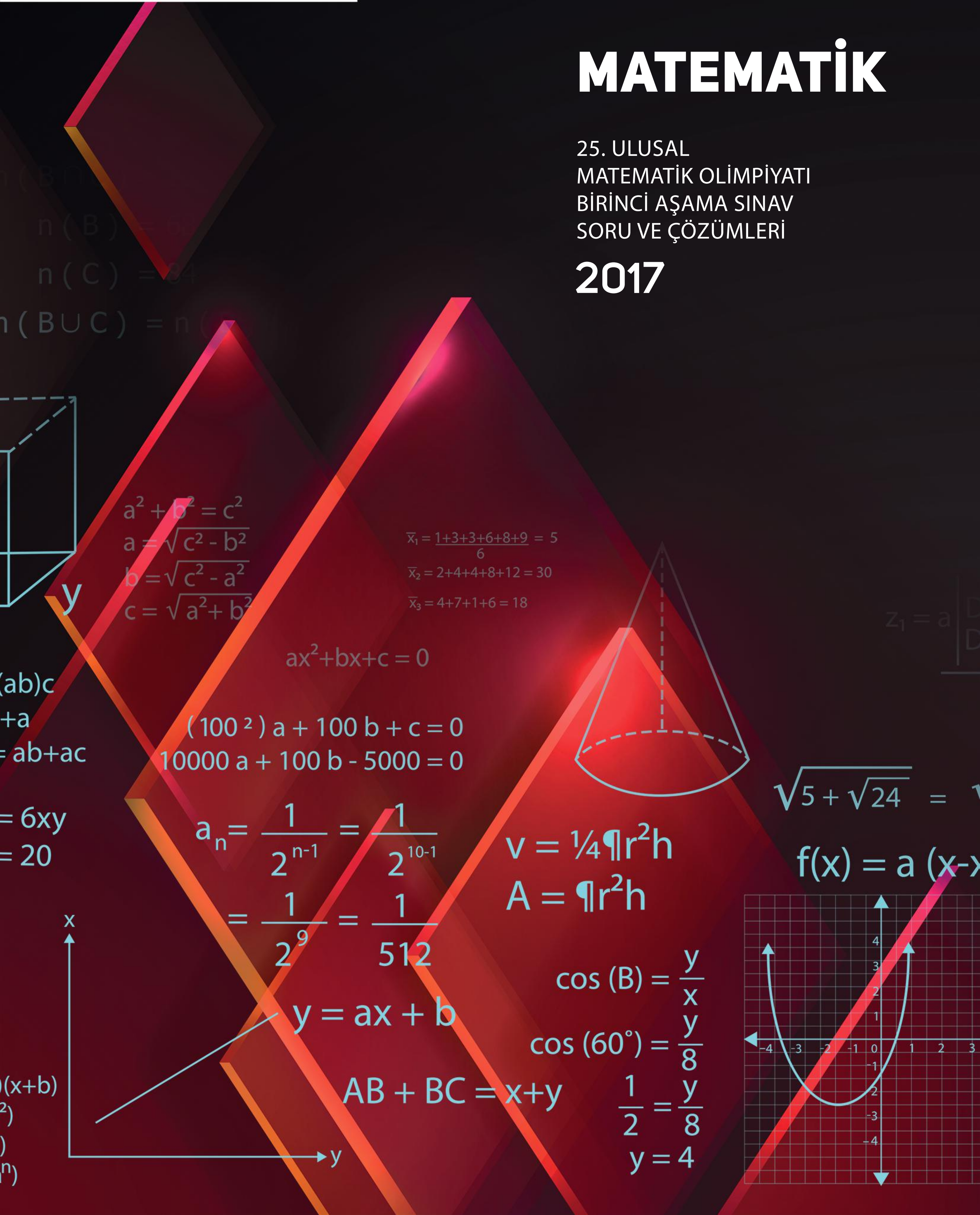
TÜBİTAK

Türkiye Cumhuriyeti
SANAYİ VE TEKNOLOJİ BAKANLIĞI

MATEMATİK

25. ULUSAL
MATEMATİK OLİMPİYATI
BİRİNCİ AŞAMA SINAV
SORU VE ÇÖZÜMLERİ

2017



TÜRKİYE BİLİMSEL VE TEKNOLOJİK ARAŞTIRMA KURUMU
BİLİM İNSANI DESTEK PROGRAMLARI BAŞKANLIĞI

ULUSAL MATEMATİK OLİMPİYATLARI SORU ve ÇÖZÜMLERİ

Ankara

Nisan 2019

1. 210^9 doğal sayısının pozitif bölenlerinin kaç tanesi 4, 9, 25, 49 doğal sayılarından en az ikisine tam bölünür?

Cevap: 9728. Öncelikle, 210^9 doğal sayısının tüm pozitif tam bölenleri $0 \leq a, b, c, d \leq 9$ olmak üzere $2^a 3^b 5^c 7^d$ şeklindedir. Soruda istenen koşul ise, a, b, c, d tam sayılarının en az ikisinin 2 den büyük veya eşit olmasıdır. Dolayısıyla istenmeyen durumların sayısı

$$\underbrace{2^4}_{\text{her birinin 2 den küçük olması}} + \underbrace{4 \cdot 8 \cdot 2^3}_{\text{tam olarak birinin 2 den büyük veya eşit olması}} = 272 \text{ olur.}$$

Tüm durumların sayısı da 10^4 olduğundan cevap $10000 - 272 = 9728$ olur.

2. $x, y \geq -2017$ olmak üzere, $\dfrac{x}{x - y + 2017} - \dfrac{y}{x - y - 2017} = 1$ denklemini sağlayan kaç farklı (x, y) tam sayı ikilileri bulunur?

