birim karelerinden k tanesi kırmızı ve k tanesi mavi renge, hiçbir kırmızı birim karenin hiçbir komşusu (ortak kenar veya köşeye sahip birim kareler) boyanmayacak şekilde boyanabiliyorsa, k nin alabileceği en büyük değer nedir?

Cevap: 28. Satranç tahtasını 36 adet 2×2 kareye bölelim. Her 2×2 karede en fazla bir tane kırmızı birim kare var. $k > 28$ ise geriye 7 tane 2×2 kalıyor ve en fazla $7 \cdot 4 = 28$ beyaz taş oluyor. $k = 28$ durumundaki örnekte satranç tahtasının üst sol birim karesinden başlayarak ve bir atlayarak önce 28 birim kareyi kırmızıya ve daha sonra alt sağ köşe kısmındaki birim karelerden 28 tanesini beyaza boyamak gerekiyor.

9. $ABCD$ dışbükey dörtgeninde $|AD| = |CD|$, $m(\widehat{ADB}) = 38°, m(\widehat{CDB}) = 42°, m(\widehat{ABC}) = 140°$ olduğuna göre $m(\widehat{BAC})$ kaçtır?

Cevap: 21°. D merkezli, AD yarıçaplı çember çizelim. BD nin uzantısının bu çemberi kestiği nokta E olsun. $\hat{D}$ merkez açı, $m(ADC) = 80°$ olduğundan $m(AEC) = 40°$.m(AEC) + m(ABC) = 180° olduğundan bu çember B den geçiyor. Buradan da $m(BAC) = 21°$.

10. Tam olarak 26 farklı tam kare ile bölünebilen en küçük pozitif tam sayının 7 ile bölümünden kalan kaçtır?

Cevap: 2. $n = \prod_{i=1}^{k} p_i^{a_i}$ ise, n'nin tamkare bölen sayısı $\prod_{i=1}^{k}(1 + \lfloor a_i/2 \rfloor)$ olur. Tamkare bölen sayısı 26 olan bir sayı p^a $(a \in \{50, 51\})$ veya $p^a q^b$ $(a \in \{2, 3\}$ ve $b \in \{24, 25\})$ şeklinde olmalıdır. Bu formların birinde olan en küçük sayı da $2^{24}3^2 \equiv 2 \pmod 7$ dir.

11.

$$x^2 + xy - y^2 = 10x$$
$$x^3 - xy^2 + y^2 = 10y$$

denklem sistemini sağlayan kaç farklı (x, y) gerçel sayı ikilisi vardır?

Cevap: 4. İlk denklem x ile çarpılıp ikinciden taraf tarafa çıkarılırsa $x^2y - y^2 = 10(x^2 - y)$ elde edilir. Buradan da $(x^2 - y)(y - 10) = 0$ bulunur. $x^2 = y$ için $-x^4 + x^3 + x^2 = 10x$ ve buradan da $x(x + 2)(x^2 - 3x + 5) = 0$ olur. Gelen çözümler $(x, y) = (0, 0)$, $(-2, 4)$ olur. $y = 10$ için $x^2 = 100$ ve buradan da $(x, y) = (10, 10)$, $(-10, 10)$ olur. Toplam 4 çözüm vardır.

12. Tahtada başlangıçta 2018 sayısı yazılıdır. Her hamlede tahtadaki sayı silinip yerine o sayının 12 eksiği veya 9 katının 4 eksiği yazılıyor. Aşağıdaki sayılardan hangisi sonlu sayıda hamle sonucunda tahtada yazılı olabilir?

Cevap: $6^{33} + 2$. $2018 \equiv 2 \pmod{12}$ olduğundan tahtada her zaman (mod 12)'de 2'ye denk bir sayı yazılıdır. 9 katının 4 eksiği hamlesi yeterince kez yapılıp tahadaki sayı istenilen büyüklüğe ulaşır ve 12 çıkarma hamlesi ile (mod 12)'de 2'ye denk herhangi bir pozitif tam sayı elde edilebilir. Şıklarda yalnızca $6^{33} + 2 \equiv 2 \pmod{12}$.

