TÜRKİYE BİLİMSEL VE TEKNOLOJİK ARAŞTIRMA KURUMU
BİLİM İNSANI DESTEK PROGRAMLARI BAŞKANLIĞI

31. ULUSAL BİLİM OLİMPİYATLARI - 2023
BİRİNCİ AŞAMA SINAVI
ORTAOKUL MATEMATİK

Soru Kitapçığı Türü

A

25 Haziran 2023 Pazar, 09.30-12.30

ÇÖZÜMLER

1. Bir ABC üçgeninde B köşesine ait dış açıortay ile A köşesine ait kenarortay birbirine paraleldir. $|BC| = 4$ ise, $|AC|$ uzunluğunun alabileceği kaç farklı tam sayı değer vardır?

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

Cevap: 3. $[BC]$ kenarının orta noktasına D dersek, sorudaki şarttan dolayı ABD üçgeni ikizkenardır ve $|AB| = |BD| = |DC| = 2$ bulunur. Bu durumda ABC üçgeninde üçgen eşitsizliğinden $4 - 2 < |AC| < 4 + 2$ olur. Dolayısıyla $|AC|$ uzunluğu 3, 4, 5 olmak üzere 3 farklı değer alabilir.

2. $5^{2023} + 6^{2023} + 7^{2023}$ sayısının 13 ile bölümünden kalan nedir?

a) 4 b) 5 c) 6 d) 7 e) 8

Cevap: 8. $7^{2023} \equiv (-6)^{2023} \equiv -6^{2023} \pmod{13}$ olduğundan $6^{2023} + 7^{2023}$ toplamı 13 ile tam bölünür. $5^2 \equiv 25 \equiv -1 \pmod{13}$ olduğundan

$$5^{2023} \equiv 5 \cdot (5^2)^{1011} \equiv 5 \cdot (-1)^{2023} \equiv -5 \equiv 8 \pmod{13}$$

olup, cevap 8 olarak bulunur.

3. 77 kırmızı ve 73 beyaz top içeren bir kutuya birkaç kırmızı ve birkaç beyaz top ekleniyor. Eklenen topların % 60'ı kırmızı ise toplar eklendikten sonra kutudaki kırmızı topların yüzdesinin alabileceği farklı pozitif tam sayı değerlerinin sayısı kaçtır?

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

Cevap: 4. Sonradan eklenen kırmızı ve beyaz top sayıları sırasıyla $3n$ ve $2n$ olsun. O zaman kırmızı topların yüzdesi

$$\frac{77 + 3n}{150 + 5n} \cdot 100 = \frac{7700 + 300n}{150 + 5n} = \frac{1540 + 60n}{30 + n} = 60 - \frac{260}{30 + n}$$

olduğu için $30 + n$ sayısının alabileceği değerler $52, 65, 130$ ve 260 olabiliyor.

4. Her birinin ağırlığı 1 gram, 30 gram veya 60 gram olan taşlar iki gruba ayrılmıştır. Bu gruplardaki hem taş sayıları hem de taşların toplam ağırlıkları eşittir. Gruplardaki 1 gramlık taş sayıları farklı olduğuna göre, iki gruptaki toplam taş sayısı en az kaçtır?

a) 96 b) 102 c) 118 d) 124 e) 128

Cevap: 118. Toplam taş sayısının en az olduğu durumda gruplar aynı ağırlıklı taş içermezler. O zaman gruplardan biri x tane 30 gramlık taş, diğeri y tane 1 gramlık ve z tane 60 gramlık taş içermek zorundadır. Buna göre,

$$\begin{aligned} x &= y + z \\ 30x &= y + 60z \end{aligned}$$

olur. İkinci denklemden birinci denklemi taraf tarafa çıkarırsak $29x = 59z$ gelir. 29 ve 59 sayıları aralarında asal oldukları için $x \geq 59$ olur. $(x, y, z) = (59, 30, 29)$ denklem sisteminin bir çözümü olduğu için cevap $2 \cdot 59 = 118$ olur.

