TÜBİTAK

Türkiye Cumhuriyeti
SANAYİ VE TEKNOLOJİ BAKANLIĞI

MATEMATİK

19. ULUSAL
MATEMATİK OLİMPİYATI
BİRİNCİ AŞAMA SINAV
SORU VE ÇÖZÜMLERİ

2011

TÜRKİYE BİLİMSEL VE TEKNOLOJİK ARAŞTIRMA KURUMU
BİLİM İNSANI DESTEK PROGRAMLARI BAŞKANLIĞI

ULUSAL MATEMATİK OLİMPİYATLARI SORU ve ÇÖZÜMLERİ

Ankara

Nisan 2019

1. Aşağıdakilerden hangisi, $[AB]$ ve $[CD]$ kenarlarının orta dikmeleri $[AC]$ köşegeni üstündeki bir noktada kesişen her $ABCD$ dışbükey dörtgeni için doğrudur?

a) $|BA| + |AD| \leq |BC| + |CD|$ b) $|BD| \leq |AC|$ c) $|AC| \leq |BD|$

d) $|AD| + |DC| \leq |AB| + |BC|$ e) Hiçbiri

Cevap: $|BD| \leq |AC|$. Orta dikmeler $[AC]$ üzerinde bir P noktasında kesişsin. $|PD| = |PC|$ ve $|PA| = |PB|$ olur. DPB üçgeninde üçgen eşitsizliğinden $|BD| \leq |PD| + |PB| = |PC| + |PA| = |AC|$ olur. (a), (c) ve (d) seçeneklerindeki eşitsizliklerin her dörtgen için sağlanamayacağını şu örnekte görebiliriz: B ve D noktaları $[AC]$ çaplı çember üzerinde yer alırsa sorudaki şart da sağlanır. A ve C sabitlenip B ve D kendi yarım çemberleri üzerinde serbestçe hareket ettirilerek (a), (c) ve (d) seçeneklerindeki eşitsizliklerin her biri bozulabilir.

2. $(x+1)^{65}$ polinomunun kaç katsayısı 65 e bölünmez?

Cevap: 16. $65 = 5 \cdot 13$. $(x+1)^{65} = ((x+1)^{13})^5 \equiv (x^{13}+1)^5 \pmod{13}$ $\Rightarrow$ 13 ile bölünen kuvvetlerin katsayıları 13 ile bölünmez. $(x+1)^{65} = ((x+1)^5)^{13} \equiv (x^5+1)^{13} \pmod 5 \Rightarrow$ 20 ve 45 dışındaki 5 ile bölünen kuvvetlerin katsayıları 5 ile bölünmez. 0 ve 65 her iki durumda da sayıldığından cevap $6 + 12 - 2 = 16$ dır.

3. $1 + \sqrt{n^2 - 9n + 20} > \sqrt{n^2 - 7n + 12}$ eşitsizliğini sağlayan kaç n pozitif tam sayısı vardır?

Cevap: 4. Her iki tarafın karesini alıp sadeleştirirsek

$$2\sqrt{n^2 - 9n + 20} > 2n - 9$$

elde ederiz. $n = 1, 2, 3, 4$ durumlarında sol taraf negatif olmayan gerçel sayı, sağ taraf ise negatif sayıdır. Yeniden her iki tarafın karesini alıp sadeleştirirsek $80 > 81$ çelişkisi gelir. Buna göre eşitsizliğin pozitif tam sayılarda çözüm kümesi $\{1, 2, 3, 4\}$ olur.

4. $\{1, 2, \ldots, 20\}$ kümesinin 8 elemanlı altkümelerinden kaçı ardışık sayılar içermez?

Cevap: $\binom{13}{8}$. 12 seçilmeyen elemanın en sol, en sağ ve aralarına 8 seçilen elemanı sıkıştırıyoruz. Bu nedenle cevap $\binom{13}{8}$ olur.

5. $m(\widehat{ABC}) = 90^\circ$ olmak üzere, ABC üçgeninin $[AB]$ kenarını çap alan çember $[AC]$ kenarını D noktasında, çembere D de teğet olan doğru da BC yi E noktasında kesiyor. $|EC| = 2$ ise, $|AC|^2 - |AE|^2$ nedir?

Cevap: 12. $[AB]$ nin orta noktası O olsun. O çemberin merkezi olacağından $|OA| = |OB| = |OD|$ ve $OD \perp DE$ dir. Yani $\angle DCE = 90^\circ - \angle OAD = 90^\circ - \angle ODA = \angle EDC$ ve buradan da $|DE| = |BE| = |EC| = 2$ olur. Pisagor teoreminden $|AC|^2 - |AE|^2 = |BC|^2 - |BE|^2 = |EC|^2 + 2|BE| \cdot |EC| = 12$ olur.