Cevap: SORU İPTAL. Verilen eşitlikte, paydaları eşitleyip içler-dışlar çarpımı yaparsak $x(x - y - 2017) - y(x - y + 2017) = (x - y)^2 - 2017^2$ elde ederiz. Buradan, $x^2 + y^2 - 2xy - 2017(x + y) = (x - y)^2 - 2017^2$ ve dolayısıyla $x + y = 2017$ olur. $x \geq -2017$ ve $2017 - x \geq -2017$ koşullarının beraber sağlanması için $4014 \geq x \geq -2017$ olup, toplam 6052 tane x değeri ve her bir x değerine karşılık bir y değeri elde ederiz. Fakat soruda verilen paydaları sıfır yapan $(x, y) = (2017, 0)$ ve $(x, y) = (0, 2017)$ ikililerini çıkarmalıyız. Sonuç olarak $6052 - 2 = 6050$ tane ikili buluruz. Cevap, soruda verilen şıklarda olmadığından soru iptal edilmiştir.

3. Tepe açısı $s(\widehat{A}) = 100°$ olan ABC ikizkenar üçgeninde $\widehat{C}$ açısının açıortayı AB kenarını D noktasında kesiyor. $|AD| = x$, $|DC| = y$ ise $|BC|$'nin x ve y cinsinden değeri hangisidir?

Cevap: $x + y$. A noktasının DC ye göre simetriği olan noktaya E diyelim. $m(\widehat{ACD}) = m(\widehat{BCD})$ olduğundan $E \in [BC]$ ve $|ED| = |AD| = x$ olur. Yine $[BC]$ üzerinde $|DF| = |FB|$ olan F noktasını alalım. Açıları yazarsak, $m(\widehat{DFC}) = 2 \cdot m(\widehat{DBF}) = 80° = 180° - m(\widehat{BDF}) - m(\widehat{ADC}) = m(\widehat{FDC})$ olur, bu da $|FC| = |DC| = y$ olduğunu gösterir. Diğer taraftan, FDE üçgeni tepe açısı $20°$ olan bir ikizkenar üçgen olup, $|DF| = |DE|$ dir. Sonuç olarak, $|BC| = |FB| + |FC| = |DF| + |FC| = |DE| + |FC| = x + y$ olur.

4. Beş basamaklı bir sayının birler ve onlar basamağı silindiğinde tam kare olan üç basamaklı bir sayı elde edilmektedir, ayrıca bu sayının binler ve on binler basamağı silindiğinde de tam kare olan üç basamaklı bir sayı elde edilmektedir. Bu özelliklere sahip kaç farklı beş basamaklı doğal sayı vardır?

Cevap: 57. $\overline{abcde}$ beş basamaklı sayısının istenilen özelliği sağlaması için, $\overline{abc} = x^2$ ve $\overline{cde} = y^2$ koşullarını sağlayan $10 \leq x, y \leq 31$ tam sayıları bulunmalıdır. Bir tam kare 10 modunda sadece $0, 1, 4, 5, 6, 9$ değerlerini alabileceğinden ve c rakamı aynı zamanda üç basamaklı bir sayının yüzler basamağı olduğundan, $c = 1, 4, 5, 6, 9$ olabilir.

- $c = 1$ ise, $y = 10, 11, 12, 13, 14$ ve $x = 11, 19, 21, 29, 31$ olabilir.
- $c = 4$ ise, $y = 20, 21, 22$ ve $x = 12, 18, 22, 28$ olabilir.
- $c = 5$ ise, $y = 23, 24$ ve $x = 15, 25$ olabilir.
- $c = 6$ ise, $y = 25, 26$ ve $x = 14, 16, 24, 26$ olabilir.
- $c = 9$ ise, $y = 30, 31$ ve $x = 13, 17, 23, 27$ olabilir.

Dolayısıyla toplam $5 \cdot 5 + 3 \cdot 4 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 4 + 2 \cdot 4 = 57$ sayı vardır.

5. 7 kişi, zemin katta bulunan bir asansöre binip, her katta en az bir kişi inecek şekilde dört kat çıkıyor ve dördüncü katta asansör tamamen boşalıyor. Bu asansör kaç farklı şekilde kullanılır?

Cevap: 8400. Her katta en az bir kişi inmesi gerektiğinden,

- Bir katta dört, diğer katlarda birer kişi inebilir.
- Bir katta üç, bir katta iki, diğer katlarda birer kişi inebilir.
- Bir katta bir, diğer katlarda ikişer kişi inebilir.

Sonuç olarak, $\binom{7}{4} \cdot 4! + \binom{7}{3} \cdot \binom{4}{2} \cdot 4! + \frac{1}{3!} \cdot \binom{7}{2} \cdot \binom{5}{2} \cdot \binom{3}{2} \cdot 4! = 8400$ ihtimal vardır.

6. a, b, c sayıları $x^3 + x - 1 = 0$ denkleminin kökleri olsun. Aşağıdaki denklemlerden hangisinin kökleri $a.b, b.c, c.a$ olur?

A) $x^3 - x - 1 = 0$ B) $x^3 - x^2 + 1 = 0$ C) $x^3 - x^2 - x - 1 = 0$
D) $x^3 - x + 1 = 0$ E) $x^3 - x^2 - 1 = 0$

Cevap: $x^3 - x^2 - 1 = 0$. Vieta formülünden, kökleri ab, bc, ca olan üçüncü dereceden denklem şu şekilde olmalıdır:

$$x^3 - (ab + bc + ca)x^2 + (ab \cdot bc + ab \cdot ca + bc \cdot ca)x - (ab \cdot bc \cdot ca) = 0$$

a, b, c sayıları $x^3 + x - 1 = 0$ denkleminin kökleri olduğundan, yine Vieta formülünden $a+b+c = 0$, $ab+bc+ca = 1$ ve $abc = 1$ elde ederiz. Buradan, $ab \cdot bc + ab \cdot ca + bc \cdot ca = abc \cdot (a+b+c) = 0$ ve $ab \cdot bc \cdot ca = (abc)^2 = 1$ olur. Dolayısıyla cevap $x^3 - x^2 - 1 = 0$ olur.