5. $ABCD$ paralelkenarının $[AD]$ kenarı üzerinde alınan bir E noktası için, $|AE| = 3$, $|CD| = 5$ ve $s(\widehat{DCE}) = s(\widehat{BCE}) = 75°$ dir. $ABCD$ paralelkenarının alanı kaçtır?

a) 20 b) 22 c) 24 d) 26 e) 28

Cevap: 20. $s(\widehat{DCE}) = s(\widehat{BCE})$ ve $AD \parallel BC$ kullanılarak $|ED| = |CD| = 5$ olup, $|AD| = 8$ bulunur. $s(\widehat{ADC}) = 180° - s(\widehat{BCD}) = 30°$ olduğundan, A dan CD ye inen dikme ayağına F dersek, $30° - 60° - 90°$ üçgeninin özelliğinden $|AF| = \dfrac{|AD|}{2} = 4$ olur. Dolayısıyla, $ABCD$ paralelkenarının alanı $|CD||AF| = 20$ olarak bulunur.

6. a, b, c sıfırdan farklı birer rakam olmak üzere,

$$100a + 10b + c = (a + b + c)(a + b + c + 1)$$

eşitliği sağlanmaktadır. Buna göre, $a + b^2 + c^3$ kaçtır?

a) 196 b) 212 c) 242 d) 286 e) 346

Cevap: 242. Eşitliği (mod 3) te incelersek $a + b + c$ nin 3 ün katı olduğu görülür. $a + b + c = 3, 6, 9, 12, 15, 18, 24, 27$ değerlerini deneyerek çözümün sadece $a + b + c = 12$ durumunda geldiği görülüyor: $156 = 12 \cdot 13$ ($a + b + c = 3$ durumunda $a = 0$, $b = 1$, $c = 2$ sağlar fakat soruda sıfırdan farklı koşulu var). Buna göre, cevap $1 + 5^2 + 6^3 = 242$ olur.

7. Bir masa üzerinde her biri en fazla 2 top alabilen birkaç boş kutu bulunuyor. Bu kutulara 19 top tam olarak 11 kutu boş kalacak şekilde ya da 13 top tam olarak 10 kutu boş kalacak şekilde yerleştirilebiliyor.

Buna göre, masa üzerindeki kutu sayısının alabileceği kaç farklı değer vardır?

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

Cevap: 3. 19 top en az 10 kutuya yerleştirilmelidir. Buna göre, masa üzerinde en az $10 + 11 = 21$ kutu var. 13 top en fazla 13 kutuya yerleştirilebilir. Buna göre, masa üzerinde en fazla $13 + 10 = 23$ kutu var. Masa üzerindeki kutu sayısının 21,22,23 sayılarının her birine eşit olabileceği açıktır.

8. 153 kalem bir sınıftaki öğrencilere, herhangi 6 öğrenciye toplam en fazla 41 kalem verilecek biçimde dağıtılıyor. Bu sınıftaki öğrenci sayısı en az kaç olabilir?

a) 22 b) 23 c) 24 d) 25 e) 26

Cevap: 25. Sınıftaki öğrenci sayısı n olsun. Öğrencileri soldan sağa doğru, aldıkları kalem sayıları artmayacak şekilde sıralayalım. O zaman soldan altıncı öğrencinin en fazla 6 kalemi olacaktır. Buna göre, $153 \leq 41+6(n-6)$ olur ve buradan da $n \geq 24,6$ gelir. n tam sayı olduğu için $n \geq 25$ elde edilir. Şimdi de $n = 25$ için bir örnek verelim: 5 öğrencinin 7'şer, 19 öğrencinin 6'şar ve 1 öğrencinin 4 kalemi olursa koşullar sağlanır.