6. Kaç p asal sayısı için, $|p^4 - 86|$ sayısı da asaldır?

Cevap: 1. $p = 5$ ise, $p^4 - 86 = 539 = 7 \cdot 7 \cdot 11$. $p \neq 5$ ise, $p^4 \equiv 1 \pmod 5$ ve $p^4 - 86 \equiv 0 \pmod 5$. Buna göre, $p^4 - 86 = \pm 5$. $p^4 = 86 + 5$ durumunda çözüm gelmiyor, $p^4 = 86 - 5$ durumunda $p = 3$ olur.

7. x_1 ve x_2 sayıları $x^2 + 5x - 7 = 0$ denkleminin farklı gerçel kökleri ise, $x_1^3 + 5x_1^2 - 4x_1 + x_1^2 x_2 - 4x_2$ nedir?

Cevap: 20.
$x_1^3 + 5x_1^2 - 4x_1 + x_1^2 x_2 - 4x_2 = x_1(x_1^2 + 5x_1 - 4) + x_2(x_1^2 + 5x_1 - 4) - 5x_1x_2$
$= (x_1^2 + 5x_1 - 4)(x_1 + x_2) - 5x_1x_2 = 3(x_1 + x_2) - 5x_1x_2 = -15 + 5 \cdot 7 = 20.$

8. Pozitif tam sayılardan oluşan n elemanlı her kümenin toplamları 6 ile bölünen altı elemanı bulunabiliyorsa, n en az kaç olabilir?

Cevap: 11. 10 elemandan oluşan $\{0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1\}$ kümesinin toplamları 6 ile bölünen altı elemanı bulunmuyor. Pozitif tam sayılardan oluşan ve eleman sayısı en az 11 olan her kümede toplamları çift sayı olan bir ikili alalım. Kalan 9 elemandan toplamları çift sayı olan yeni bir ikili alalım. Kalan 7 elemandan çift sayı olan yeni bir ikili alalım. Benzer şekilde devam edersek her birinin toplamı çift sayı olan 5 ikili buluruz. Her ikilinin toplamının $\pmod 3$ deki değeri 0,1 veya 2 dir. Bu nedenle bu 5 ikiliden toplamları 3'e bölünen üçü bulunur. Bu üç ikilideki altı sayının toplamı 6 ile bölünür.

9. $m(\widehat{ADC}) = 90^\circ$ olan bir $ABCD$ dışbükey dörtgeninde D den geçen ve BC ye paralel olan doğru AB doğrusunu E noktasında kesiyor. $m(\widehat{DAC}) = m(\widehat{DAE})$, $|AB| = 3$ ve $|AC| = 4$ ise, $|AE|$ nedir?

Cevap. 1/2. $\angle DAC = \angle DAE$ olduğundan $A \in [BE]$ olmalıdır. CD ve BE doğruları F de kesişsin. $AD \perp FC$ ve $\angle FAD = \angle CAD$ olduğundan $|AF| = |AC| = 4$ ve $|FD| = |DC|$ olur. $ED \parallel BC$ olduğundan $|FE| = |BE|$ ve buradan da $|AE| = 1/2$ buluruz.

10. $0 \leq x, y, z < 2011$ olmak üzere, $xy + yz + zx \equiv 0 \pmod{2011}$ ve $x + y + z \equiv 0 \pmod{2011}$ koşullarını sağlayan kaç (x, y, z) tam sayı üçlüsü vardır?

Cevap: 4021. $z \equiv -(x+y) \pmod{2011} \Rightarrow x^2+xy+y^2 \equiv 0 \pmod{2011}$ $\Rightarrow x^3 \equiv y^3 \pmod{2011}$. 2011 asal sayı ve $3|2011-1$ olduğundan $r^3 \equiv 1 \pmod{2011}$ olacak şekilde bir $0 < r < 2011$ tam sayısı vardır. $\Rightarrow$ $y \equiv xr, xr^2 \pmod{2011}$. Benzer biçimde $z \equiv xr, xr^2 \pmod{2011}$ ve $z \equiv yr, yr^2 \pmod{2011}$ elde edilir. O zaman $y \equiv xr \pmod{2011}$ ve $z \equiv xr^2 \pmod{2011}$ veya $y \equiv xr^2 \pmod{2011}$ ve $z \equiv xr \pmod{2011}$ durumlarından biri gerçekleşir. $x = 0$ iken 1, $x \neq 0$ için 2 çözüm gelir. Toplamda çözüm sayısı $1 + 2 \cdot 2010 = 4021$ dir.

11. $x^5+x^4-4x^3-7x^2-7x-2$ polinomumun farklı gerçel köklerinin toplamı nedir?

Cevap: 0. $x^5+x^4-4x^3-7x^2-7x-2 = (x^2+x+1)(x^2-2x-1)(x+2)$ olduğundan farklı gerçel köklerinin toplamı $-2 + 2 = 0$ olur.

