TÜBİTAK

Türkiye Cumhuriyeti
SANAYİ VE TEKNOLOJİ BAKANLIĞI

MATEMATİK

16. ULUSAL
MATEMATİK OLİMPİYATI
BİRİNCİ AŞAMA SINAV
SORU VE ÇÖZÜMLERİ

2008

TÜRKİYE BİLİMSEL VE TEKNOLOJİK ARAŞTIRMA KURUMU
BİLİM İNSANI DESTEK PROGRAMLARI BAŞKANLIĞI

ULUSAL MATEMATİK OLİMPİYATLARI SORU ve ÇÖZÜMLERİ

Ankara

Nisan 2019

XVI. Ulusal Matematik Olimpiyatı Birinci Aşama Sınavı **A**

1. ABC üçgeninde, AD kenarortay olmak üzere, $m(\widehat{ADB}) = 45^o$ ve $m(\widehat{ACB}) = 30^o$ ise $\widehat{ABC}$ açısı kaç derecedir?

Cevap: 105. B den AC doğrusuna çizilen dikmenin ayağı E olsun. BEC üçgeni $30 - 60 - 90$ üçgeni olduğundan $|BD| = |CD| = |ED| = |BE|$ olur. $\angle ADE = \angle DAE = 15°$ olduğundan $|AE| = |ED| = |BE|$ dir. Buradan da $\angle ABE = 45°$ ve böylece $\angle ABC = 105°$ elde ederiz.

2. $3m^2n = n^3 + A$ denkleminin doğal sayılarda aşağıdaki A değerlerinden hangisi için çözümü vardır?

a) 301 b) 403 c) 415 d) 427 e) 481

Cevap: 415. Denklemi $n(3m^2 - n^2) = A$ olarak yazalım. $301, 403, 427$ ve 481 sayılarının her birinin tüm çarpanları $3k + 1$ şeklindedir:

$301 = 7 \cdot 43,$
$403 = 13 \cdot 31,$
$427 = 7 \cdot 61,$
$481 = 13 \cdot 37.$

Fakat $3m^2 - n^2 \not\equiv 1 \pmod 3$ olduğuna göre, bu dört durumda denklemin çözümü bulunmaz. $415 = 5(3 \cdot 6^2 - 5^2)$ olduğuna göre, cevap 415 dir.

3. $P(x) = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots + x^{18} - x^{19}$ polinomu verilsin. $Q(x) = P(x - 1)$ şeklinde tanımlanan Q polinomunda x^2 nin katsayısı kaçtır?

Cevap: 1140.

$$P(x) = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots + x^{18} - x^{19} = \frac{1 - x^{20}}{1 + x} = \frac{1 - (y - 1)^{20}}{y}$$

olduğundan, istenilen katsayı $1 - (y - 1)^{20}$ polinomunun y^3 teriminin katsayısı olacaktır. Buna göre, cevap $\binom{20}{3} = 1140$ olur.

4. YARIŞMA sözcüğünün harfleriyle, her harf bu sözcükte olduğu sayıda kullanılmak üzere, anlamlı veya anlamsız, iki kelimeden oluşan kaç cümle yazılabilir?

Cevap: 15120. YARIŞMA sözcüğünün $\frac{7!}{2!}$ tane farklı permütasyonu vardır. Bu permütasyonlardan her birini 6 farklı şekilde iki parçaya ayırarak iki kelimeden oluşan cümle elde edebiliriz. Buna göre cevap $\frac{7!}{2!} \cdot 6 = 15120$ olur.

5. Bir üçgenin kenarları a, b, c olsun, eğer a^2, b^2, c^2 uzunluğundaki doğru parçaları bir üçgen oluşturuyorsa bu üçgene iyi üçgen diyoruz. Aşağıda açıları verilen üçgenlerden kaç tanesi iyi üçgendir?
(i) 40°, 60°, 80°
(ii) 10°, 10°, 160°
(iii) 110°, 35°, 35°
(iv) 50°, 30°, 100°
(v) 90°, 40°, 50°
(vi) 80°, 20°, 80°

Cevap: 2. Kosinüs teoremine göre, a^2, b^2, c^2 uzunluğundaki doğru parçalarının bir üçgen oluşturması için gerek ve yeter koşulun üçgenin tüm açılarının dar açı olmasıdır. Buna göre, verilmiş altı üçgenden sadece ikisi iyi üçgendir.

6. Eğer n pozitif tam sayısına bölünen her tam sayı, basamaklarının yerleri nasıl değiştirilirse değiştirilsin yine n ye bölünüyorsa, n ye "iyi" sayı diyelim. Kaç iyi sayı vardır?