13. Bir ABC üçgeninde $|AB| = |AC| = 2, |BC| = \sqrt{2}$ dir. $[BC]$ nin orta noktası D, $[AC]$ nin orta noktası ise E dir. ABC nin çevrel çemberi üzerinde AB doğrusuna göre C ile farklı tarafta olan ve $|PC|^2 = |PD|^2 + |PE|^2$ eşitliğini sağlayan bir P noktası alınıyor. $|PA| + |PB|$ kaçtır?

Cevap: $1 + \sqrt{2}$. PAC ve PBC üçgenlerinde kenarortay teoreminden

$$PE^2 = \frac{AP^2 + PC^2}{2} - \frac{AC^2}{4} \text{ ve } PD^2 = \frac{BP^2 + PC^2}{2} - \frac{BC^2}{4}$$

elde ediyoruz. Bu iki eşitliği taraf tarafa toplayarak

$$AP^2 + BP^2 = \frac{BC^2 + CA^2}{2} = 3 \qquad (1)$$

elde ederiz. APB üçgeninde kosinüs teoremini kullanarak

$$AP^2 + BP^2 + 2 \cdot AP \cdot BP \cdot \frac{BC^2 + CA^2 - AB^2}{2 \cdot BC \cdot CA} = AB^2$$

elde ediyoruz ve buradan $AP \cdot BP = \sqrt{2}$. O zaman (1) den AP ve BP uzunluklarından biri 1 diğeri $\sqrt{2}$ olmalıdır. Son olarak $PA + PB = 1 + \sqrt{2}$ olur.

14. $k, n_1, n_2, \ldots, n_k$ pozitif tam sayılar olmak üzere $4^{n_1} + 4^{n_2} + \cdots + 4^{n_k}$ sayısı 43 ile tam bölünüyorsa, k en az kaç olabilir?

Cevap: 3. 4'ün tam kuvvetleri 43 modunda $1, 4, 16, 21, -2, -8, -32$ değerlerini alabiliyor. Bu sayıların herhangi ikisinin toplamı 43 ile bölünmüyor. Öte yandan $1 + 21 + 21 = 43$ olduğundan cevap 3 olur.

15. x bir irrasyonel sayı olmak üzere, $x^2 - 2x$ ve $x^3 - 5x$ rasyonel sayılar ise, $x^3 - 5x$ kaçtır?

Cevap: 2. $x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2 = y$ rasyonel sayıdır, $x = 1 \pm \sqrt{y}$ buradan $(1 \pm \sqrt{y})^3 - 5(1 \pm y) = 1 + 3y - 5 \pm \sqrt{y}(y-2)$ rasyonel sayıdır, bu da sadece y=2 durumunda oluyor.

16. $1, 2, \dots, 7$ sayılarıyla numaralandırılmış yedi kutunun her birine en az 1 ve en çok 10 olmak üzere, bilyeler dağıtılacaktır. Böyle bir dağılımda $i < j$ olmak üzere, i numaralı kutudaki bilye sayısı j numaralı kutudaki bilye sayısından az değilse, (i, j) ikilisine *ters ikili* diyelim. Tam olarak bir ters ikili içeren kaç dağılım vardır?