12. Bir okuldaki 100 öğrenciden her biri aynı okuldaki istediği 50 öğrenciye mesaj yollamıştır. Karşılıklı olarak mesajlaşmış öğrenci çiftlerinin sayısı en az kaç olabilir?

Cevap: 50. Okulda toplam $50 \cdot 99$ tane öğrenci çifti bulunuyor. Toplam mesaj sayısı $100 \cdot 50$ olduğundan karşılıklı olarak mesajlaşmış öğrenci çiftlerinin sayısı en az $5000-4950 = 50$ olacaktır. 50 için örnek verelim: çember etrafında yerleştirilmiş 100 öğrencinin her biri saat yönünde ilk 50 öğrenciye mesaj yollarsa, $k = 1, 2, \ldots, 50$ olmak üzere, sadece k ve $k + 50$ ikilileri karşılıklı olarak mesajlaşmış olur.

13. Dar açılı bir ABC üçgeninin A, B, C köşelerine ait yüksekliklerin ayakları sırasıyla, D, E, F dir. $|DF| = 3$, $|FE| = 4$, $|DE| = 5$ ise, DE ye teğet olan C merkezli çemberin yarıçapı nedir?

Cevap: 6. $\angle BAC = \alpha, \angle ABC = \beta, \angle BCA = \theta$ dersek $\angle FDE = 180° - 2\alpha$, $\angle DEF = 180° - 2\beta, \angle EFD = 180° - 2\theta$ olur. EFD üçgeni dik üçgen olduğundan $180° - 2\theta = 90°$ ve buradan da $\theta = 45°$ olur. Ayrıca $180° - 2\alpha$ ve $180° - 2\beta$ birer dar açı olduğundan 2α ve 2β geniş açılar olup $\cos 2\alpha = -3/5, \cos 2\beta = -4/5$ olmalıdır. Buradan da $2\cos^2\alpha - 1 = -3/5$ ve $2\cos^2\beta - 1 = -4/5$ elde ederiz. α ve β dar açılar olduğundan $\cos\alpha = 1/\sqrt{5}$ ve $\cos\beta = 1/\sqrt{10}$ olur. Yani $\sin\alpha = 2/\sqrt{5}$ ve $\sin\beta = 3/\sqrt{10}$ buluruz. Soruda bulunması istenen yarıçap uzunluğu C den DE doğrusuna inilen dikmenin uzunluğuna eşittir. Bu dikmenin ayağına K dersek $\angle KDC = \alpha$, $\angle KEC = \beta$ olduğu görülebilir. $|KC|/|ED| = (|KC|/|EC|) \cdot (|EC|/|ED|) = \sin\beta \cdot \sin\alpha / \sin\theta = (3/\sqrt{10}) \cdot (2/\sqrt{5}) \cdot \sqrt{2} = 6/5$ olduğundan $|KC| = 6$ olur.

14. $2011^{(2011^{(2011^{(2011^{2011})})})}$ sayısının 19 ile bölümünden kalan nedir?

Cevap: 5. Fermat Teoremi'nden dolayı $2011^{18} \equiv 1 \pmod{19}$ dur. O halde $2011^{(2011^{(2011^{2011})})}$ sayısının 18 ile bölümünden kalanı bulmalıyız. Bu sayı bir tek sayıdır. $2011 \equiv 4 \pmod 9$, $4^3 \equiv 1 \pmod 9$ ve $2011^{(2011^{2011})} \equiv 1 \pmod 3$ olduğundan

$$2011^{(2011^{(2011^{2011})})} \equiv 4 \pmod 9$$

elde edilir. Demek ki bu sayı $\pmod{18}$'de 13'e denktir. O zaman

$$2011^{(2011^{(2011^{(2011^{2011})})})} \equiv 2011^{13} \equiv 16^{13} = 2^{52} = (2^{18})^3 \cdot 2^{-2} \equiv 5 \pmod{19}.$$

15. Aşağıdaki (a, b) ikililerinden hangisi için, $x + 2y < a$ ve $xy > b$ eşitsizliklerini sağlayan hiçbir (x, y) pozitif gerçel sayı ikilisi yoktur?

a) $\left(\frac{15}{7}, \frac{4}{7}\right)$ b) $\left(\frac{18}{11}, \frac{1}{3}\right)$ c) $\left(\frac{5}{7}, \frac{1}{16}\right)$ d) $\left(\frac{6}{7}, \frac{1}{11}\right)$ e) Hiçbiri

Cevap: Hiçbiri. Verilmiş eşitsizliklerden $\frac{b}{y} < x < a - 2y$ ve buradan da $2y^2 - ay + b < 0$ elde ederiz. Çözümün olmaması için $a^2 < 8b$ olması gerekiyor. Yukarıdaki (a, b) ikililerinden hiçbiri bu koşulu sağlamıyor.