9. Bir ABC üçgeninde B ve C noktalarından geçen bir çember $[AB]$ ve $[AC]$ kenarlarını ikinci kez sırasıyla D ve E noktalarında kesiyor. BE ile CD nin kesişimi F olmak üzere $|AD| = 4$, $|AE| = 3$ ve $|AB| = 9$ ise, $|BF|/|FC|$ kaçtır?

a) $\frac{3}{5}$ b) $\frac{4}{9}$ c) $\frac{1}{3}$ d) $\frac{5}{6}$ e) $\frac{5}{9}$

Cevap: $\frac{5}{9}$. Çembersellikten $m(\widehat{ACD}) = m(\widehat{ABE})$ olup ACD ve ABE üçgenleri benzer olur, dolayısıyla $|AC| = |AD||AB|/|AE| = 12$ bulunur, buradan $|EC| = 9$ elde ederiz. Yine çembersellikten BFD ve CFE üçgenleri benzer olup, $|BF|/|FC| = |BD|/|EC| = 5/9$ elde ederiz.

10. 6 ile tam bölünen kaç ABC üç basamaklı sayısı

$$CBA - ABC = 297$$

eşitliğini sağlar?

a) 1 b) 3 c) 6 d) 9 e) 10

Cevap: 10. $100C + 10B + A - 100A - 10B - C = 99(C - A) = 297$ eşitliğinden $C - A = 3$ gelir ve C bir çift sayı olduğuna göre, (A, C) ikilisi $(1,4), (3,6), (5,8)$ farklı değerlerini alabiliyor. ABC 3 ile tam bölündüğüne göre, $A + B + C \equiv 0 \pmod 3$ ve $(1,4)$ çifti için B sayısı 1,4,7 değerlerini, $(3,6)$ çifti için B sayısı 0,3,6,9 değerlerini ve $(5,8)$ çifti için B sayısı 2,5,8 değerlerini alabiliyor. Sonuç olarak şartları sağlayan $3 + 4 + 3 = 10$ farklı sayı bulunabilir.

11. Bir tahtaya 5 tane pozitif tam sayı yazılmıştır. Bu sayılardan her sayı ikilisi bir kez toplandığında 28, 30, 38, 38, 40, 46, 48, 48, 50, 58 sayıları elde ediliyor. Buna göre, tahtadaki en küçük sayı kaçtır?

a) 10 b) 11 c) 12 d) 13 e) 14

Cevap: 10. Tahtadaki sayılar $a \leq b \leq c \leq d \leq e$ olsun. Elde edilen 10 sayının toplamı olan 424 sayısı 5 sayının her biri 4 kez toplanarak elde edilmiştir. Buna göre, tahtadaki $a + b + c + d + e = 106$. $a + b = 28$ ve $d + e = 58$ olduğuna göre, $c = 106 - 28 - 58 = 20$ olur. $a + c = 30$ olduğuna göre, $a = 10$ olur.

12. Birbirinden farklı ağırlıklara sahip 62 taş ve 31 tane eşit kollu terazi bulunmaktadır. Her bir kola bir taş gelecek şekilde tüm taşlar kollara dağıtılıyor ve her terazi için ağır olan taş işaretleniyor. Sonrasında bu işlem tekrar yapılıyor. İki defa işaretlenen taş sayısı en az kaç olabilir?

a) 1 b) 2 c) 8 d) 15 e) 31

Cevap: 1. En ağır taş iki kez işaretlenecektir. Taşları $1, 2, \ldots, 62$ olarak hafiften ağıra doğru numaralayalım. ilk işlemde $1 - 2, 3 - 4, \ldots, 61 - 62$ ve ikinci işlemde $1 - 62, 2 - 3, 4 - 5, \ldots, 60 - 61$ numaralı taşlar aynı terazilere yerleştirilirse, sadece 62 numaralı taş iki kez işaretlenmiş olur.