Cevap: 3. $n = 1$ ise sağladığı açıktır. $n \geq 2$ varsayalım ve $(10, z) = 1$ olmak üzere $n = 2^x \cdot 5^y \cdot z$ olsun. 10 ile $9z$ sayıları aralarında asal olduğundan $10^k \equiv 1 \pmod{9c}$ olacak şekilde bir $k \geq 2$ pozitif tam sayısı vardır. Tam olarak k tane 1 den ve $x + y + 1$ tane 0 dan oluşan 111...11000...0 sayısını düşünelim. Bu sayı, $\dfrac{10^k - 1}{9} \cdot 10^{x+y+1}$ e eşit olduğundan n ile bölünür. $k \geq 2$ olduğundan, farkları 9 olan $\underbrace{11..1}_{k-1}\underbrace{00..00}_{x+y}10$ ve $\underbrace{11..1}_{k-1}\underbrace{00..00}_{x+y+1}1$ tam sayıları da n ile bölünmelidir, bu da $n|9$ olduğu anlamına gelir. Dolayısıyla $n \geq 2$ ise, sadece $n = 3$ veya $n = 9$ olabilir. $n = 3, 9$ olduğunda şartın sağlandığı açıktır.

7. $a = \sqrt[3]{9} - \sqrt[3]{3} + 1$ olduğuna göre, $\left(\dfrac{4-a}{a}\right)^6$ ifadesinin değeri aşağıdakilerden hangisidir?

Cevap: 9. $x^2 - x + 1 = \dfrac{x^3 + 1}{x + 1}$ eşitliğinde $x = \sqrt[3]{3}$ yazarsak

$$\sqrt[3]{9} - \sqrt[3]{3} + 1 = \frac{4}{\sqrt[3]{3} + 1}$$

elde ederiz. Buna göre, $\left(\dfrac{4-a}{a}\right)^6 = \left(\dfrac{4}{a} - 1\right)^6 = 9.$

8. 10×10 bir satranç tahtasının birinci satırının karelerine sırasıyla $0, 1, 2, \ldots, 9$, ikinci satırının karelerine sırasıyla $10, 11, \ldots, 19$, ..., onuncu satırının karelerine sırasıyla $90, 91, \ldots, 99$ sayıları yazılmıştır. Sayıların bazılarının önüne, her satır ve her sütunda tam olarak beş tane olacak şekilde eksi işaretleri ekleyerek tüm sayıların toplamı en az kaç yapılabilir?

Cevap: İşaretlerin yerlerinden bağımsız olarak tüm sayıların toplamı her zaman 0 oluyor.

Her sütunda tam olarak beş tane eksi işaret olduğuna göre, tüm sayıların birler basamaklarının toplamı sıfıra eşittir. Her satırda tam olarak beş tane eksi işaret olduğuna göre, tüm sayıların onlar basamaklarının toplamı sıfıra eşittir. Buna göre, tüm sayıların toplamı her zaman sıfıra eşittir.

9. $ABCD$ karesinin dışında bir E noktası verilmiştir. $m(\widehat{BEC}) = 90^o$, $F \in [CE]$, $[AF] \perp [CE]$, $|AB| = 25$ ve $|BE| = 7$ olduğuna göre $|AF|$ kaç birimdir?

Cevap: 31. $\angle BCE = \alpha$ olsun. $ABCD$ kare olduğundan $|BC| = 25$ ve $|AC| = 25\sqrt{2}$ dir. Pisagor teoreminden $|CE| = 24$ olur. $\sin\alpha = 7/25$ ve $\cos\alpha = 24/25$ tir. $|AF| = |AC| \cdot \sin(45 + \alpha) = |AC|(\sin\alpha + \cos\alpha)/\sqrt{2} = 31$ olur.

10. $\sqrt{xy} - 71\sqrt{x} + 30 = 0$ denkleminin pozitif tam sayılarda kaç tane (x, y) çözüm ikilisi vardır?

Cevap: 8. $\sqrt{xy} = 71\sqrt{x} - 30$ denkleminin her iki tarafının karesini alırsak $xy = 71^2x - 2 \cdot 30 \cdot 71 \cdot \sqrt{x}$ elde ederiz. Buna göre, $\sqrt{x}$ bir rasyonel sayıdır ve dolayısıyla m bir negatif olmayan tam sayı olmak üzere, $x = m^2$. Bunu $\sqrt{xy} - 71\sqrt{x} + 30 = 0$ denklemine yazarsak $m\sqrt{y} - 71m + 30 = 0$ elde ederiz. Buna göre, $\sqrt{y}$ bir rasyonel sayıdır ve dolayısıyla n bir negatif olmayan tam sayı olmak üzere, $y = n^2$. Sonuç olarak $mn - 71m + 30 = 0$ olur. Buna göre, $m(71 - n) = 30$. $m|30$ olduğuna göre, $m = 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30$ ve bu değerlerin her biri için $n = 71 - 30/m$ olur. Toplam 8 çözüm ikilisi vardır.

11. Bir (a_n) dizisi $a_1 = 1$, $a_2 = 5$ ve her $n \geq 2$ için $a_{n+1} - 2a_n + a_{n-1} = 7$ şeklinde tanımlanmaktadır. Buna göre a_{17} kaçtır?

Cevap: 905. $b_n = a_{n+1} - a_n = b_n$ olarak tanımlanırsa $b_1 = 5 - 1 = 4$, $b_{n+1} - b_n = 7$ ve $b_n = 4 + 7(n - 1)$ olur. Buradan

$$a_{17} - a_1 = b_1 + b_2 + \cdots + b_{16} = \frac{4 + 4 + 7 \cdot 15}{2} \cdot 16 = 904$$

Sonuç olarak $a_{17} = 905$ olur.