16. Ağırlıkları pozitif tam sayılar olan herhangi 2011 taş, biri diğerinin iki katı ağırlıkta iki taş içermeyen n öbeğe ayrılabiliyorsa, n en az kaç olabilir?

Cevap: 2. Eşit ağırlıklı taşları aynı altkümelere koyacağız. En hafif taşın ağırlığı a olsun. Ağırlıkları $a, 2a, 4a, 8a, ...$ olan taşları birinci gruba koyalım. Kalan taşlardan en hafif taşın ağırlığı b olsun. Ağırlıkları $b, 2b, 4b, 8b, ...$ olan taşları ikinci gruba koyalım. Benzer şekilde devam ederek taşları birbirinden ayrık gruplara ayıralım. Her gruptaki taşları en hafif taştan başlayarak beyaz-siyah-beyaz-... boyayıp beyazları birinci altkümeye, siyahları da ikinci altkümeye yerleştirirsek sorudaki koşullar sağlanmış olacaktır.

17. ABC eşkenar üçgeninin iç bölgesindeki bir D noktası için, $|AD| = \sqrt{2}$, $|BD| = 3$ ve $|CD| = \sqrt{5}$ ise, $m(\widehat{ADB})$ nedir?

Cevap: $105°$. AB doğrusuna göre C ile farklı tarafta bir E noktasını $\triangle BDE$ bir eşkenar üçgen olacak biçimde alalım. $|EB| = |BD| = 3$ ve $\angle ABE = \angle DBC$ olacağından $\triangle ABE \cong \triangle CBD$ ve buradan da $|AE| = |CD| = \sqrt{5}$ olur. ADE üçgeninde kosinüs teoreminden $\cos\angle ADE = [3^2 + (\sqrt{2})^2 - (\sqrt{5})^2]/(2 \cdot 3 \cdot \sqrt{2}) = 1/\sqrt{2}$ olur. Buradan da $\angle ADE = 45°$ ve $\angle ADB = 105°$ olur.

18. Kaç pozitif tam sayı $n(n^2-1)(n^2+3)(n^2+5)$ ifadesini n nin tüm pozitif tam sayı değerleri için böler?

Cevap: 12. $n = 2$ için ifade $2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 9 = 2 \cdot 3^3 \cdot 7$ ye eşittir. Verilen ifade her zaman bir çift sayıdır. $3|n$ ise $9|n(n^2+3)$, $3 \nmid n$ ise $3|n^2-1$ ve dolayısıyla $9|(n^2-1)(n^2+5)$. O halde ifade her zaman 9 ile bölünür. Ancak $n = 3$ için ifade 27 ile bölünmez. Bir tam kare (mod 7)'de 0,1,2 veya 4'e denk olduğundan ifade her zaman 7 ile de bölünür. Sonuç olarak ifadeyi her n için bölen sayılar $2 \cdot 3^2 \cdot 7$ sayısının pozitif bölenleridir. Bunların sayısı da $2 \cdot 3 \cdot 2 = 12$ dir.

19. Aşağıdaki eşitsizliklerden hangisinin xy-düzleminde tanımladığı bölge ile kesişimi tam olarak iki noktadan oluşan bir doğru bulunur?

a) $x^2 + y^2 \leq 1$ b) $|x + y| + |x - y| \leq 1$ c) $|x|^3 + |y|^3 \leq 1$

d) $|x| + |y| \leq 1$ e) $|x|^{1/2} + |y|^{1/2} \leq 1$

Cevap: $|x|^{1/2} + |y|^{1/2} \leq 1$ bölgesi. Bu bölgenin $x + y = 1$ doğrusu ile kesişimi $(0, 1)$ ve $(1, 0)$ noktalarından ibarettir. Diğer dört seçenekteki bölgeler ise dışbükeydir ve bir doğru ile dışbükey bir bölgenin kesişimi tek parça olmak zorundadır (yani bir nokta, bir doğru parçası, vs.). O halde diğer bölgelerden hiçbiri için o bölgeyi tam olarak iki noktada kesen bir doğru bulunamaz.

20. 100 öğrencinin girdiği bir sınavda 5 soru sorulmuş ve her soruyu tam olarak 50 öğrenci çözmüştür. Çözdüğü soru sayısı ikiyi aşmayan öğrencilerin sayısı en az kaç olabilir?

Cevap: 17. Toplam $5 \cdot 50 = 250$ soru çözülmüştür. En az 3 soru çözmüş öğrenci sayısı x oloursa, $3x \leq 250$ ve $x \leq 83$ elde ederiz. 83 için örnek verelim. Sırasıyla 16, 17, 16, 17, 17 öğrenciden oluşan A_0, A_1, A_2, A_3, A_4 gruplarının herhangi ikisinin ortak öğrencisi olmasın. $i = 1, 2, 3, 4, 5$ olmak üzere, i. soruyu A_i, A_{i+1} ve $A_{i+2} \pmod 5$ gruplarındaki tüm öğrenciler ve 1. soruyu buna ek olarak bu gruplar dışındaki herhangi bir öğrenci çözerse $x = 83$ ve cevap da $100 - 83 = 17$ olur.