13. Bir ABC üçgeninin iç bölgesinde bir P noktası alınıyor. $AP \cap BC = \{D\}$ ve $BP \cap AC = \{E\}$ olmak üzere, $|BD| = |DC|$ ve $|AP| = 4|PD|$ ise, $\dfrac{\text{Alan}(APB)}{\text{Alan}(PEC)}$ oranı kaçtır?

a) $\dfrac{3}{2}$ b) 2 c) $\dfrac{5}{2}$ d) $\dfrac{8}{3}$ e) 3

Cevap: 3. $|BD| = |DC|$ olduğundan $A(BPD) = A(PDC)$ ve $A(APB) = A(APC)$ dir. $A(BPD) = A(PDC) = A$ dersek, $|AP| = 4|PD|$ olduğundan

$A(APB) = A(APC) = 4A$ bulunur. $A(PEC) = B$ dersek,

$$\frac{A(APB)}{A(APE)} = \frac{|BP|}{|PE|} = \frac{A(BPC)}{A(PEC)}$$

olup, $\dfrac{4A}{4A-B} = \dfrac{2A}{B}$ elde ederiz, bu da $4A = 3B$ olduğunu gösterir. Dolayısıyla, $\dfrac{A(APB)}{A(PEC)} = \dfrac{4A}{B} = 3$ bulunur.

14. $|3n^2 - 14n + 8|$ ifadesini bir asal sayı yapan n tam sayılarının toplamı kaçtır?

a) 1 b) 4 c) 8 d) 9 e) Hiçbiri

Cevap: 9. $|3n^2 - 14n + 8| = |(n-4)(3n-2)|$ şeklinde yazabiliriz. Dolayısıyla $n - 4 = \pm 1$ veya $3n - 2 = \pm 1$ olmalıdır. Buradan, $n \in \{1, 3, 5\}$ olabilir. Yerine koyduğumuzda ifade sırasıyla 3, 7, 13 olur, sağlar.

15. $x^{x^{2023}} = 2023$ eşitliğini sağlayan x pozitif gerçel sayısı için x^{289} kaçtır?

a) 2023 b) $\sqrt[7]{2023}$ c) $\sqrt{2023}$ d) $\sqrt[289]{2023}$ e) $\sqrt[2023]{2023}$

Cevap: $\sqrt[7]{2023}$. Her iki tarafın 2023. kuvvetini alalım. $a = x^{2023}$ dersek, denklem $a^a = 2023^{2023}$ haline gelir, dolayısıyla $a = 2023$ ve $x = \sqrt[2023]{2023}$ bulunur. Buradan da $x^{289} = \sqrt[7]{2023}$ elde edilir.

16. Başlangıçta bir masa üzerinde boş bir kırmızı ve boş bir beyaz kutu bulunuyor. Her işlemde ya kırmızı kutuya 2 top ya beyaz kutuya 2 top ya da kırmızı ve beyaz kutulara 1'er top ekleniyor. 5 işlem, işlemler sonucunda kutuların her birinde 5 top bulunacak biçimde kaç farklı şekilde yapılabilir?

a) 42 b) 45 c) 48 d) 51 e) 54

Cevap: 51. Kırmızı kutuya 2 top koyma işlemini A, beyaz kutuya 2 top koyma işlemini B ve kutulara 1'er top koyma işlemini C kez yapmış olalım. O zaman $2A + C = 2B + C = A + B + C = 5$ olmalı. Buradan $A = B = 0$ ve $C = 5$ veya $A = B = 1$ ve $C = 3$ veya $A = B = 2$ ve $C = 1$ gelir. İlk durumdan 1, ikinci durumdan $5!/3! = 20$ ve üçüncü durumdan $5!/(2!2!) = 30$ olmak üzere toplam 51 işlem sıralaması mevcuttur.