12. Yedi renk kullanılarak her yüzeyi farklı bir renge boyanmış kaç küp oluşturulabilir?

Cevap: 210. Boyama için yedi renkten altısını seçelim. Bu altı rengin birinin karşısındaki yüzeyi boyamak için 5 seçenek bulunuyor. Kalan dört rengi 3! farklı şekilde kullanabiliriz. Buna göre cevap $\binom{7}{6} \cdot 5 \cdot 3! = 210$ olur.

13. C açısı geniş açı olan ABC üçgeninde $D \in [AB]$ ve $[DC] \perp [BC]$ dir. $m(\widehat{ABC}) = \alpha$, $m(\widehat{BCA}) = 3\alpha$ ve $|AC| - |AD| = 10$ olduğuna göre $|BD|$ kaç birimdir?

Cevap: 20. $[BD]$ nin orta noktası E olsun. BCD dik üçgen olduğundan $|DE| = |BE| = |CE|$ ve $\angle AEC = \angle ACE = 2\alpha$ olur. Buradan da $|AE| = |AC|$ ve $|DE| = |AE| - |AD| = |AC| - |AD| = 10$ elde ederiz. $|BD| = 2|DE| = 20$ dir.

14. $49^{303} \cdot 3993^{202} \cdot 39^{606}$ sayısının son üç rakamı nedir?

Cevap: 561. $49^{303} \cdot 3993^{202} \cdot 39^{606} = (7^2)^{303} \cdot (3 \cdot 11^3)^{202} \cdot (3 \cdot 13)^{606}$ olduğundan $49^{303} \cdot 3993^{202} \cdot 39^{606} = (7 \cdot 11 \cdot 13)^{606} \cdot 3^{808}$ elde ederiz. $7 \cdot 11 \cdot 13 = 1001 \equiv 1 \pmod{1000}$ denkliğinden, $49^{303} \cdot 3993^{202} \cdot 39^{606}$ sayısının son üç rakamını bulmak için 3^{808} sayısının son üç rakamına bakmalıyız. Diğer taraftan, $\phi(1000) = (2^3 - 2^2) \cdot (5^3 - 5^2) = 400$ olduğundan, $3^{808} \equiv 3^8 \equiv 561 \pmod{1000}$ elde ederiz, bu da cevabın 561 olduğunu gösterir.

15. $a_1 = \dfrac{1}{3}$ ve her $n \geq 1$ için $a_{n+1} = \dfrac{a_n}{\sqrt{1 + 13a_n^2}}$ şeklinde tanımlanan (a_n) dizisinin $a_k < \dfrac{1}{50}$ koşulunu sağlayan en büyük terimi a_k ise k kaçtır?

Cevap: 193. Öncelikle $a_{n+1} = \dfrac{a_n}{\sqrt{1 + 13a_n^2}}$ eşitliğinden $\dfrac{1}{a_{n+1}^2} = \dfrac{1 + 13a_n^2}{a_n^2}$ ve dolayısıyla $\dfrac{1}{a_{n+1}^2} = \dfrac{1}{a_n^2} + 13$ olduğu görülür. $\dfrac{1}{a_n^2} = b_n$ dersek, $b_1 = 9$ ve her $n \geq 1$ için $b_{n+1} = 13 + b_n$ olur. Buradan, her $n \geq 1$ tam sayısı için $b_n = 13(n-1) + 9 = 13n - 4$ olduğu kolaylıkla görülebilir. Dolayısıyla, her $n \geq 1$ tam sayısı için $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{13n - 4}}$ olup, $a_k < \dfrac{1}{50}$ olması için $\dfrac{1}{\sqrt{13k - 4}} < \dfrac{1}{50}$ olmalıdır, bu da $k > \dfrac{2504}{13}$ demektir. $\{a_n\}$ dizisi azalan bir dizi olduğundan, $k > \dfrac{2504}{13}$ koşulunu sağlayan en küçük tam sayı için a_k en büyük olur. Sonuç olarak cevap $\left\lceil \dfrac{2504}{13} \right\rceil = 193$ olur.

16. 50 kişilik bir sınıfta yapılan 4 soruluk bir sınavda, herhangi 40 kişiden en az 1 kişi tam olarak 3 soruyu, en az 2 kişi tam olarak 2 soruyu, en az 3 kişi tam olarak 1 soruyu doğru, en az 4 kişi ise bütün soruları yanlış çözmüştür. Tek sayıda soru çözen öğrencilerin sayısı en az kaçtır?

Cevap: 24. Tam olarak 3 soru çözenlerin sayısı 11 den az olursa, çözdüğü soru sayısı 3 olmayan en az 40 kişi bulunuyor ve çelişki gelir. Demek ki en az 11 kişi tam olarak 3 soru çözmüştür. Benzer şekilde en az 12 öğrencinin tam olarak 2 soru, en az 13 öğrencinin tam olarak 1 soru ve en az 14 öğrencinin tam olarak 0 soru çözdüğü görülür. $11+12+13+14=50$ olduğuna göre, tam olarak 3, 2, 1 ve 0 soru çözen öğrencilerin sayısı sırasıyla 11, 12, 13 ve 14 tür. Buna göre, tek sayıda soru çözen öğrencilerin sayısı $11+13=24$ olur.