21. Bir $ABCD$ eşkenar dörtgeninin iç bölgesinde yer alan bir E noktası $|AE| = |EB|$, $m(\widehat{EAB}) = 11^\circ$ ve $m(\widehat{EBC}) = 71^\circ$ koşullarını sağlıyorsa, $m(\widehat{DCE})$ nedir?

Cevap: 68°. Dörtgenin iç bölgesinde $\triangle BEF$ eşkenar üçgen olacak biçimde bir F noktası alalım. $\angle FBC = 11^\circ$ ve $|BE| = |BF|$ olacağından $\triangle ABE \cong \triangle CBF$ ve buradan da $|BF| = |FC| = |FE|$ olur. $\angle EFC = 142^\circ$ ve $\angle FCE = \angle FEC = 19^\circ$ buluruz. $\angle BCD = 180^\circ - \angle ABC = 98^\circ$ olduğundan $\angle DCE = 98^\circ - 11^\circ - 19^\circ = 68^\circ$ olur.

22. $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ ve her $n \geq 1$ için, $f(3n-1) = f(n)-1$, $f(3n) = f(n)$, $f(3n + 1) = f(n) + 1$ ise, $f(2011)$ nedir?

Cevap: 3. $f(2011) = f(670)+1 = f(223)+2 = f(74)+3 = f(25)+2 = f(8) + 3 = f(3) + 2 = f(1) + 2 = 1 + 2 = 3$.

23. xy-düzlemindeki tam sayı koordinatlı noktalardan koordinatları çarpımı 6 ile bölünenler kırmızıya, bölünmeyenler ise beyaza boyanıyor. Kenarları koordinat eksenlerine paralel çok büyük bir karenin içinde kalan tam sayı koordinatlı noktalardan beyaz olanların sayısının kırmızı olanların sayısına oranı aşağıdakilerden hangisine en yakındır?

a) $\frac{7}{5}$ b) $\frac{3}{2}$ c) 2 d) $\frac{4}{3}$ e) $\frac{5}{4}$

Cevap: $\frac{7}{5}$. Koordinatları $0 \leq x \leq 6, 0 \leq y \leq 6$ eşitlizliklerini sağlayan noktalardan tam olarak 15 tanesinin koordinatları çarpımı 6 ile bölünüyor. Bu noktalar kırmızı, kalan noktalar beyaz olacaktır. Bu noktalar için beyaz noktaların kırmızı noktalara oranı $\frac{21}{15} = \frac{7}{5}$ tir. Bu resmi periyodik olarak devam ettirerek cevabın $\frac{7}{5}$ olduğunu elde ederiz.

24. $r_1, r_2, \ldots, r_n$ renklerinde sırasıyla, $a_1, a_2, \ldots, a_n$ topun bulunduğu bir torbadan, her seferinde çekilen top torbaya geri konmak koşuluyla, birer birer rastgele n top çekildiğinde bu toplardan en az ikisinin aynı renkte olma olasılığını $p(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ ile gösterirsek, aşağıdakilerden hangisi en küçüktür?

a) $p(2,2,2,1)$ b) $p(1,1,1,1)$ c) $p(2,2,3)$ d) $p(2,2,1)$ e) $p(1,1,1)$

Cevap: $p(1,1,1)$.

$$p(2,2,2,1) = 1 - 4! \cdot \frac{1}{7} \cdot \frac{2}{7} \cdot \frac{2}{7} \cdot \frac{2}{7} = \frac{2209}{2401}$$

$$p(1,1,1,1) = 1 - \frac{4}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{29}{32}$$

$$p(2,2,3) = 1 - 3! \cdot \frac{3}{7} \cdot \frac{2}{7} \cdot \frac{2}{7} = \frac{271}{343}$$

$$p(2,2,1) = 1 - 3! \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} = \frac{101}{125}$$

$$p(1,1,1) = 1 - \frac{3}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{7}{9}$$

Buna göre en küçük olasılık $p(1,1,1)$ olur.

25. $ABCDE$ düzgün dışbükey beşgeninin alanının, kenarları AC, CE, EB, BD, DA doğruları üstünde yer alan düzgün dışbükey beşgenin alanına oranı nedir?