Cevap: 1980. i-inci kutudaki bilye sayısı x_i olsun. Tam olarak bir ters ikili içeren bir dağılım için tam olarak bir $i < j$ ikilisi hariç $x_i < x_j$ olmalı. $x_1, x_2, \dots, x_7$ dizisinde artanlığı bozan yalnızca bir ikili olması için ya $\{1, 2, \dots, 10\}$'dan seçilen 6 sayıdan birinden iki tane alınıp azalmayan şekilde sıralanmalı ya da $\{1, 2, \dots, 10\}$'dan seçilen 7 sayı artan şekilde sıralanıp ardışık bir ikilinin yerleri değiştirilmeli. Cevap

$$\binom{10}{6}\binom{6}{1} + \binom{10}{7} \cdot 6 = 1980.$$

17. $m(\widehat{ACB}) = 60^\circ$ olan dar açılı bir ABC üçgeninde diklik merkezi H ve A dan karşı kenara indirilen dikmenin ayağı D dir. $[AC]$ üzerinde $|BD| \cdot |CD| = |ED|^2$ olacak şekilde bir E noktası alınıyor. $|BH| = 7|EH|$ ise $\dfrac{|AE|}{|CE|}$ kaçtır?

Cevap: $\dfrac{1}{4}$. $\Delta BDH \sim \Delta ADC$ olduğundan $|BD| \cdot |CD| = |DH| \cdot |DA|$ olur. Buradan da $|DE|^2 = |DH| \cdot |DA|$ buluruz. Yani $\Delta DHE \sim \Delta DEA$ olur. $\angle HBD = \angle DAE = \angle HED = 30^\circ$ olur. $\angle ADE = \alpha$ olsun. $1/7 = |EH|/|BH| = |EH|/|HD| \cdot |HD|/|BH| = (\sin\alpha / \sin 30) \cdot \sin 30 = \sin\alpha$ olur. $|AE|/|EC| = \tan\alpha / \tan 30 = 1/(4\sqrt{3})/(1/\sqrt{3}) = 1/4$ olur.

18. $2^{2^n} + 2^n + n$ ifadesinin 7 ile tam bölünmesini sağlayan kaç $n \leq 420$ pozitif tam sayısı vardır?

Cevap: 60.

$$2^{2^n} \equiv \begin{cases} 2 \pmod 7, & n \equiv 0 \pmod 2 \\ 4 \pmod 7, & n \equiv 1 \pmod 2 \end{cases}$$

$$2^n \equiv \begin{cases} 1 \pmod 7, & n \equiv 0 \pmod 3 \\ 2 \pmod 7, & n \equiv 1 \pmod 3 \\ 4 \pmod 7, & n \equiv 2 \pmod 3 \end{cases}$$

olduğundan n nin 6 modundaki her bir değeri için $2^{2^n} + 2^n + n$ ifadesinin 7 ile tam bölünmesini sağlayan 42 modunda tam olarak bir tane uygun değer vardır. Bu yüzden 420 den küçük tam olarak 60 tane n sayısı bulunur.

19. Bir $a_1, a_2, \ldots, a_{100}$ pozitif gerçel sayı dizisinde $a_1 = 1$ ve her $n = 1, 2, \ldots, 99$ için

$$\frac{1}{a_{n+1}} + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(a_i + a_{i+1})\sqrt{a_i^2 + i^2}} = 1$$

sağlanıyorsa, a_{100} kaçtır?

Cevap: 10. Tümevarımla $a_k = \sqrt{k}$ olduğunu kanıtlayacağız. $i = 1, 2, \ldots, k-1$ için $a_i = \sqrt{i}$ olsun. Bu durumda her $i = 1, 2, \ldots, k-2$ için

$$\frac{1}{(a_i + a_{i+1})\sqrt{a_i^2 + i^2}} = \frac{1}{\sqrt{i}} - \frac{1}{\sqrt{i+1}}$$

olur. Verilen eşitlikte $n = k - 1$ alırsak

$$\frac{1}{a_k} + \frac{1}{(\sqrt{k-1} + a_k)\sqrt{(k-1)^2 + k - 1}} + \sum_{i=1}^{k-2} \left(\frac{1}{\sqrt{i}} - \frac{1}{\sqrt{i+1}} \right) = 1$$

olur. Eşitliği düzenlersek

$$\sqrt{k-1}(a_k - \sqrt{k})(\sqrt{k}a_k + k - 1) = 0$$

elde edilir. Soruda $a_k > 0$ verildiğinden $a_k = \sqrt{k}$ olur ve çözüm biter. $a_{100} =$ 10 olur.