7. $|AB| = 2|BC|$ olan $ABCD$ dikdörtgeninin içinde $s(\widehat{EAB}) = s(\widehat{ABE}) = 15°$ olacak şekilde bir E noktası alınıyor. $|AE| = 2$ ise $|CE| =?$

Cevap: $\sqrt{4+\sqrt{3}}$. BEC üçgeninin iç bölgesinde $m(\widehat{FBC}) = m(\widehat{FCB}) = 15°$ şartlarını sağlayan F noktasını alalım. BFC ve BEA ikizkenar üçgenleri benzer olup, $\dfrac{|CF|}{|AE|} = \dfrac{|BC|}{|BA|} = \dfrac{1}{2}$ olduğundan, $|BF| = |CF| = 1$ dir. FBE üçgeninde, $|EB| = 2$, $|BF| = 1$ ve $m(\widehat{EBF}) = 60°$ elde ederiz, bu da $m(\widehat{BFE}) = 90°$ ve $|FE| = \sqrt{3}$ olması anlamına gelir. Sonuç olarak, EFC üçgeninde $m(\widehat{EFC}) = 360° - m(\widehat{BFE}) - m(\widehat{BFC}) = 120°$ olup, kosinüs teoreminden $|CE|^2 = 3 + 1 - 2 \cdot 1 \cdot \sqrt{3} \cdot \cos 120° = 4 + \sqrt{3}$ olur.

8. n, pozitif bir tam sayı olmak üzere, $(n+2)^4$ sayısının $(n+1)^4$ sayısına bölümünden kalan K_n olsun. K_n sayısının 4 ile bölümünden kalan R_n ise

$$R_1 + R_2 + R_3 + ... + R_{2016} + R_{2017} =?$$

Cevap: 4030. K_n sayısının 4 ile bölümünden elde edilen bölüm C_n olmak üzere, $(n+2)^4 = (n+1)^4 B_n + 4C_n + R_n$ şeklinde yazalım. Tümevarımla $n \geq 5$ için $(n+2)^4 < 2(n+1)^4$ olduğu görülebilir, bu da $n \geq 5$ için $B_n = 1$ olması demektir. Ayrıca m^4 sayısı 4 modunda, m çift ise 0, m tek ise 1 e denktir. Dolayısıyla, n sayısı tek ise, $R_n = 1$ olur. n sayısı çift ve $n \geq 6$ ise, $B_n = 1$ olduğundan $R_n + 1$ sayısı 4 ile bölünmelidir, bu da $R_n = 3$ demektir. Diğer taraftan, kolaylıkla $R_2 = 1$ ve $R_4 = 2$ olduğu görülebilir. Sonuç olarak, $R_1 + R_2 + R_3 + ... + R_{2016} + R_{2017} = 1009 \cdot 1 + 1006 \cdot 3 + 1 + 2 = 4030$ olur.

9. İçi dolu bir küre, merkezinden geçen 100 düzlem ile en fazla kaç parçaya bölünür?

Cevap: 9902. Öncelikle kürenin merkezinden geçen bir düzlem küreyi iki eş parçaya ayırır. Diğer taraftan düzlemlerin her biri ile kürenin kesişimi bir çemberdir. İki çember en fazla iki noktada kesişeceğinden 100 tane çember en fazla $2 \cdot \dbinom{100}{2} = 9900$ kesişim noktası oluşturabilir. Her bir kesişim noktası bölge sayısını bir artıracağından toplamda en fazla $2+9900=9902$ bölge oluşabilir.

10. $\left.\begin{array}{l} x-2y+xy=1+\sqrt{10} \\ x^2+4y^2=13 \end{array}\right\}$ ise $|x-2y-2|=?$

Cevap: $2\sqrt{2}-\sqrt{5}$. $x-2y=m$ ve $xy=n$ diyelim. Verilen eşitliklerden $m+n=1+\sqrt{10}$ ve $m^2+4n=13$ elde ederiz. Buradan, $m+\dfrac{13-m^2}{4}=1+\sqrt{10}$ olur. İfadeyi düzenlersek $(m-2)^2=13-4\sqrt{10}$ olup, buradan $|m-2|=\sqrt{13-2\sqrt{40}}=\sqrt{8}-\sqrt{5}=2\sqrt{2}-\sqrt{5}$ cevabını elde ederiz.

11. $ABCD$ dışbükey dörtgeninde ABD, tepe açısı $\widehat{A}=60+2x$ olan ikizkenar bir üçgendir. $s(\widehat{BAC})=s(\widehat{BCA})=x$ ise $s(\widehat{DCA})=?$

Cevap: 30. B noktasının AC ye göre simetriğine O diyelim. $\widehat{A}$ açısı x ten büyük olduğundan O noktası ADC üçgeninin iç bölgesinde yer alır. Diğer taraftan, tanım gereği $m(\widehat{DAO})=60^\circ$ ve $|OA|=|AB|=|AD|$ olur, bu da AOD üçgeninin eşkenar olması demektir. Sonuç olarak, O noktası ADC üçgeninin çevrel çemberi olur. Dolayısıyla $m(\widehat{DCA})=\dfrac{1}{2}m(\widehat{DOA})=30^\circ$ elde ederiz.