17. B açısı dik olan ABC üçgeninin A ve C köşeleri, B merkezli 20 birim yarıçaplı çeyrek çemberin üzerindedirler. Bu çeyrek çemberin iç bölgesine $[AB]$ çaplı bir yarım çember çizilmiştir. C noktasından yarım çembere çizilen teğetin değme noktası B'den farklı bir D noktası ve CD doğrusunun çeyrek çemberi kestiği nokta F dir. Buna göre $|FD|$ kaç birimdir?

Cevap: 4. $[AB]$ nin orta noktası E olsun. E noktası yarım çemberin merkezi olduğundan $|ED|=10$ ve $ED \perp DC$ dir. CB ve CD doğruları çeyrek çembere teğet olduğundan $|CB|=|CD|=20$ dir. F noktası çeyrek çember üzerinde olduğundan $|BF|=20$ dir. $\angle BCE=\alpha$ olsun. $\angle ECD=\alpha$ olur. BFC üçgeni eşit iki açısı 2α olan ikizkenar bir üçgen olduğundan $|CF|=2|BC|\cos 2\alpha$ olur. BEC dik üçgen olduğundan Pisagor teoreminden $|EC|=10\sqrt{5}$ ve buradan da $\cos\alpha=2/\sqrt{5}$ elde edilir. Buradan da $\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1=3/5$ ve böylece $|CF|=24$, $|FD|=24-20=4$ olur.

18. Kaç tane n pozitif tamsayısı için $\sqrt{n+\sqrt{n+\sqrt{n+\sqrt{n}}}}$ tamsayıdır?

Cevap: 0.

m bir tam sayı olmak üzere, $\sqrt{n+\sqrt{n+\sqrt{n+\sqrt{n}}}}=m$ olsun. O zaman $\sqrt{n+\sqrt{n+\sqrt{n}}}=m^2-n$, $\sqrt{n+\sqrt{n}}=(m^2-n)^2-n$ ve $\sqrt{n}=((m^2-n)^2-n)^2-n$. Buna göre, n bir tam karedir ve bir a pozitif tam sayısı için $n=a^2$ ve $a^2+a=((m^2-n)^2-n)^2$ dir. Demek ki a^2+a da bir tam karedir. Fakat

$$a^2<a^2+a<a^2+2a+1<(a+1)^2$$

olduğundan a^2+a bir tam kare olamaz, çelişki. Koşulu sağlayan n pozitif tam sayısı bulunmaz.

19. $f : (0, \infty) \to (0, \infty)$ fonksiyonu her $x, y \in (0, \infty)$ için

$$10 \cdot \frac{x+y}{xy} = f(x) \cdot f(y) - f(xy) - 90$$

denklemini sağlıyorsa $f\left(\frac{1}{11}\right)$ kaçtır?

Cevap: 21. Eşitlikte $y = 1$ yazarsak,

$$10 \cdot \frac{x+1}{x} = f(x) \cdot f(1) - f(x) - 90 \qquad (1)$$

olur. (1) de $x = 1$ yazarsak,

$$f(1)^2 - f(1) - 110 = 0$$

olur. Buna göre, $f(1) = 11$ ya da $f(1) = -10$. Koşullara göre, $f(1)$ negatif sayı olamaz. (1) eşitliğinde $f(1) = 11$ yazarsak, $f(x) = 10 + \frac{1}{x}$ elde ederiz. Buna göre, $f\left(\frac{1}{11}\right) = 21$ olur.

20. $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{2008}$ tam sayılarından her biri en az 1 en çok ise 5 tir. (a_n, a_{n+1}) ikilisine, $a_n < a_{n+1}$ ise artan ikili, $a_n > a_{n+1}$ ise azalan ikili diyelim. Dizideki artan ikili sayısı 103 tane ise azalan ikili sayısı en az kaçtır?

Cevap: 25. Azalan ikili sayısı n olsun. O zaman

$$4 \geq a_{2008} - a_1 = (a_{2008} - a_{2007}) + (a_{2007} - a_{2006}) + \cdots + (a_2 - a_1) \geq 103 - 4n$$

olduğuna göre, $n \geq 25$ olur.

Soldan başlayarak 25 tane 1, 2, 3, 4, 5 bloğundan, 1 tane 1, 2, 3 bloğundan ve 1880 tane 4 ten oluşan dizide tam olarak 103 tane artan ve 25 tane azalan ikili bulunuyor. Demek ki, azalan ikili sayısının alabileceği en küçük değer 25 tir.

21. ABC dik üçgeninde $m(\widehat{A}) = 90^o$ olsun. $P \in [AC]$,$Q \in [BC]$,$R \in [AB]$ olacak şekildeki $APQR$ karesinin alanı 9, $N, K \in [BC]$, $M \in [AB]$ ve $L \in [AC]$ olacak şekildeki $KLMN$ karesinin alanı da 8 ise $|AB| + |AC|$ kaçtır?