20. $1, 2, \ldots, 26$ sayılarıyla numaralandırılmış 26 böcek başlangıçta k numaralı böcek $(k, 0)$ noktasında bulunacak şekilde koordinat düzlemine yerleştirilmiştir. Her hamlede tam olarak bir böcek bulunduğu (a, b) noktasından $(a+1, b), (a-1, b), (a, b+1),\ (a, b-1)$ noktalarından birine, atlayacağı noktada başka bir böcek bulunmuyorsa, atlıyor. En az kaç hamle sonucunda her $k = 1, 2, ..., 26$ için k nolu böcek $(27 - k, 0)$ noktasında bulunabilir?

Cevap: 388. Bir böcek dışında her böcek en az iki dikey hamle yapmak zorindadır. 1. böcek en az 25, 2. en az 23, ... 13. en az 1, 14. en az 1, 26. en az 25 yatay hamle yapmak zorundadır. O zaman cevap en az $(1+3...+25)+25\cdot 2 = 25\cdot 28 = 388$ olabilir. 388 için örnek: önce 1. (26,1) e geliyor, sonra 2. (25,1) e geliyor, ..., 12. (14,1) e geliyor. Daha sonra 13 (13,1) e, 14 (12,1) e, 15. (11,1) e, ..., 25. (2,1) e geliyor. En son 26. (1,0) a geliyor ve kalan tüm böcekler bir birim aşağı iniyorlar.

21. Bir ABC üçgeninde B köşesine ait iç açıortay karşı kenarı D de, C ye ait iç açıortay ise karşı kenarı E de kesiyor. $m(\widehat{AED}) = m(\widehat{DEC})$ olduğuna göre $m(\widehat{EDB})$ kaçtır?

Cevap: 30°. BEC üçgeninde ED dış açıortay, BD iç açıortay olduğundan D noktası dış teğet çember merkezidir. Bu durumda, CD dış açıortaydır. Yani, $[BC$ ışını üzerinde kenarın dışında alınan rastgele bir X noktası için $m(\widehat{ECD}) = m(\widehat{DCX})$ sağlanır. Öte yandan ACB açısının açıortayı CE olduğundan $m(\widehat{ECD}) = m(\widehat{BCE})$ dir. Sonuç olarak, $m(\widehat{BCE})+m(\widehat{ECD})+m(\widehat{DCX}) = m(\widehat{BCX}) = 180^\circ$ olduğundan $m(\widehat{BCE}) = m(\widehat{ECD}) = m(\widehat{DCX}) = 60^\circ$ olmalıdır. BEC üçgeninde D noktası dış teğet çember merkezi olduğundan $m(\widehat{BDE}) = \dfrac{1}{2}\cdot m(\widehat{BCE}) = 30^\circ$ olmalıdır.

22. m ve n tam sayılar olmak üzere, $(m+n^2)(m+1) = 4mn$ eşitliği sağlanıyorsa $m+n$ ifadesinin alabileceği farklı değerlerin toplamı kaçtır?

Cevap: -2. İfadeyi düzenlersek $(m-n)^2+m(n-1)^2 = 0$ elde ederiz. $m = n = 1$ bir çözümdür. $n \neq 1$ için $m = -(m-n)^2/(n-1)^2$ olur. Yani $-m$ bir tam karedir. $-m = k^2$, $k \geq 0$ olsun. Bu durumda $k = |(k^2+n)/(n-1)|$ olur. $k = (k^2+n)/(n-1)$ ise $k-1 = (k^2+1)/(n-1)$ ve buradan da $k-1 \mid k^2+1$ olur. $k = 0, n = 0$, $k = 2$, $n = 6$ veya $k = 3$, $n = 6$ olur. Buradan gelen çözümler $(m,n) = (0,0)$, $(-4,6)$, $(-9,6)$ olur. $-k = (k^2+n)/(n-1)$ ise $-k-1 = (k^2+1)/(n-1)$ ve buradan da $-k-1 \mid k^2+1$ olur. $k = 0, n = 0$ veya $k = 1, n = 0$ olur. Buradan gelen yeni çözüm $(-1,0)$ dır. Sonuç olarak $m+n$ sayısı $0, 2, -3, -1$ değerlerini alabilir. Cevap -2 olur.