12. n pozitif bir tam sayı olsun.

$$\begin{aligned} x+y&=n \\ xy&=n+65 \end{aligned}$$

sisteminin (x,y) gerçel çözümlerinin olması için n'nin en küçük değeri kaçtır?

Cevap: 19. Tüm x,y gerçel sayıları için $(x-y)^2\geq 0$ olduğundan $(x+y)^2\geq 4xy$ elde ederiz. Buradan, $n^2\geq 4n+260$ olması $(n-2)^2\geq 264$ anlamına gelir. Bu eşitsizliği sağlayan en küçük n pozitif tam sayısı 19 dur. $n=19$ için, $x=12$ ve $y=7$ nin denklem sistemini sağladığı görülebilir.

13. $\displaystyle\sum_{k+l=0}^{97}\binom{100}{k}\binom{100-k}{l}\binom{100-k-l}{97-k-l}=?$

Cevap: $3^{98} \cdot 53900$. Tam olarak 3 tanesi D olan ve sadece A, B, C, D harflerinden oluşabilen 100 harfli kelimelerin sayısı tam olarak $\binom{100}{3}3^{97}$ dir. Diğer taraftan bu sayıyı, A ve B lerin toplam sayısı üzerinden de hesaplayabiliriz. Tam olarak k tane A, l tane B ve $97-k-l$ tane C içeren 100 harfli kelimelerin sayısı $\binom{100}{k}\binom{100-k}{l}\binom{100-k-l}{97-k-l}$ olur. Dolayısıyla cevap $\binom{100}{3}3^{97} = 3^{98} \cdot 53900$ olur.

14. x, y, z, w, v negatif olmayan tam sayılardır.

$$x^2 + y^2 + z^2 + w^2 + v^2 = 40$$

denklemini gerçekleyen tüm (x, y, z, w, v) tam sayı beşlilerinin sayısı kaçtır?

Cevap: 120. Beş tane negatif olmayan tam sayının kareleri toplamı 40 ise, bu tam sayı beşlileri $(6, 2, 0, 0, 0)$, $(6, 1, 1, 1, 1)$, $(5, 3, 2, 1, 1)$, $(4, 4, 2, 2, 0)$ ve $(3, 3, 3, 3, 2)$ olabilir. Dolayısıyla toplam

$$\frac{5!}{3!} + \frac{5!}{4!} + \frac{5!}{2!} + \frac{5!}{2!2!} + \frac{5!}{4!} = 120 \text{ tam sayı beşlisi vardır.}$$

15. Düzlemde $A(1, 0)$, $B(5, 2)$ noktaları veriliyor. $y = x + 2$ doğrusu üzerinde, $|AC|^2 + |CB|^2$ minimum olmasını sağlayan bir C noktası alınıyor.
Bu durumda $|AC|^2 + |CB|^2 =?$

Cevap: 26. C noktası $y = x + 2$ doğrusu üzerinde olduğundan, bu noktanın apsisine x dersek, ordinatı $x + 2$ olur. Buradan $|AC|^2 + |CB|^2 = (x - 1)^2 + (x+2)^2 + (x-5)^2 + x^2$ elde ederiz. Kolaylıkla $|AC|^2 + |CB|^2 = 4(x-1)^2 + 26$ olduğu görülebilir, bu da minimum değerinin 26 olduğunu gösterir.

16. p bir tek asal sayı olmak üzere, $\sqrt{x(x - p^2)}$ sayısının bir tam sayı olmasını sağlayan x pozitif tam sayılarından en büyüğü ile en küçüğü arasındaki fark aşağıdakilerden hangisidir?

Cevap: $\left(\frac{p^2 - 1}{2}\right)^2$. Öncelikle $x = p^2$ olduğunda $\sqrt{x(x - p^2)}$ ifadesi sıfıra eşit olduğundan tam kare olur, dolayısıyla en küçük x pozitif tam sayısı p^2 dir. Diğer taraftan, $x > p^2$ olmak üzere, $(x, x - p^2) = d$ dersek, $x = dm^2$ ve $x - p^2 = dn^2$ şartlarını sağlayan aralarında asal m ve n doğal sayıları bulunmalıdır. Buradan $d(m - n)(m + n) = p^2$ elde ederiz. p bir tek asal sayı olduğundan, bu eşitliği mümkün kılan tüm durumlar $d = p$, $m = \dfrac{p+1}{2}$, $n = \dfrac{p-1}{2}$ ve $d = 1$, $m = \dfrac{p^2+1}{2}$, $n = \dfrac{p^2-1}{2}$ dir. Dolayısıyla x pozitif tam sayısının alabileceği değerler p^2, $p \cdot \left(\dfrac{p+1}{2}\right)^2$ ve $\left(\dfrac{p^2+1}{2}\right)^2$ olur. En büyük ve en küçük değerlerin farkı da $\left(\dfrac{p^2+1}{2}\right)^2 - p^2 = \left(\dfrac{p^2-1}{2}\right)^2$ olarak bulunur.

17. KARPUZ kelimesinin harfleri ile yazılabilecek olan tüm kelimelerin kaç tanesinde ya K, A'dan önce, ya da R, A'dan sonra, ya da R, P'den öncedir? (Burada önce ya da sonra ifadeleri yan yana olmaları gerektiği anlamına gelmez)

Cevap: 690. KARPUZ kelimesinin harfleri ile yazılabilecek 6 harfli tüm kelimelerin sayısı $6! = 720$ dir. Soruda verilen şartın sağlamaması için A, K, P, R harfleri soldan sağa tam olarak P, R, A, K sırasında olmalıdır. Dolayısıyla istenmeyen kelimelerin sayısı $\dfrac{6!}{4!} = 30$ olur, buradan cevap $720 - 30 = 690$ dır.