Cevap: 12. $|AB| = x$, $|BC| = y$ olsun. $\triangle QRB \sim \triangle CAB$ olduğundan $(x-3)/x = 3/y$ ve buradan da $xy = 3(x+y)$ olur. A dan geçen yüksekliğin ayağı E olsun. $\triangle MNB \sim \triangle AEB$ ve $\triangle ALM \sim \triangle ACB$ benzerliklerini kullanarak $|MB|/|AB| = |MN|/|AE|$ ve $|MA|/|AB| = |ML|/|BC|$ elde ederiz. Bu iki eşitliği taraf tarafa

toplayıp $|BC| = \sqrt{x^2+y^2}$ ve $|AE| = xy/\sqrt{x^2+y^2}$ eşitliklerini kullanarak $\sqrt{2}/4 = 1/\sqrt{x^2+y^2} + \sqrt{x^2+y^2}/xy$ denklemini buluruz. $x+y=a$ dersek $xy=3a$ ve $\sqrt{x^2+y^2} = a^2-6a$ olacağından son denklem $\sqrt{2}/4 = 1/\sqrt{a^2-6a} + \sqrt{a^2-6a}/(3a)$ şeklindedir. Bu denklemi düzenlersek $4(a-3) = 3\sqrt{2a^2-12a}$ elde ederiz. Buradan da her iki tarafın karesini alarak $(a-12)(a+6)=0$ ve $a>0$ olduğundan $|AB| + |BC| = a = 12$ buluruz.

22. Kaç $a \geq b$ şartını sağlayan (a,b) pozitif tamsayı ikilisi için a^2+b^2 ifadesi a^3+b ve $a+b^3$ ifadelerini böler?

Cevap: 1. Bir p asal sayısı ve bir $s \geq 1$ tam sayısı için, $ebob(a,b)$ nin p^x şeklindeki en büyük çarpanı p^s olsun. O zaman a^3+b ve $a+b^3$ ifadelerinin en az birinde p^x şeklindeki en büyük çarpan da p^s olacaktır. $p^{2s}|a^2+b^2$ olduğuna göre, bu a^2+b^2 nin a^3+b ve $a+b^3$ ifadelerini bölmesi ile çelişir. Demek ki a ve b sayıları aralarında asaldır. a^2+b^2 sayısı $a(a^2+b^2)-(a^3+b) = b(ab-1)$ sayısını bölüyor. b ve a^2+b^2 aralarında asal olduğuna göre, a^2+b^2 sayısı $ab-1$ sayısını bölüyor. $ab>1$ olursa, $a^2+b^2 \geq 2ab > ab-1$. Demek ki tek seçenek $a=b=1$ olur.

23. a,b,c,d gerçel sayıları $a^2+b^2+c^2+d^2-ab-bc-cd-d+\dfrac{2}{5}=0$ eşitliğini sağlıyorsa a kaçtır?

Cevap: $\dfrac{1}{5}$.

$$a^2+b^2+c^2+d^2-ab-bc-cd-d+\frac{2}{5}$$

$$= \left(a-\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}b}{2} - \frac{c}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}c}{\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{3}d}{2\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{5}d}{2\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\right)^2 = 0$$

olduğuna göre, sırayla $d=\dfrac{4}{5}, c=\dfrac{3}{5}, b=\dfrac{2}{5}$ ve $a=\dfrac{1}{5}$ gelir.

24. a_1,a_2,a_3,a_4,a_5 ve a_6 sayıları $\{-1,0,1\}$ kümesinin elemanları olmak üzere,

$$a_1.5^1 + a_2.5^2 + a_3.5^3 + a_4.5^4 + a_5.5^5 + a_6.5^6$$

ifadelerine bakalım. Bu ifadelerin kaç tanesi negatif değer alır?

Cevap: 364. Her $n \geq 1$ değeri için $5^n > 5^{n-1}+5^{n-2}+\cdots+5$ olduğundan ifade sadece $a_1=a_2=\cdots=a_6=0$ durumunda sıfıra eşit oluyor. İfadenin negatif ve pozitif olma durumlarının sayıları birbirine eşittir. Buna göre, cevap $\dfrac{3^6-1}{2} = 364$ olur.

25. O merkezli çemberde $[AB]$ çaptır. C ve D noktaları çember üzerinde $[AB]$ çapına göre farklı yarım çemberler üzerindedirler. B den $[CD]$ ye inen dikmenin ayağı H olsun. $|AO| = 13$, $|AC| = 24$ ve $|HD| = 12$ olduğuna göre DCB açısı kaç derecedir?

Cevap: 30. ACB dik üçgen olup Pisagor teoreminden $|BC| = 10$ olur. $\angle CAB = \angle CDB$ olduğundan $\triangle ACB \sim \triangle DHB$ olur. Buradan da $|HB|/12 = 10/24$ ve $|HB| = 5$ olur. CHB dik üçgeninde $|HB| = |BC|/2$ olduğundan $\angle DCB = \angle HCB = 30°$ bulunur.