Cevap: $(7+3\sqrt{5})/2$. BE doğrusu AC ve AD doğrularını sırasıyla P ve Q noktalarında kessin. Küçük düzgün beşgenin bir kenarı $[PQ]$ olmalıdır. Benzerlikten bu iki beşgenin alanları oranı $|AB|^2/|PQ|^2$ ye eşittir. Açı yazarak $\angle PBA = \angle PAB = \angle PAQ = 36^\circ$ ve $\angle APQ = \angle AQP = 72^\circ$ olduğunu görebiliriz. Sinüs teoreminden $|AB|/|PQ| = (|AB|/|AP|) \cdot (|AP|/|PQ|) = (\sin 72^\circ/\sin 36^\circ) \cdot (\sin 72^\circ/\sin 36^\circ) = 4\cos^2 36^\circ = 4[(\sqrt{5}+1)/4]^2 = (3+\sqrt{5})/2$ ve buradan da $(|AB|/|PQ|)^2 = [(3+\sqrt{5})/2]^2 = (7+3\sqrt{5})/2$ olur.

26. $0 \le a < 2^{2008}$ ve $0 \le b < 8$ tam sayıları $7(a+2^{2008}b) \equiv 1 \pmod{2^{2011}}$ denkliğini sağlıyorsa, b nedir?

Cevap: 3. $2^{2008}|7a-1 \Rightarrow a = \dfrac{3\cdot 2^{2008}+1}{7}$. $\Rightarrow 3\cdot 2^{2008}+1+2^{2008}7b \equiv 1 \pmod{2^{2011}}$. $\Rightarrow 3+7b \equiv 0 \pmod 8$. $\Rightarrow b = 3$.

27. $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ gerçel sayı dizisi $a_1 = 1$, $a_3 = 4$ ve her $n \ge 2$ için, $a_{n+1}+a_{n-1} = 2a_n+1$ koşulunu sağlıyorsa, a_{2011} nedir?

Cevap: 2021056. Verilen koşul $n = 2$ için yazılırsa $a_2 = 2$ olduğu görülür. Ayrıca koşuldaki ifadenin yeniden düzenlenmesiyle $a_{n+1}-a_n = a_n-a_{n-1}+1$ bulunur. Yani bu dizinin ardışık farkları birer birer artıyor. $a_2-a_1 = 1$ olduğuna göre her n için $a_{n+1}-a_n = n$ dir. O halde $a_{n+1} = (a_{n+1}-a_n)+(a_n-a_{n-1})+\ldots+(a_2-a_1)+a_1 = n+(n-1)+\ldots+2+1+1 = \frac{n(n+1)}{2}+1$. Özel olarak $a_{2011} = 1005\cdot 2011+1 = 2021056$.

28. $1, 2, \ldots, 4022$ sayıları 2×2011 bir satranç tahtasının birim karelerine, iki sayı aynı birim karede olmamak ve ardışık olan sayılar ortak bir kenarı olan birim karelerde yer almak koşuluyla kaç farklı biçimde yerleştirilebilir?

Cevap: 8084224. Durum 1: 1 ve 4022 sayıları aynı sütundalar. Bu durumda 1 ve 4022 sayıları sadece 1. ve 2011. sütunlarda bulunabilirler ve toplam 4 yerleştirme vardır. Durum 2: 1 ve 4022 sayıları farklı sütunlardalar. 1 sayısı soldan n. sütunda olup 4022 sayısı 1 den daha sağdaysa 1 sayısının sütun komşusu $2n$ olmak zorundadır, 4022 sayısının satır numarası da tek türlü belirlenir ve tek türlü yerleştirme olur. 1 sayısı sağdan n. sütunda olup 4022 sayısı 1 den daha soldaysa 1 sayısının sütun komşusu yine $2n$ olmak zorundadır, 4022 sayısının satır numarası da tek türlü belirlenir ve tek türlü yerleştirme olur. Dolayısıyla, 1 sayısı için $2\cdot 2011$ durum ve her durumların her birinde

4022 sayısı için 2010 durum olur. Buna göre toplam yerleştirme sayısı

$$4 + 2 \cdot 2011 \cdot 2010 = 8084224$$

olur.

29. ABC üçgeninin B ve C köşelerinden geçen bir çember $[AB]$ kenarını D, $[AC]$ kenarını da E noktasında kesiyor. ACD üçgeninin çevrel çemberi ise, BE doğrusunu $[BE]$ dışındaki bir F noktasında kesiyor. $|AD| = 4$ ve $|BD| = 8$ ise, $|AF|$ nedir?

Cevap: $4\sqrt{3}$. $BDEC$ ve $AFCD$ kirişler dörtgeni olduğundan $\angle BEC = \angle BDC = \angle AFC$ ve buradan da $\angle AFE = \angle ACF$ olur. Yani $\triangle AFE \sim \triangle ACF$ ve böylece $|AF|^2 = |AE| \cdot |AC|$ olur. Çemberde kuvvetten $|AE| \cdot |AC| = |AD| \cdot |AB| = 4 \cdot 12 = 48$ olduğundan $|AF| = 4\sqrt{3}$ olur.