18. $n = 1, 2, 3, ...$ doğal sayıları için $a_n = 2 - \dfrac{1}{n^2 - \sqrt{n^4 + \frac{1}{4}}}$ ise

$$\frac{1}{\sqrt{a_1}} + \frac{2}{\sqrt{a_2}} + \frac{3}{\sqrt{a_3}} + ... + \frac{20}{\sqrt{a_{20}}} = ?$$

Cevap: 7. Verilen a_n ifadesinde paydanın eşleniğiyle genişletme yapılırsa $a_n = 2 + 4n^2 + 2\sqrt{4n^4+1} = (2n^2+2n+1) + 2\sqrt{4n^4+1} + (2n^2-2n+1)$ olduğu görülür. Diğer taraftan $(2n^2+2n+1)(2n^2-2n+1) = 4n^4+1$ olduğundan $a_n = (\sqrt{2n^2+2n+1} + \sqrt{2n^2-2n+1})^2$ elde ederiz. Buradan, $b_n = \sqrt{2n(n+1)+1}$ olarak tanımlarsak $b_n^2 - b_{n-1}^2 = 4n$ olduğundan

$$\frac{n}{\sqrt{a_n}} = \frac{n}{b_n + b_{n-1}} = \frac{n}{b_n^2 - b_{n-1}^2}(b_n - b_{n-1}) = \frac{b_n - b_{n-1}}{4}$$

olur. Sonuç olarak $\displaystyle\sum_{n=1}^{20} \frac{n}{\sqrt{a_n}} = \frac{b_{20} - b_0}{4} = \frac{29-1}{4} = 7$ bulunur.

19. Bir kenarı 12 olan $ABCD$ karesinde $|AE| = 3$, $|AF| = 4$ olacak şekilde AB ve AD kenarları üstünde sırasıyla E ve F noktaları alınıyor. Kare içinde bir tabanı EF ve diğer tabanın köşeleri BC ve DC kenarları üzerinde olan maksimum alana sahip yamuğun alanı kaçtır?

Cevap: $\dfrac{147}{2}$. Yamuğun BC ve DC kenarları üzerindeki köşeleri sırasıyla G ve H olsun. $GH \parallel EF$ olduğundan açıları yazarsak GHC ve FEA üçgenlerinin benzer olduğu görülür. Dolayısıyla, $|HC| = 3k$ dersek $|GC| = 4k$ olur. Buradan, $|DH| = 12 - 3k$ ve $|BG| = 12 - 4k$ olacağından yamuğun alanı $144-6-4(12-3k)-9(6-2k)-6k^2$ olarak bulunur. Sonuç olarak $36+6k(5-k)$ ifadesinin maksimum değerini bulmalıyız. Aritmetik-Geometrik ortalama eşitsizliğinden $k(5-k) \leq \dfrac{(k+(5-k))^2}{4} = \dfrac{25}{4}$ olduğundan, maksimum alana sahip yamuğun alanı $k = \dfrac{5}{2}$ için $36 + \dfrac{150}{4} = \dfrac{147}{2}$ olarak bulunur.

20. $\displaystyle\sum_{n=1}^{30} n^{61} \equiv x \big(\mathrm{mod}\ 31^2\big)$ ise $x =$?

Cevap: 496. Öncelikle $n^{61}+(31-n)^{61} = (n+(31-n)) \cdot \displaystyle\sum_{k=0}^{60} (-1)^k n^k (31-n)^{60-k}$ olduğundan verilen ifade $\displaystyle\sum_{n=1}^{15} (n+(31-n)) \cdot \Big(\sum_{k=0}^{60} (-1)^k n^k (31-n)^{60-k}\Big)$ olur. Dolayısıyla $\displaystyle\sum_{n=1}^{30} n^{61} = 31m$ dersek m sayısının 31 modundaki değerini bulmalıyız. $31 - n \equiv -n \,(\mathrm{mod}\ 31)$ olduğundan $m \equiv \displaystyle\sum_{n=1}^{15}\sum_{k=0}^{60} (-n)^{60} \,(\mathrm{mod}\ 31)$ olur. Fermat teoreminden, 31 ile aralarında asal her x tam sayısı için $x^{60} = (x^{30})^2 \equiv 1 \,(\mathrm{mod}\ 31)$ olur. Buradan $m \equiv 15 \cdot 61 \equiv 16 \,(\mathrm{mod}\ 31)$ elde ederiz. Sonuç olarak, $\displaystyle\sum_{n=1}^{30} n^{61} \equiv 31 \cdot 16 \equiv 496 \big(\mathrm{mod}\ 31^2\big)$ olur.

21. 1, 2, 3, 3, 5, 5, 8, 8 rakamlarını kullanarak aynı olan rakamlar yan yana olmayacak şekilde oluşturulabilen beş basamaklı kaç şifre vardır?