26. $A = \dfrac{2^2 + 3 \cdot 2 + 1}{3! \cdot 4!} + \dfrac{3^2 + 3 \cdot 3 + 1}{4! \cdot 5!} + \dfrac{4^2 + 3 \cdot 4 + 1}{5! \cdot 6!} + \cdots + \dfrac{10^2 + 3 \cdot 10 + 1}{11! \cdot 12!}$ toplamı

için $11! \cdot 12! \cdot A$ sayısını 11 e bölünce kalan nedir?

Cevap: 10. Öncelikle $\dfrac{n^3 + 3n^2 + 1}{(n+1)!(n+2)!} = \dfrac{1}{n!(n+1)!} - \dfrac{1}{(n+1)!(n+2)!}$ olduğundan $A = \dfrac{1}{2!3!} - \dfrac{1}{11!12!}$ olur. Dolayısıyla $11! \cdot 12! \cdot A = (11!)^2 - 1$ elde ederiz. $11! \cdot 12! \cdot A + 1$ sayısı 11 ile tam bölündüğünden $11! \cdot 12! \cdot A$ sayısının 11 ile bölümünden kalan 10 olur.

27. Bir üçgenin açıları olan α, β, γ aritmetik dizi oluşturuyorlar. $\sin 20\alpha$, $\sin 20\beta$ ve $\sin 20\gamma$ da aritmetik dizi oluşturuyorsa, α kaç farklı değer alabilir?

Cevap: 7. $\alpha \leq \beta \leq \gamma$ olsun. O zaman $\beta = 60°$ olacaktır. $\alpha = 60° - t, \gamma = 60° + t$ olsun. $\sin 20\alpha + \sin 20\gamma = 2 \sin 20\beta$ olduğuna göre,

$$2 \sin 10(\alpha + \gamma) \cdot \cos 10(\alpha - \gamma) = 2 \sin 20\beta$$

olur. O zaman $\alpha + \gamma = 2\beta$ dan $\cos 10(\gamma - \alpha) = 1$ gelir: $n = 0, 1, 2, \ldots$ olmak üzere, $10(\gamma - \alpha) = 360°n$. Buradan $20t = 360°n$ ve $t = 18°$ gelir. $t < 60°$ olduğuna göre, $t = 0°, 18°, 36°, 54°$ olur. Buna göre, α açısı 4 farklı değer alır. $\alpha \geq \beta \geq \gamma$ durumunda da benzer şekilde 3 yeni çözüm gelir.

28. 8×8 bir satranç tahtasının bir köşesinden bir birim kare kesilip atıldığında kalan şekli eşit alanlı üçgenlere bölmek için en az kaç üçgen gerekir?

Cevap: 18. Üçgenlerden birinin bir kenarı kesilip atılmış birim karenin bir kenarının üzerinde yerleşecektir. Bu nedenle üçgenlerin alanları en fazla $\dfrac{1}{2} \cdot 1 \cdot 7 = \dfrac{7}{2}$ olacaktır. Buna göre, en az $63 \cdot \dfrac{2}{7} = 18$ üçgen gerekiyor. 18 üçgen örneğini vermek için satranç tahtasının kalan kısmını 9 tane 1×7 dikdörtgene ayırıp bu dikdörtgenlerin her birini iki eşit üçgene bölmek gerekiyor.

29. $ABCD$ konveks dörtgeninde $[AB]$ ile $[CD]$ paralel değildir. $[AD]$ nin orta noktası E, $[BC]$ nin orta noktası F dir. $|CD| = 12$, $|AB| = 22$ ve $|EF| = x$ olduğuna göre, x in alabileceği tamsayı değerlerinin toplamı kaçtır?

Cevap: 121. $[AC]$ köşgeninin orta noktası G olsun. $EG \parallel DC$ ve $FG \parallel AB$ olur. Buradan da $|EG| = 6$, $|GF| = 11$ dir. AB ile CD paralel olmadığı için E, G, F doğrusal olamaz. Buradan da EGF üçgeninde üçgen eşitsizliğinden $5 < x < 17$ elde ederiz. Bu aralıktaki her x tam sayısı için şartları sağlayan bir dörtgen çizilebilir. x in alabileceği değerler $6, 7, \ldots, 16$ olup bu sayıların toplamı 121 dir.

30. İlk terimi pozitif tam sayı olan bir dizide, her terime en büyük rakamı eklenerek bir sonraki terim elde ediliyor. Bu dizinin en çok kaç ardışık terimi tek sayı olabilir?

Cevap: 5. $\{857, 865, 873, 881, 889\}$ dizisinin istenilen koşulu sağladığı açıktır. Dizimizde 6 tane ardışık terimin tek sayı olamayacağını gösterelim, aksini varsayalım. Dizinin ardışık üç elemanı a, b, c tek sayılarını alalım. a ve b nin en büyük rakamları x ve y olsun. x ve y çift sayılar olduğundan, a ve b nin son basamakları olamazlar. Ek olarak, a ve b nin tüm rakamları 9 dan küçüktür, bu da a ve b nin son iki basamak haricinde aynı olduğunu gösterir.