30. m nin hangi değeri için, $3x^2 - 10xy - 8y^2 = m^{19}$ eşitliğini sağlayan hiçbir (x, y) tam sayı ikilisi yoktur?

a) 7 b) 6 c) 5 d) 4 e) 3

Cevap: 4. $3x^2 - x(10y) - (8y^2 + m^{19}) = 0$. Bu denklemin x'e göre diskriminantı $\Delta = 196y^2 + 12m^{19}$ dur. $\Delta = 4s^2$ olmak üzere $x = \frac{10y \pm 2s}{6} = \frac{5y \pm s}{3}$. O halde s tam sayı ise, x'in bir tam sayı değer alabileceği kolayca görülür. O zaman denklemi sağlayan x ve y tam sayıları vardır ancak ve ancak $(7y)^2 + 3 \cdot m^{19} = s^2$ eşitliğini sağlayan y ve s tam sayıları vardır. $(7y)^2 + 3 \cdot m^{19} = s^2 \Leftrightarrow 3 \cdot m^{19} = (s - 7y)(s + 7y) \Leftrightarrow$ çarpımları $3 \cdot m^{19}$ olup farkları 14 ile bölünen iki tam sayı vardır. $3 \cdot 7^{19} = (3 \cdot 7^{18}) \cdot 7$, $3 \cdot 6^{19} = 3^{20} 2^{18} \cdot 2$, $3 \cdot 5^{19} = 5^{18} \cdot 15$ ve $3 \cdot 3^{19} = 3^{19} \cdot 3$ olduğundan $m = 7, 6, 5, 3$ için çözüm vardır. $m = 4$ için farzedelim ki çözüm bulunsun. O halde $a(a + 14y) = 3 \cdot 4^{19}$ olacak şekilde a ve y tam sayıları vardır. $\Rightarrow a^2 \equiv 3 \cdot 4^{19} \equiv 3 \cdot 4 \equiv 5 \pmod 7$. Ancak bir tamkare $\pmod 7$'de 5'e denk olamaz. Çelişki.

31. $i^2 + j^2 + k^2 = 2011$ koşulunu sağlayan i, j, k tam sayıları için, $i + j + k$ ifadesinin alabileceği en büyük değer nedir?

Cevap: 77. Öncelikle $(i + j + k)^2 = 3(i^2 + j^2 + k^2) - [(i - j)^2 + (i - k)^2 + (j - k)^2] \leq 3 \cdot 2011 < 78^2$, yani $i + j + k \leq 77$ olduğunu görürüz. Daha sonra $21^2 + 27^2 + 29^2 = 441 + 729 + 841 = 2011$ ve $21 + 27 + 29 = 77$ örneğini göstererek en büyük değerin 77 olduğunu ispatlamış oluruz.

32. Başlangıçta bir öbekte n taş bulunuyor. İki oyuncu sırayla hamle yapıyorlar ve her hamlede sırası gelen oyuncu istediği bir $i \geq 0$ tam sayısı için, öbekteki taşlardan 2^i tanesini alıyor. Son taşı alan oyuncu oyunu kazanıyor. Oyun $n = 1000, 2000, 2011, 3000, 4000$ değerlerinin her biri için birer kez oynanırsa, bu oyunlardan kaçını oyuna başlayan oyuncu kazanmayı garantileyebilir?

Cevap: 4. Başlayan oyuncu $n = 1, 2$ durumlarında ise kazanır, $n = 3$ durumunda ise ise kaybeder. Başlayan oyuncu $n = 4, 5$ durumlarında ilk hamlesi sonucunda taş sayısını 3 yapabildiği için bu durumlarda da kazanır. $n = 6$ durumunda ise ilk hamlesi sonucunda zorunlu olarak taş sayısını 2, 4, veya 5 yaparak oyunu kaybediyor. Benzer şekilde devam edersek oyuna başlayan oyuncunun $n = 3k$ durumlarında kaybedeceği, $n \neq 3k$ durumlarında kazanacağı görülür. Buna göre oyuna başlayan oyuncunun kazandığı durumlar $n = 1000, 2000, 2011, 4000$ dir.

33. Bir birim küreye içten ve köşeleri bu küre üstünde yer alan düzgün dörtyüzlünün bir yüzüne de dıştan teğet olan bir kürenin hacmi en çok ne olabilir?