17. Bir ABC üçgeninde $[BC]$ kenarının orta noktası D dir. ADC üçgeninin D köşesine ait iç açıortay AC doğrusunu E de kesiyor. E den geçen ve BC ye paralel olan doğru AB doğrusunu F de kesiyor. $s(\widehat{EDC}) = 30^\circ$ ise,

$s(\widehat{FDB})$ kaçtır?

a) $15°$ b) $30°$ c) $45°$ d) $60°$ e) $75°$

Cevap: $60°$. İç açıortay teoremi ve paralellikten

$$|AF|/|FB| = |AE|/|EC| = |AD|/|DC| = |AD|/|DB|$$

elde ederiz, bu da DF doğrusunun ADB üçgeninde içaçıortay olduğunu gösterir. Dolayısıyla $s(\widehat{FDB}) = \dfrac{180° - 2 \cdot s(\widehat{EDC})}{2} = 60°$ buluruz.

18. Her biri ya kırmızı ya da beyaz renkte olan $N < 111$ top birkaç kutuya, bazı kutularda 3 kırmızı ve 1 beyaz, bazı kutularda 1 kırmızı ve 2 beyaz ve sadece bir kutuda 1 kırmızı ve 1 beyaz top olacak şekilde dağıtılmıştır. Kırmızı topların sayısı beyaz toplardan %50 fazla olduğuna göre, N sayısı en fazla kaç olabilir?

a) 89 b) 95 c) 101 d) 105 e) 110

Cevap: 95. a ve b sırasıyla 3 kırmızı ve 1 beyaz ve 1 kırmızı ve 2 beyaz top içeren kutu sayısı olsun. O zaman kırmızı top sayısı $3a + b + 1$ ve beyaz top sayısı $a + 2b + 1$ olur. Koşullara göre, $2(3a + b + 1) = 3(a + 2b + 1)$ dir. Buradan elde edilen $3a = 4b + 1$ denkleminin çözümü n bir pozitif tam sayı olmak üzere, $a = 4n + 3$ ve $b = 3n + 2$ şeklindedir. Buna göre, $N = 3(4n + 3) + (3n + 2) + (4n + 3) + 2(3n + 2) + 1 = 25n + 20$ olur. $N < 111$ olduğuna göre, n sayısının alabileceği en büyük değer 3 olur: $N = 25 \cdot 3 + 20 = 95$.

19. A ve B noktaları arasındaki düz bir yolda X ve Y arabaları X A dan B ye doğru, Y ise B den A ya doğru olmak üzere aynı anda harekete başlıyorlar. Arabaların her birinin hızı sabittir. X arabası yolun yarısına vardıktan tam 60 dakika sonra Y ile karşılaşıyor. Y arabası X ile karşılaştıktan tam 75 dakika sonra yolun yarısına varıyor. Buna göre, X arabası başlangıçtan kaç saat sonra B noktasına varmıştır?

a) 18 b) 19 c) 20 d) 21 e) 22

Cevap: 18. X ve Y başlangıçtan tam t saat sonra karşılaşmış olsunlar. Yolun yarısından buluşma noktasına kadar olan kısmı X 60 dakikaya, Y ise 75 dakikaya gidiyor. Buna göre, X in hızı Y nin hızının $75/60 = 5/4$ katıdır. Demek ki X B noktasına $t + \frac{4}{5}t = \frac{9}{5}t$ saatte varacaktır. X, yolun yarısına $\frac{9}{10}t$ ve yolun yarısına vardıktan sonra Y ile karşılaşmaya kadar

$t - \frac{9}{10}t = \frac{1}{10}t$ saat harcayacaktır. Buna göre, $t = 10$ olur ve cevap $9t/5 = 18$ gelir.

20. Bir doğru üzerinde soldan sağa doğru $1, 2, \ldots, 2023$ sayılarıyla numaralanmış 2023 boş kutu bulunuyor. İlk işlemde numarası 3 ile bölünen tüm kutulara birer kırmızı şeker yerleştiriliyor. İkinci işlemde numarası 5 ile bölünen tüm kutulara birer beyaz şeker yerleştiriliyor. Aslı bu kutulardan rastgele N tanesini seçiyor ve seçtiği tüm kutulardaki şekerlerin hepsini yiyor. Aslı her olası durumda her iki renkten de en az birer şeker yiyorsa, N en az kaç olabilir?

a) 1614 b) 1616 c) 1618 d) 1620 e) 1622

Cevap: 1620. Kutuların 674 tanesinde kırmızı, 404 tanesinde beyaz şeker bulunuyor. $674 > 404$ olduğuna göre, en fazla $2023 - 404 = 1619$ kutunun birleşiminde her iki renkten şeker bulunmayabilir ve dolayısıyla cevap 1620 olur.