- $x < y$ ise, y rakamı b nin son iki rakamından biri olmak zorundadır. b sayısı tek sayı olduğundan y rakamı b nin sondan ikinci rakamı olur. Diğer taraftan, x ve y çift sayılar olduğundan $x \leq y - 2$ olur. a nın sondan ikinci rakamı en fazla x olabileceğinden $x = b - a > 10$ olup çelişki elde ederiz.
- $x > y$ ise, x rakamı a nın son iki rakamından biri olmak zorundadır. a sayısı tek sayı olduğundan x rakamı a nın sondan ikinci rakamı olur. $x \leq 8$ olduğundan, b nin sondan ikinci rakamı x veya $x + 1$ olup, $x > y$ koşulu ile çelişir.

Buradan, dizimizin ardışık 6 tek sayı terimi bir aritmetik dizi oluşturmak zorundadır, ortak farka d diyelim. $d \leq 8$ olduğundan dizimizin ilk beş teriminin son rakamları $\{1, 3, 5, 7\}$ olabilir. Güvercin yuvası prensibinden, ilk beş terim arasında son rakamları aynı olan iki terim elde ederiz. Dolayısıyla, iki terim arasındaki olası farkların oluşturduğu $\{d, 2d, 3d, 4d\}$ kümesinden en az bir sayı 10 ile bölünmelidir, bu da d nin 5 ile bölünmesini gerektirir. d sıfırdan farklı çift bir rakam olduğundan bu imkansızdır. Sonuç olarak, dizimizde en fazla 5 ardışık terim tek sayı olabilir.

31. $xy = 1$ koşulunu sağlayan her x, y gerçel sayıları için

$$((x+y)^2 + 4)((x+y)^2 - 2) \geq A \cdot (x-y)^2$$

eşitsizliği sağlanıyorsa, A sayısının alabileceği en büyük değer aşağıdakilerden hangisidir?

Cevap: 18. Öncelikle $x = \sqrt{2}+1$ ve $y = \sqrt{2}-1$ alırsak $xy = 1$ koşulu sağlanır. $(x+y)^2 = 8$ ve $(x-y)^2 = 4$ olduğundan, $12 \cdot 6 \geq A \cdot 4$ ve dolayısıyla $A \leq 18$ elde ederiz. Şimdi, $xy = 1$ koşulunu sağlayan bütün x ve y gerçel sayıları için $((x+y)^2+4)((x+y)^2-2) \geq 18 \cdot (x-y)^2$ olduğunu göstereceğiz. $(x+y)^2 = m$ diyelim, $xy = 1$ eşitliğini kullanarak $(x-y)^2 = m-4$ elde ederiz. Diğer taraftan,

$$(m+4)(m-2) \geq 18 \cdot (m-4) \Longleftrightarrow (m-8)^2 \geq 0$$

olduğundan, $A = 18$ ve $xy = 1$ ise $((x+y)^2+4)((x+y)^2-2) \geq A \cdot (x-y)^2$ eşitsizliği sağlanır.

32. $n \geq 4$ kişilik bir partide, her 3 kişinin tam olarak 1 ortak arkadaşı varsa n kaç farklı değer alabilir?

Cevap: 1. n nin alabileceği tek değerin 4 olduğunu gösterelim. A, S, T kişilerinin ortak arkadaşı B, A, S, B kişilerinin ortak arkadaşı C ($C = T$ olabilir), A, B, C kişilerinin ortak arkadaşı D ($D = S, T$ olabilir) olsun. Bu durumda A, B, C, D kişileri kendi aralarında arkadaş olacaklar. Şimdi A nın sadece 3 arkadaşının olduğunu gösterelim. A nın U, V arakadaş ikilisine, A, U, V kişilerinin ortak arkadaşlarını karşılık gösterelim. $(U, V) \neq (P, Q)$ ikililerinin her birine aynı Z kişisi karşılık gösterilirse, $U \neq P$ olmak üzere, hem A, hem Z kişisi U, V, P kişilerinin ortak arkadaşı olacaktır, çelişki. Demek ki her arkadaş ikilisine farklı bir kişi karşılık gösterilecektir. O zaman A nın arkadaş sayısı k olmak üzere, A nın arkadaş ikilisi sayısı $\binom{k}{2}$ olduğundan, $\binom{k}{2} \leq k$ ve buradan da $k \leq 3$ olur. Demek ki, A nın B, C, D dışında arkadaşı bulunmuyor. Benzer şekilde B, C, D kişilerinin her birinin A, B, C, D dışında arkadaşı bulunmuyor. Partide bu 4 kişi dışında bir E kişisi de varsa, A, B, E nin ortak arkadaşı olmayacaktır, çelişki.

33. E noktası, $ABCD$ eşkenar dörtgeninin iç bölgesinde olmak üzere $|AE| = |EB|$, $m(\widehat{EAB}) = 12^o$ ve $m(\widehat{DAE}) = 72^o$ dir. Buna göre $m(\widehat{CDE})$ kaç derecedir?