23. x ve y gerçel sayılar olmak üzere, $2x + 16y = x^2 + y^2$ eşitliği sağlanıyorsa, $7x + 4y$ nin alabileceği en küçük değer nedir?

Cevap: - 26. $2(7x+4y) = 14x+8y = 2x+8y+12x-8y = x^2+y^2+12x-8y = (x+6)^2 + (y-4)^2 - 52 \geq -52$. $x = -6$ ve $y = 4$ ise $2x + 16y = x^2 + y^2$ eşitliği sağlanır ve bu durumda $7x + 4y$ sayısı $-52/2 = -26$ değerini alır.

24. Bir sözlü sınava katılan 26 öğrencinin her birine sabah seansında 1 ve akşam seansında 1 olmak üzere, 2 farklı soru soruluyor. Sorulan soruların hepsinin aynı kitaptan olduğu, bir sorunun aynı seansta birden fazla öğrenciye sorulmadığı ve her öğrenci için o öğrenciye sorulan 2 sorudan en az birinin başka hiçbir öğrenciye sorulmadığı biliniyor. Buna göre kitapta en az kaç soru bulunabilir?

Cevap: 39. Sabah seansında sorulan sorular kümesi S_1, akşam seansında sorulan sorular S_2 olsun. Bir soru A ve B, bir diğer soru ise C ve D öğrencilerine sorulduysa, bu dört öğrenciye sorulan ikinci sorular birbirinden farklı olacaktır. Bu nedenle, $2|S_1 \cap S_2| \leq |S_1 - S_2| + |S_2 - S_1|$ ve buradan $|S_1 \cup S_2| \geq 3|S_1 \cap S_2|$. O zaman $|S_1 \cup S_2| = |S_1| + |S_2| - |S_1 \cap S_2|$ olduğundan $|S_1 \cup S_2| \geq \dfrac{3}{2} \cdot 26 = 39$. 39 için örnek: $i = 1, \ldots, 13$ olmak üzere, s_i sorusu birinci seansta i nolu öğrenciye, ikinci seansta $13+i$ nolu öğrenciye sorulsun ve bütün öğrencilerin ikinci soruları birbirinden farklı olsun.

25. Bir $A_1A_2\ldots A_{26}$ düzgün 26-geninde $A_1A_9, A_1A_{15}, A_1A_{16}$ doğruları A_8A_{21} doğrusunu sırasıyla B, C, D noktalarında kesiyorlar. $\dfrac{|A_8B|}{|CD|}$ kaçtır?

Cevap: 2. $k = 0, 1, \ldots, 13$ için X_k noktasını A_1A_{k+8} ile A_8A_{21} in kesişimi olarak tanımlayalım. Yani sorudaki notasyona göre $A_8 = X_0, B = X_1, C = X_7, D = X_8, A_{21} = X_{13}$ olur. İki adet önemli eşitlik elde edeceğiz: Birincisi, A_8A_{21} ve A_1A_{14} ün her biri çokgenin çevrel çemberinin çaplarıdır, o halde X_6 merkezdir. Yani $|X_0X_6| = |X_6X_{13}|$. İkincisi, $A_1A_{15} \perp A_8A_{21}$ ve $m(\widehat{X_iA_1X_7}) = m(\widehat{X_{14-i}A_1X_7})$ olduğu kolaylıkla görülür ve sonuç olarak $|X_7X_i| = |X_7X_{14-i}|$ eşitliği ve daha genel olarak her $i, j = 1, 2, \ldots, 6$ için $|X_iX_j| = |X_{14-j}X_{14-i}|$. İkinci eşitliğin $i = 1, j = 6$ durumundaki özel $|X_1X_6| = |X_8X_{13}|$ eşitliğini birinci eşitlikten çıkarırsak $|X_0X_1| = |X_6X_8| = |X_6X_7| + |X_7X_8| = 2 \cdot |X_7X_8|$ bulunur. Buradan $\dfrac{|A_8B|}{|CD|} = \dfrac{|X_0X_1|}{|X_7X_8|} = 2$ olduğu görülür.