21. Dışbükey bir $ABCDE$ beşgeninin köşeleri bir çember üzerinde yer almaktadır ve $s(\widehat{BAE}) > 90°$'dir. $|AC| = |BE| = |AD|$ ve $s(\widehat{CAD}) = 30°$ ise, $s(\widehat{BAE})$ kaçtır?

a) 100° b) 105° c) 110° d) 115° e) Hiçbiri

Cevap: 105°. $s(\widehat{CAB}) = x$ ve $s(\widehat{EAD}) = y$ diyelim. $|AC| = |BE| = |AD|$ olduğundan $AE \parallel BD$ ve $AB \parallel CE$ bulunur. Açıları yazarsak, $s(\widehat{ABE}) = s(\widehat{CEB}) = s(\widehat{CAB}) = x$ buluruz. Benzer şekilde $s(\widehat{AEB}) = y$ olup, ABE üçgeninde açılara bakarsak $2x + 2y + 30° = 180°$ elde ederiz. Buradan, $x + y = 75°$ ve dolayısıyla $s(\widehat{BAE}) = x + y + 30° = 105°$ olur.

22. $ABC0CBA$ yedi basamaklı doğal sayısı 7 ile tam bölünüyorsa, $B00CA0$ altı basamaklı doğal sayısının 7 ile bölümünden kalanın alabileceği kaç farklı değer vardır?

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 7

Cevap: 1. $ABC0CBA = (100A + 10B + C)10^4 + 100C + 10B + A \equiv 9A + 15B + 6C \equiv 0 \pmod 7$ olduğundan $7 \mid 3A + 5B + 2C$ olur. Buradan da $B00CA0 = B \cdot 10^5 + 100C + 10A \equiv 5B + 2C + 3A \equiv 0 \pmod 7$ elde ederiz.

23. A ve B koşucuları yuvarlak bir pistte aynı noktadan aynı yöne doğru koşmaya başlıyorlar. B nin hızı A ninkinden % 45 fazladır. Bu pist üzerinde iki koşucunun aynı anda bulunduğu kaç farklı nokta vardır?

a) 5 b) 9 c) 14 d) 25 e) 60

Cevap: 9. A'nın hızı $100s$, B'ninki $145s$, pistin çevresi ise 45 birim olsun. Bir buluşma noktasından sonraki ilk buluşma t saat sonra olacaksa $100st + 45 = 145st$ olur. Buradan $t = 1/s$ gelir. Bu sürede A 100 birim ilerliyor ve önceki buluşma noktasından 10 birim uzaklaşıyor. Benzer şekilde devam edersek buluşma noktaları 5 birim aralıklarla yerleşmiş 9 nokta olur.

24. Başlangıçta bir tahtada 1 sayısı yazılıdır. Ali her defasında tahtadaki sayıyı silip yerine o sayının 4 katının 3 fazlasını veya 7 katının 3 eksiğini yazıyor. $2023^2 + 2,\ 2^{31},\ 28^{31},\ 2^{2023} - 1$ sayılarından kaçı tahtada yazılı olan bir sayı olabilir?

a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4

Cevap: 1. Bir hamle sonucunda tahtada yazan sayının 3 ile bölümünden kalan değişmez ve dolayısıyla tahtada yazılı olan sayı hep $3k + 1$ formunda olmalıdır. Bundan dolayı $2023^2 + 2$ ve 2^{31} elenir. Ayrıca tahtaya yazılan sayı ilk durum hariç $4k + 3$ veya $7k - 3$ formunda olmalı. Dolayısıyla 28^{31} de elenir. $2^{2023} - 1$ ise $4a + 3$ işleminin 1011 kere uygulanmasıyla elde edilir.