Cevap: 660. a, b, c, d, e harflerinin her biri $\{1, 2, 3, 5, 8\}$ rakamlarından farklı olanlarını temsil etmek üzere, istenilen şartı sağlayan beş basamaklı şifreler

- 2 tane a, 2 tane b, 1 tane c veya

- 2 tane a, 1 tane b, 1 tane c, 1 tane d veya
- 1 tane a, 1 tane b, 1 tane c, 1 tane d, 1 tane e

içerebilir. Dolayısıyla toplam şifre sayısı

$$\binom{3}{2}\binom{3}{1}\cdot\Big(\frac{5!}{2!2!}-\frac{4!}{2!}-\frac{4!}{2!}+3!\Big)+\binom{3}{1}\binom{4}{3}\cdot\Big(\frac{5!}{2!}-4!\Big)+5!=660 \text{ olur.}$$

22. $f(0)=\dfrac{2}{3}$ ve $n=1,2,3,...$ için $f(n)\neq 0$ ve $\big(f(n+1)-1\big)\big(f(n)+3\big)+3=0$ olduğuna göre $\dfrac{1}{f(0)}+\dfrac{1}{f(1)}+\dfrac{1}{f(2)}+\dfrac{1}{f(3)}+...+\dfrac{1}{f(2016)}+\dfrac{1}{f(2017)}=?$

Cevap: $3^{2018}-1010$. Öncelikle verilen eşitlikten $\dfrac{1}{f(n+1)}=1+\dfrac{3}{f(n)}$ olduğu görülür. Bu da $g(n)=\dfrac{1}{f(n)}$ dönüşümü yaptığımızda $g(n+1)=1+3g(n)$ olması anlamına gelir. Buradan, $g(n+1)+\dfrac{1}{2}=3\big(g(n)+\dfrac{1}{2}\big)$ olur. Yine $g(n)+\dfrac{1}{2}=h(n)$ dersek, $h(n+1)=3h(n)$ ve $h(0)=2$ olması $h(n)=2\cdot 3^n$ olduğunu gösterir. İstenilen ifade $\displaystyle\sum_{n=0}^{2017}g(n)=\sum_{n=0}^{2017}\big(2\cdot 3^n-\frac{1}{2}\big)=2\cdot\frac{3^{2018}-1}{2}-2018\cdot\frac{1}{2}=3^{2018}-1010$ olur.

23. $|AB|=|AC|$ ve $\tan B=\dfrac{5}{12}$ olan ABC üçgeni veriliyor. Yarıçapı 1 olan bir çember AB ve AC kenarlarına sırasıyla K ve L noktalarında teğet olup BC kenarını P ve Q noktalarına kesmektedir. P, B ile Q arasında ve $|BK|=\dfrac{12}{5}$ ise BQK üçgeninin alanı kaçtır?

Cevap: $\dfrac{108}{65}$. Öncelikle teğet-kiriş açı özelliğinden ve aynı yayı gören açıların eşitliğinden $m(\widehat{LKA})=m(\widehat{LPK})=m(\widehat{KQL})=m(\widehat{KLA})$ olup $KL\parallel BC$ ve dolayısıyla $|BP|=|CQ|$ bulunur. Dolayısıyla $m(\widehat{KQL})=\widehat{B}$ olup, sinüs teoreminden $|KL|=2\cdot\sin\widehat{B}$ elde ederiz. $\tan\widehat{B}=\dfrac{5}{12}$ olduğundan $\sin\widehat{B}=\dfrac{5}{13}$ olup, $|KL|=\dfrac{10}{13}$ bulunur. Diğer taraftan, K ve L noktalarından BC ye indirilen dikme ayaklarına sırasıyla R ve S dersek, $\dfrac{12}{13}=\cos\widehat{B}=\dfrac{|BR|}{|BK|}$

olduğundan $|BR| = \dfrac{144}{65}$ olur. ABC üçgeni ikizkenar olduğundan aynı şekilde $|SC| = \dfrac{144}{65}$ ve dolayısıyla $|BC| = \dfrac{144}{65} + \dfrac{10}{13} + \dfrac{144}{65} = \dfrac{26}{5}$ bulunur. BK doğrusu 1 yarıçaplı çembere teğet olduğundan, kuvvet eşitliğinden $\left(\dfrac{12}{5}\right)^2 = |BP| \cdot (|BC| - |CQ|) = |BP| \cdot (|BC| - |BP|)$ elde ederiz. Buradan $\Big(5|BP| - 18\Big) \cdot \Big(5|BP| - 8\Big) = 0$ bulunur. P noktası, B ile Q arasında kaldığından $|BP| = \dfrac{8}{5}$ olmalıdır. Sonuç olarak, BQK üçgeninin alanı sinüs alan teoreminden $\dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{5}{13} \cdot |BK| \cdot |BQ| = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{5}{13} \cdot \dfrac{12}{5} \cdot \left(\dfrac{26}{5} - \dfrac{8}{5}\right) = \dfrac{108}{65}$ olur.

24. $n^2 - 1$, üç farklı asalın çarpımı şeklinde yazılabilen bir doğal sayıdır. Bu özelliği gerçekleyen en küçük birbirinden farklı ilk beş n sayısının toplamı kaçtır?

Cevap: 104. $p < q < r$ asal sayılar olmak üzere $(n-1)(n+1) = pqr$ olması $|r - pq| = 2$ ve $|n - r| = 1$ anlamına gelir. Buradan, hangi en küçük r asal sayıları için $r + 2$ veya $r - 2$ nin iki farklı asalın çarpımı olarak yazılabileceğini bulmalıyız. İncelersek,

- $r = 13$ ve $r = 17$ için, $p = 3$ ve $q = 5$ seçilebilir.
- $r = 19$ ve $r = 23$ için, $p = 3$ ve $q = 7$ seçilebilir.
- $r = 31$ için, $p = 3$ ve $q = 11$ seçilebilir.

Sonuç olarak en küçük ilk beş n sayısının toplamı $14+16+20+22+32 = 104$ olur.

25. Ali 7 arkadaşını bir hafta boyunca haftanın her günü 3'lü gruplar şeklinde akşam yemeğine davet etmektedir. Arkadaşlarından herhangi ikisi sadece bir akşam bir arada olmaları koşuluyla Ali, bu daveti kaç farklı şekilde gerçekler?