26. 2 nin tüm pozitif tam sayı kuvvetlerinin p ile bölümünden kalanların alabileceği farklı değerlerin toplamının p ye eşit olmasını sağlayan 2018 den küçük kaç farklı p asalı vardır?

Cevap: 4. $p = 2$ sağlamaz. $2^r < p < 2^{r+1}$ olsun. $2^1, 2^2, \dots, 2^r$ ve 2^{p-1} sayıları p modunda farklı değerler alır. Bu yüzden $2^{r+1} - 1 = 1 + 2^1 + \cdots + 2^r \leq p$ olur. Öte yandan $p < 2^{r+1}$ dir. Bu ancak $p = 2^{r+1} - 1$ iken sağlanır. Böyle p ler için olası kalanlar $1, 2, 2^2, \dots, 2^r$ olacağından şartlar sağlanır. Yani 2018 den küçük Mersenne asallarının sayısını bulmalıyız. $2^2-1, 2^3-1, 2^5-1, 2^7-1$ sayıları şartları sağlar. $2^{11} - 1 = 2047 > 2018$ olduğundan başka yoktur. Cevap 4 olur.

27. a ve b gerçel sayılar olmak üzere, $P(x) = x^4 + (a+b)x^3 + (a+b+ab)x^2 + (a^2+b^2)x + ab$ polinomunun gerçel kökü yoksa, $(a-2)^2 + (b-2)^2$ ifadesinin alabileceği en büyük tam sayı değeri nedir?

Cevap: 7. $P(x) = (x^2 + ax + b)(x^2 + bx + a)$ şeklinde yazılabilir. P nin gerçel kökünün olmaması için $a^2 < 4b$ ve $b^2 < 4a$ olmalıdır. Buradan da $(a-2)^2 + (b-2)^2 = (a^2 - 4b) + (b^2 - 4a) + 8 < 8$ olur. $a = b = 2 + \sqrt{14}/2$ alırsak $a^2 < 4b$, $b^2 < 4a$ ve $(a-2)^2 + (b-2)^2 = 7$ olacağından cevap 7 olur.

28. Masadaki üç kutuda başlangıçta k, l ve m bilye bulunuyor. İki oyuncu sırayla hamle yaparak bir oyun oynuyorlar ve her hamlede sırası gelen oyuncu kutuların birini veya ikisini seçip seçtiği kutu veya kutulardan birer bilye alıyor. Hamle yapamayan oyuncu oyunu kaybediyor. Oyun $(k, l, m) = (2017, 2018, 2018), (2017, 2018, 2019), (2018, 2018, 2018), (2018, 2019, 2019)$ ve $(2019, 2019, 2019)$ için birer kez oynanırsa, oyuna başlayan oyuncu bu oyunlardan kaçını kazanmayı garantileyebilir?

Cevap: 3. $(2p, 2q, 2s)$ durumunda hangi hamle yapılırsa yapılsın, rakip oyuncu durumu yeniden $(2r, 2e, 2h)$ durumuna getirebiliyor. Bu nedenle $(2p, 2q, 2s)$ durumunda başlayan oyuncu oyunu kaybediyor. Buradan $(2p + 1, 2q + 1, 2s + 1)$ durumunda da başlayan oyuncunun oyunu kaybedeceği görülüyor. Diğer tüm durumlardan bu iki duruma hamle bulunuyor.