Cevap: 66. ABD üçgeni ikizkenar olduğundan $\angle ABD = \angle ADB = 48^\circ$ olur. ABD üçgeninin iç bölgesinde EAF bir eşkenar üçgen olacak biçimde bir F noktası alalım. $\angle FAD = \angle EAB = 12^\circ$ ve $|AE| = |AF|$, $|AB| = |AD|$ olduğundan $\triangle EAB \cong \triangle FAD$ olur. Yani EFD bir ikizkenar üçgendir. Açı yazarak $\angle EFD = 144^\circ$ ve $\angle FDE = \angle FED = 18^\circ$ olduğunu görebiliriz. $\angle ADB = 48^\circ$ ve $\angle ADE = 30^\circ$ olduğundan $\angle EDB = 18^\circ$ olur. Buradan da $\angle CDE = 48^\circ + 18^\circ = 66^\circ$ elde ederiz.

34. Ondalık yazılımında 0 dan farklı olan tüm rakamlarına bölünen pozitif bir tam sayıya "özel sayı" diyelim. En fazla kaç ardışık özel sayı vardır?

Cevap: 13. Ardışık 14 tane özel sayı olamayacağını ispatlayalım, aksini varsayalım. $\{n, n+1, \ldots, n+13\}$ sayılarının hepsi özel sayı olsun. $i \in \{0, 1, 2, 3\}$ olmak üzere,

$n+i$ ve $n+i+10$ sayılarının son basamakları aynı olduğundan, bu basamağa c dersek, $c|10$ elde ederiz. Dolayısıyla, $n, n+1, n+2, n+3$ sayılarının son basamakları sadece $0, 1, 2, 5$ olabilir. Fakat hem n hem de $n+3$ sayısının son basamağının $\{0, 1, 2, 5\}$ kümesinden olması için $n \equiv 2 (\text{mod } 10)$ olmalıdır, bu durumda ise $n+1 \equiv 3 (\text{mod } 10)$ olup çelişki elde ederiz. 13 tane ardışık özel sayı için örnek verelim: $10^k \equiv 1 (\text{mod } 3^4 \cdot 7)$ olan k pozitif tam sayısı için, $n = \underbrace{11..1}_{k}000$ olsun. $n = \dfrac{10^k - 1}{9} \cdot 10^3$ olduğundan, n sayısı $\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ sayılarının hepsi ile bölünür. n, $n+1$, $n+10$ ve $n+11$ in özel sayı olduğu açıktır. Diğer taraftan, $i \in \{2, 3, \ldots, 9\}$ olmak üzere $n+i$ sayısı i ile tam bölünür. $n+12$ sayısında sadece $0, 1, 2$ rakamları olduğundan $n+12$ de özel sayı olur. Sonuç olarak, $\{n, n+1, n+2, \ldots, n+12\}$ sayıları ardışık 13 tane özel sayı olur.

35. x bir gerçel sayı ise $\sqrt{x^2 - 6x + 13} + \sqrt{x^2 - 14x + 58}$ ifadesinin alabileceği en küçük gerçel değer kaçtır?

Cevap: $\sqrt{41}$. Verilen ifade $A(x, 0)$ noktasıyla $B(3, 2)$ ve $C(7, 3)$ noktalarının arasındaki uzaklıkların toplamına eşittir. A noktası ile B arasındaki uzaklık, A ile $B'(3, -2)$ arasındaki uzaklığa eşittir. Buna göre, ifade A ile B' ve C noktalarının arasındaki uzaklıkların toplamına eşittir. Bu toplam en küçük değerini $A \in [B', C]$ durumunda alır ve bu durumda toplam $|B'C| = \sqrt{4^2 + 5^2} = \sqrt{41}$ olur.

36. Üst üste dizilmiş 2008 madeni paranın bulunduğu bir beyaz masa ve iki boş siyah masadan başlayarak, her hamlede herhangi bir masadaki en üst pozisyondaki parayı alıp herhangi bir boş masaya veya herhangi bir masadaki en üst pozisyona yerleştirerek, en az kaç hamlede tüm paralar beyaz masaya ters sırada yerleştirilebilir?

Cevap: 6022. n tane madeni para için cevabın $3n - 2$ olduğunu kanıtlayacağız. İlk olarak bunun için $3n - 2$ hamlenin yeterli olduğunu gösterelim. Beyaz masa B, diğer masalar S_1 ve S_2 olsun. En üstteki parayı S_1 e, kalan paraları S_2 ye, S_1 deki parayı B ye, S_2 deki $n-1$ tane paranın $n-2$ tanesini S_1 e, S_2 deki tek parayı B ye ve S_1 deki paraları B ye yerleştirirsek paralar $1 + (n-1) + 1 + (n-2) + 1 + (n-2) = 3n - 2$ hamle sonucunda beyaz masaya ters sırada yerleşmiş olur. Şimdi gereken hamle sayısının $3n - 2$ den az olamayacağını gösterelim. Her madeni paraya hamle uygulanacağı için 2 den az hamle uygulanmış madeni para yoktur. Toplam hamle sayısı $3n - 2$ den az olursa, 2 hamle uygulanmış en az 3 madeni para olacaktır. Bu 3 madeni paranın ikisi aynı siyah masaya taşınmıştır ve demek ki hamleler bittiğinde bu iki paranın B masasındaki sıraları değişmemiştir, çelişki.