25. Bir çemberin AB ve CD kirişleri bu çemberin içinde bir E noktasında kesişmektedir. $|AE| = 12$, $|DE| = 6$, $|CE| = 16$ ve bu çemberin merkezinin AB kirişine uzaklığı CD kirişine uzaklığının 2 katıysa, bu çemberin yarıçapı nedir?

a) $8\sqrt{2}$ b) 12 c) $4\sqrt{10}$ d) $6\sqrt{5}$ e) 14

Cevap: $8\sqrt{2}$. Çemberde kuvvet bağıntısından $|AE||BE| = |CE||DE|$ ve dolayısıyla $|BE| = 8$ bulunur. Çemberin merkezi O olmak üzere, O noktasının $[CD]$ kirişine uzaklığı x olsun. O noktasından bu iki kirişin orta noktalarına dik indirip Pisagor Teoremi uygularsak

$$R^2 = x^2 + 121 = 4x^2 + 100$$

ve $x^2 = 7$ bulunur. Buradan da $R^2 = \sqrt{128} = 8\sqrt{2}$ elde edilir.

26. Tüm rakamları 6 olan 2023 basamaklı doğal sayı ile tüm rakamları 9 olan 2023 basamaklı doğal sayının çarpımının rakamları toplamı kaçtır?

a) 18198 b) 18207 c) 18216 d) 18225 e) 18234

Cevap: 18207. Sayılar m ve n olmak üzere,

$$mn = m(10^{2023} - 1) = m10^{2023} - m$$

olduğuna göre, 4046 basamaklı mn sayısının soldan sağa ilk 2022 basamağı 6, sonraki basamağı 5, bundan sonraki 2022 basamağı 3 ve sonuncu basamağı 4 e eşittir. Buna göre, cevap $6 \cdot 2022 + 5 + 3 \cdot 2022 + 4 = 9 \cdot 2023 = 18207$ olur.

27. x ve y gerçel sayıları için $x^2(y^2 + 2) - x(2y - 1)$ ifadesinin alabileceği en küçük değer nedir?

a) -3 b) -2 c) -1 d) 0 e) Hiçbiri

Cevap: $-\frac{9}{8}$. İfadeyi açarsak $x^2y^2 - 2xy + 2x^2 + x = (xy-1)^2 + 2\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{9}{8}$ elde edilir ve tam kareler negatif olamayacağı için bu ifadenin en küçük değeri $-\frac{9}{8}$ olur. $x = -\frac{1}{4}$ ve $y = -4$ için eşitlik sağlanır.

28. Başlangıçta bir masa üzerinde N tane bilye bulunuyor. İlk hamleyi Aslı yapmak üzere, Aslı ve Zehra sırayla hamle yaparak bir oyun oynuyorlar ve sırası gelen oyuncu masa üzerinden, masa üzerindeki bilye sayısının bir böleni sayısınca bilye alıyor. Hamlesiyle masa üzerindeki son bilyeyi alan oyuncu oyunu kaybediyor. Oyun $N = 123, 567, 1000, 1024, 2023$ sayıları için birer kez oynanırsa, Aslı bu oyunlardan kaçını kazanmayı garantileyebilir?

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

Cevap: 2. N'nin çift olduğu durumlarda Aslı kendi hamlelerinde hep 1 bilye alarak oyunu kazanmayı garantiliyor. Çünkü, Aslı'nın her hamlesinden sonra masa üzerinde tek sayıda bilye kalır ve Zehra tek sayıda bilye alarak masa üzerindeki bilye sayısını çift yapmak zorundadır. Benzer şekilde N'nin tek değerlerinde Zehra masa üzerinden hep 1 bilye alarak oyunu kazanmayı garantiler.