29. Ayrıt uzunlukları 1,2,3 cm olan bir dikdörtgenler prizmasında A köşesine en uzak köşe F olsun. Daima dikdörtgenler prizmasının yüzeyinde hareket etmek şartı ile A köşesinden F köşesine giden bir karınca en az kaç cm yol gitmelidir?

Cevap: $3\sqrt{2}$. Ayrıt uzunlukları a, b, c olan bir dikdörtgenler prizmasında, bulunduğu köşeden kendisine en uzak köşeye giden bir karıncanın keseceği ilk ayrıta göre prizmanın açılmış hali göz önüne alındığında, en kısa yolun uzunluğu $\sqrt{a^2+(b+c)^2}$, $\sqrt{b^2+(a+c)^2}$, $\sqrt{c^2+(a+b)^2}$ sayılarından biridir. $a=1, b=2, c=3$ için en küçüğü $\sqrt{3^2+(1+2)^2}=3\sqrt{2}$ dir.

30. m ve n pozitif tam sayılar, p bir asal sayı olmak üzere kaç farklı (m,n,p) üçlüsü için $\dfrac{13^m+p\cdot 2^n}{13^m-p\cdot 2^n}$ sayısı bir pozitif tam sayıdır?

Cevap: 1. $a = \frac{13^m+p.2^n}{13^m-p.2^n} = 1 + \frac{p.2^{n+1}}{13^m-p.2^n}$olduğundan $p = 13$ olursa p ye sadeleştirdikten sonra payda tek, pay çift oluyor. p$\neq$13 ise payda p ye bölünmez ve tektir. Yani $a = 13^m - p.2^n = 1$ dir. $\pmod 3$ ten $p = 3$ olur. $m = 1$ ve $n = 2$ sağlar. $m \geq 2$ ve $n \geq 3$ ise $\pmod 8$ den m çift olmalıdır ama bu durumda da $\pmod 7$ den çelişki gelir.

31. $0 < x \leq 1$ olmak üzere, $\sqrt{1+\dfrac{4}{x}} - \sqrt{1-x}$ ifadesinin alabileceği en küçük değer nedir?

Cevap: 2. $y = 1-x$ olsun. Cauchy-Schwarz eşitsizliğinden

$$\sqrt{x+4} = \sqrt{(x+4)(x+y)} \geq \sqrt{xy} + 2\sqrt{x} = \sqrt{x}(\sqrt{1-x}+2)$$

olur. Buradan da $\sqrt{1+\dfrac{4}{x}} - \sqrt{1-x} \geq 2$ bulunur. Eşitlik $x = 2\sqrt{2}-2$ iken sağlanır.

32. 26 takımın katıldığı bir turnuvada her takım ikilisi aralarında tam olarak bir maç yapıyor. A takımı B takımını, B takımı C takımını, C takımı da A takımını yenerse $\{A,B,C\}$ kümesine tuhaf küme diyelim. Bu turnuvada tuhaf küme sayısı en çok kaç olabilir?

Cevap: 728. Tuhaf olmayan her $\{A,B,C\}$ kümesinde bir takımın diğer iki takımı yenmesi gerekiyor. m tane takımı yenmiş her takım $\binom{m}{2}$ tane tuhaf olmayan küme oluşturacaktır. Demek ki tuhaf olmayan kümelerin sayısının en az olması için takımların kazandıkları maç sayıları bibirlerine mümkün oldukca yakın olmalıdır ve bu durumda da 13 takımın 13, kalan 13 takımın ise 12 takımı yenmesi gerekiyor. Bunun için bir çember ertafına dizilmiş 26 takımın her birinin saat yönündeki ilk 12 takımı yenmesi gerekiyor, diğer maç sonuçları önemli değildir. Sonuç olarak cevap:

$$\binom{26}{3} - 13\binom{13}{2} - 13\binom{12}{2} = 728.$$