Cevap: $30 \cdot 7!$. Öncelikle her gün 3 kişi davete katılacağından toplam $7 \cdot \dbinom{3}{2}$ tane ikili oluşmaktadır. Diğer taraftan, $\dbinom{7}{2} = 7 \cdot \dbinom{3}{2}$ olduğundan her ikili tam olarak bir kez beraber davete katılmalıdır, bu da her arkadaşın tam olarak üç kez davete katılacağını gösterir. Ali'nin arkadaşlarına A, B, C, D, E, F, G diyelim. A nın davete katıldığı günleri $\dbinom{7}{3}$ şekilde seçebiliriz, genelliği bozmadan Pazartesi, Salı, Çarşamba olsun. Davete A

ile beraber katılan arkadaşları $\binom{6}{2}$ şekilde seçebiliriz, genelliği bozmadan B ve C olsun. B nin davete katıldığı günler, Perşembe, Cuma, Cumartesi, Pazar günlerinden ikisi olmalıdır, $\binom{4}{2}$ şekilde seçebiliriz, genelliği bozmadan Perşembe ve Cuma olsun. O zaman C nin davete katıldığı diğer günler Cumartesi ve Pazar olur. D, Salı-Çarşamba, Perşembe-Cuma, Cumartesi-Pazar ikililerinden tam olarak birer tanesinde davete katılmış olmalıdır, 2^3 şekilde seçebiliriz, genelliği bozmadan Salı, Perşembe, Cumartesi olsun. E, F, G nin her biri Salı-Perşembe-Cumartesi günlerinden farklı olan birer tanesi katılmalı, 3! şekilde seçebiliriz, genelliği bozmadan E Salı günü, F Perşembe günü, G Cumartesi günü katılmış olsun. Buradan E nin davete katıldığı diğer günler Cuma ve Pazar, F nin davete katıldığı diğer günler Çarşamba ve Pazar, G nin davete katıldığı diğer günler Çarşamba ve Cuma olarak belirlenmiş olur. Dolayısıyla cevap

$$\binom{7}{3} \cdot \binom{6}{2}\binom{4}{2} \cdot 2^3 \cdot 3! = 30 \cdot 7! \text{ olur.}$$

26. $f(x) = x^3 - 12x^2 + Ax + B$, gerçel sayılarda tanımlı artan bir fonksiyon olsun. $(f \circ f \circ f)(3) = 3$ ve $(f \circ f \circ f \circ f)(4) = 4$ ise $f(7) = ?$

Cevap: 31. $f(3) = 3$ olduğunu gösterelim. Aksini varsayarsak $f(3) > 3$ veya $f(3) < 3$ olabilir. f fonksiyonunun artan olduğunu kullanarak ilk durumda $3 < f(3) < f(f(3)) < f(f(f(3)))$ ve ikinci durumda $3 > f(3) > f(f(3)) > f(f(f(3)))$ elde ederiz, bu da $f(f(f(3))) = 3$ olması ile çelişir. Benzer şekilde $f(4) = 4$ sonucuna ulaşırız. Buradan, $A = 48$ ve $B = -60$ bulunur. Dolayısıyla $f(x) = x^3 - 12 \cdot x^2 + 48 \cdot x - 60 = (x-4)^3 + 4$ olur. Bu fonksiyonun gerçekten artan olduğu barizdir. $f(7) = (7-4)^3 + 4 = 31$ olur.

27. $s(\widehat{A}) = 60^\circ$ olan ABC üçgeninin çevrel çemberi çiziliyor. B köşesinden çizilen teğet doğru ile CA kenarının uzantısı D noktasında kesişiyor. Burada A noktası, C ile D arasındadır. $|DC| = 4$, $|AB| + |AD| = |AC|$ ise $\dfrac{|BC|}{|AB|} = ?$

Cevap: $\sqrt{3}$. $|AD|$ uzunluğuna x dersek, verilen eşitliklerden $|AB| = 4 - 2x$ olur. B noktasından CD doğrusuna indirilen dikmenin ayağına P dersek, PAB üçgeni $90^\circ - 60^\circ - 30^\circ$ üçgeni olup $|PA| = \dfrac{|AB|}{2} = 2 - x$ olur. Dolayısıyla $|PC| = |PD|$ elde ederiz, bu da $|BC| = |BD|$ anlamına gelir. Buradan, teğet-kiriş açı özelliğini kullanırsak $m(\widehat{BDC}) = m(\widehat{BCD}) = m(\widehat{DBA})$ olur.

$m(\widehat{BAC}) = 60^\circ$ verildiğinden $m(\widehat{BDC}) = m(\widehat{BCD}) = m(\widehat{DBA}) = 30^\circ$ elde ederiz. ABD üçgeni $120^\circ - 30^\circ - 30^\circ$ üçgeni olduğundan, $|BC| = |BD| = |AB| \cdot \sqrt{3}$ olup sonuç olarak $\dfrac{|BC|}{|AB|} = \sqrt{3}$ bulunur.

28. $A = 64 \cdot 10^{2014} \cdot (a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_{2017})$ koşulunu sağlayan en büyük 2017 basamaklı $A = a_1a_2a_3...a_{2017}$ doğal sayısının rakamları toplamı kaçtır?

Cevap: 15. Öncelikle A sayısı 10^{2014} ile tam bölündüğünden son 2014 basamağı 0 olmalıdır. Dolayısıyla $k \geq 4$ için $a_k = 0$ elde ederiz. Verilen eşitlikten $64 \cdot (a_1 + a_2 + a_3) = 100a_1 + 10a_2 + a_3$ sonucu çıkar, bu da $36a_1 - 54a_2 - 63a_3 = 0$ anlamına gelir. En büyük A sayısı için, eğer mümkünse $a_1 = 9$ seçmeliyiz, buradan $6a_2 + 7a_3 = 36$ elde edilir. Yine aynı şekilde, mümkün olan en büyük a_2 değeri 6 olduğundan, cevap $9 + 6 = 15$ olur.