29. Bir dışbükey $ABCDE$ beşgeninin kenar uzunlukları $|AB| = 7$, $|BC| = \sqrt{10}$, $|CD| = 4$, $|DE| = 3$ ve $|EA| = 8$ olarak verilmiştir. $s(\widehat{D}) = 90°$ ve $BE \parallel CD$ ise, $|AC|$ uzunluğu nedir?

a) 5 b) 8 c) $3+4\sqrt{3}$ d) $7+2\sqrt{2}$ e) 10

Cevap: $3+4\sqrt{3}$. CED dik üçgeninde Pisagor teoreminden $|CE|=5$ olur. C den BE doğrusuna inen dikme ayağına F dersek, $BE \parallel CD$ ve $s(\widehat{D})=90^\circ$ olduğundan $CFED$ bir dikdörtgen olup $|EF|=4$ ve $|CF|=3$ buluruz. Buradan, BFC üçgeninde Pisagor teoreminden $|BF|=1$ olur. Sonuç olarak, ABE üçgenine bakarsak, $|AB|^2-|BF|^2=48=|AE|^2-|EF|^2$ ve $F\in BE$ olduğundan $AF\perp BE$ elde ederiz, dolayısıyla A, F, C doğrudaş ve $|AF|=\sqrt{48}=4\sqrt{3}$ buluruz. Buradan da, $|AC|=|AF|+|FC|=4\sqrt{3}+3$ bulunur.

30. $28^{(28^{28})}+29^{(29^{29})}+30^{(30^{30})}$ toplamının 31 ile bölümünden kalan kaçtır?

a) 13 b) 14 c) 15 d) 16 e) 17

Cevap: 13. Fermat teoreminden her $a\in\{28,29,30\}$ ve her k tam sayısı için $a^{30k}\equiv 1 \pmod{31}$ dir. Diğer taraftan, $29^{29}\equiv(-1)^{29}\equiv -1 \pmod{30}$ ve $30^{30}\equiv 0 \pmod{30}$ olduğu açıktır. (-2) nin kuvvetleri $\pmod{30}$ da sırasıyla $(-2),4,(-8),16$ şeklinde tekrar edeceğinden $28^{28}\equiv(-2)^{28}\equiv 16 \pmod{30}$ olur. Dolayısıyla

$$\begin{aligned}28^{(28^{28})}+29^{(29^{29})}+30^{(30^{30})} &\equiv (-3)^{16}+(-2)^{-1}+(-1)^0\\ &\equiv (-3)\cdot((-3)^3)^5+15+1\\ &\equiv (-3)\cdot 4^5+16\\ &\equiv (-3)\cdot 32^2+16\\ &\equiv (-3)+16\equiv 13 \pmod{31}\end{aligned}$$

buluruz.

31. $ab+\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=4$ koşulunu sağlayan a ve b pozitif gerçel sayıları için $a+b$ en çok kaç olabilir?

a) $\dfrac{1}{2}$ b) 1 c) $\dfrac{5}{3}$ d) 2 e) 4

Cevap: 4. AGO eşitsizliğinden $4=ab+\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=ab+\dfrac{a+b}{ab}\geq 2\sqrt{a+b}$ olduğundan $a+b\leq 4$ olur. Eşitlik ise $a+b=4, ab=2$ iken sağlanır.

32. 6×6 bir tahtanın n birim karesi nasıl boyanırsa boyansın, kendisi, hemen solundaki ve hemen sağındaki birim kareler boyalı olan bir birim kare ya da kendisi, hemen üstündeki ve hemen altındaki birim kareler boyalı olan bir birim kare bulunuyorsa, n en az kaç olabilir?

a) 18 b) 22 c) 25 d) 28 e) 31

Cevap: 25. Tahtayı dört tane 3×3 kareye ayıralım. Her bir 3×3 karenin ana köşegen dışındaki kareleri boyanırsa, toplamda 24 kare boyanmış olur ve yan yana veya üst üste boyalı üç kare bulunmaz. $n = 25$ ise, 5 tane birim karesi boyalı olan bir satır bulunacaktır. Bu satırda koşulları sağlayan bir kare vardır.