Cevap: $4\pi/81$. Birim kürenin merkezi ile düzgün dörtyüzlünün merkezi aynı noktadır. Düzgün dörtyüzlünün köşeleri A, B, C, D ve merkez O olsun. Kürenin yarıçapı $r = 1$ ve $|AB| = |BC| = |CA| = |DA| = |DB| = |DC| = a$ olsun. $|OA| = |OB| = |OC| = |OD| = r$ dir. DO doğrusu ABC eşkenar üçgeninin diklik merkezinden geçer. Bu noktaya H diyelim. $|HO| = x$ olsun. $|CH| = a\sqrt{3}/3$ tür. $OH \perp HC$ olacağından OHC üçgeninde Pisagor teoreminden $x^2 + (a\sqrt{3}/3)^2 = r^2$ olur. HB doğrusu AC yi K noktasında kessin. $[DK]$ doğru parçası DCA eşkenar üçgeninde D köşesine ait yüksekliktir. Bu yüzden $|DK| = a\sqrt{3}/2$ dir. Ayrıca $|KH| = a\sqrt{3}/6$ dır. DHK dik üçgeninde Pisagor teoreminden $|DH| = \sqrt{(a\sqrt{3}/2)^2 - (a\sqrt{3}/6)^2} = a\sqrt{6}/3$ olur. Öte yandan $|DH| = |OH| + |OD| = x + r$ dir. Şimdi ise $r - x = (r^2 - x^2)/(r + x) = (a\sqrt{3}/3)^2/(a\sqrt{6}/3) = a\sqrt{6}/6$ ve buradan da $x = a\sqrt{6}/12$ olur. Yerine koyarsak $a = 4/\sqrt{6}$ ve $x = 1/3$ buluruz. Küçük kürenin hacmi en çok bu küre düzgün dörtyüzlünün bir yüzüne karşılık gelen eşkenar üçgenin merkezinde teğetken olur. Bu durumda ise küçük kürenin yarıçapı $(r - x)/2 = 1/3$ olacağından hacim en çok $4\pi/81$ olabilir.

34. n pozitif bir tam sayı olmak üzere, 2^n sayısının on tabanına göre yazılımında sağdan en çok kaç basamakta aynı rakam yer alabilir?

Cevap: 3. 2^{39} sayısının son üç basamağı 888 dir. Şimdi sağdan en çok üç basamakta aynı rakam olabileceğini gösterelim. $n = 1, 2, 3$ değerlerinde 2^n sayısı tek basamaklıdır. $n \geq 4$ olursa 2^n 16 ile bölünecektir. 2^n sayısının sağdan son dört basamağı $baaa$ olsun. $i \geq 4$ için 10^i sayısı 16 ile bölünüyor, bu nedenle $10^3b + 10^2a + 10a + a = 8b - a \equiv 0 \pmod{16}$. Buna göre $b \neq a$.

35. Aşağıdaki fonksiyonlar arasında pozitif gerçel sayılar kümesinde aldığı en büyük değer en küçük olan hangisidir?

a) $\dfrac{x^2}{1+x^{12}}$ b) $\dfrac{x^3}{1+x^{11}}$ c) $\dfrac{x^4}{1+x^{10}}$ d) $\dfrac{x^5}{1+x^9}$ e) $\dfrac{x^6}{1+x^8}$

Cevap: $\dfrac{x^5}{1+x^9}$. $f_i(x) = \dfrac{x^i}{1+x^{14-i}}$ diyelim. $x > 1$ için $f_5(x) < \dfrac{x^6}{1+x^9} < f_6(x)$ ve $f_5(\frac{1}{x}) = \dfrac{x^4}{1+x^9} < \dfrac{x^6}{1+x^9} < f_6(x)$ olduğu görülür. Ayrıca çok küçük pozitif ϵ için $f_5(1) = \frac{1}{2} < f_6(1+\epsilon)$ olduğundan f_5 in aldığı her değerden daha büyüğünü f_6 alır. Benzer şekilde $i = 2, 3, 4$ olmak üzere $x < 1$ için $f_5(x) < \dfrac{x^i}{1+x^9} < f_i(x)$ ve $f_5(\frac{1}{x}) = \dfrac{x^4}{1+x^9} \leq \dfrac{x^i}{1+x^9} < f_i(x)$ olduğu görülür. Yine çok küçük pozitif ϵ için $f_5(1) = \frac{1}{2} < f_i(1-\epsilon)$ olduğundan f_5 in aldığı her değerden daha büyüğünü f_i alır. Dolayısıyla f_2, f_3, f_4, f_5, f_6 arasında aldığı en büyük değer en küçük olan f_5 olmalıdır.

36. Boyları birbirinden farklı 14 öğrenci başlangıçta nasıl sıralanmış olurlarsa olsunlar, her adımda yanyana duran iki öğrencinin yerini değiştirerek en az kaç adımda öğrencileri boy sırasına sokmak mümkün olur?

Cevap: $[\binom{14}{2}/2] = 45$. A öğrencisi B öğrencisinden daha uzun olup sıralamada daha soldaysa buna 1 puan verelim. Büyükten küçüğe sıralamada toplam puan $\binom{14}{2}$ dir. Küçükten büyüğe sıralamada toplam puan 0' dır. Her hamlede toplam puan en fazla bir azalıyor ve her hamlede toplam puanı bir eksiltebiliyoruz. Buna göre büyükten küçüğe sıralamasından küçükten büyüğe sıralamasına varmak için $\binom{14}{2} = 91$

adım gerekiyor. Başlangıç sıralamasındaki toplam puan $[91/2] = 45$ olursa gereken adım sayısı en büyük değerini alır.