29. $\binom{2017}{1} + \binom{2017}{5} + \binom{2017}{9} + \binom{2017}{13} + ... + \binom{2017}{2013} + \binom{2017}{2017} = ?$

Cevap: $2^{2015} + 2^{1007}$. Öncelikle $i^2 = -1$ olmak üzere, $i^k + i^{2k} + i^{3k} + i^{4k}$ ifadesi, $k \equiv 0 \pmod 4$ ise 4, $k \equiv 1, 2, 3 \pmod 4$ ise sıfıra eşittir. Dolayısıyla,

$$\binom{2017}{1} + \binom{2017}{5} + \binom{2017}{9} + \binom{2017}{13} + ... + \binom{2017}{2013} + \binom{2017}{2017} =$$
$$\binom{2017}{2016} + \binom{2017}{2012} + \binom{2017}{2008} + \binom{2017}{2004} + ... + \binom{2017}{4} + \binom{2017}{0} =$$
$$\frac{(1+i)^{2017} + (1+i^2)^{2017} + (1+i^3)^{2017} + (1+i^4)^{2017}}{4} =$$
$$\frac{(1+i)(2i)^{1008} + 0^{2017} + (1-i)(-2i)^{1008} + 2^{2017}}{4} =$$
$$\frac{(1+i+1-i)2^{1008} + 2^{2017}}{4} = \frac{2^{1009} + 2^{2017}}{4} = 2^{1007} + 2^{2015} \text{ olur.}$$

30. 1001^{20} sayısının son 12 rakamının toplamı kaçtır?

Cevap: 18. Binom açılımından $(10^3 + 1)^{20} = \displaystyle\sum_{k=0}^{20} \binom{20}{k} 10^{3k}$ olur. $k \geq 4$ olduğunda $\binom{20}{k}10^{3k}$ ifadesi 10^{12} ile bölüneceğinden 1001^{20} sayısının son

12 rakamını bulmak için $\displaystyle\sum_{k=0}^{3}\binom{20}{k}10^{3k}$ ifadesine bakmalıyız. Bu sayıyı hesaplarsak $1+20\cdot10^3+190\cdot10^6+1140\cdot10^9 = 1140190020001$ olur. Dolayısıyla son 12 basamağının toplamı $1+4+1+9+2+1 = 18$ olur.

31. $|AB| = |BC|$ olan ABC ikizkenar üçgeninin AC kenarına A noktasında teğet ve B noktasından geçen merkezi üçgenin dışında olan çember çiziliyor. Bu çember BC kenarını E noktasında kesmektedir.
$2|BE| = 3|EC|$ ve ABC üçgeninin alanı 27 ise çemberin yarıçapı kaçtır?

Cevap: 5. Öncelikle teğet-kiriş açı özelliğinden $m(\widehat{ABC}) = m(\widehat{EAC})$ olur. Ayrıca $|AB| = |BC|$ olduğundan $m(\widehat{BAC}) = m(\widehat{BCA})$ eşitliğini kullanırsak $m(\widehat{AEC}) = m(\widehat{ABE}) + m(\widehat{BAE}) = m(\widehat{EAC}) + m(\widehat{BAE}) = m(\widehat{BAC}) = m(\widehat{BCA}) = m(\widehat{EAC})$ olur. Dolayısıyla $|AE| = |AC|$ elde ederiz. Diğer taraftan, $|EC| = 2k$ dersek, soruda verilen eşitlikten $|BE| = 3k$ olur. Kuvvet eşitliğini kullanarak, $|AC|^2 = 2k\cdot5k$ ve dolayısıyla $|AE| = |AC| = k\sqrt{10}$ elde ederiz. A noktasından EC ye indirilen dikmenin ayağı D olsun. $|AB| = 5k$ ve $|BD| = 4k$ olduğundan Pisagor teoreminden $|AD| = 3k$ olur. Buradan ABC üçgeninin alanı $27 = \dfrac{5k\cdot3k}{2}$ olup $k = \dfrac{3\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$ bulunur. ABE üçgeninin çevrel yarıçapına R dersek, $2R = \dfrac{|AE|}{\sin\widehat{ABC}} = \dfrac{k\sqrt{10}}{\frac{|AD|}{|AB|}} = \dfrac{\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\cdot\sqrt{10}}{\frac{3}{5}} = 10$ ve dolayısıyla $R = 5$ olur.

32. $3^{2^{2017}} - 1$ sayısının 2^{2020} sayısına bölümünden kalan kaçtır?

Cevap: 2^{2019}. Her $k \geq 1$ doğal sayısı için $3^{2^k} - 1 = (3-1)\cdot\displaystyle\prod_{j=0}^{k-1}(3^{2^j}+1)$ yazılabileceği açıktır. Ayrıca her $j \geq 1$ doğal sayısı için $3^{2^j}+1$ sayısı 4 modunda 2 ye denktir. $3^{2^0}+1 = 4$ olduğundan $3^{2^k}-1$ sayısındaki 2 çarpanlarının sayısı tam olarak $k+2$ olur. Dolayısıyla $\dfrac{3^{2^{2017}}-1}{2^{2019}}$ sayısı bir tek doğal sayıdır. Sonuç olarak, $3^{2^{2017}} - 1 = 2^{2019}(2m+1)$ dersek 2^{2020} ile bölümünden kalanın 2^{2019} olduğu görülür.