TÜBİTAK

Türkiye Cumhuriyeti
SANAYİ VE TEKNOLOJİ BAKANLIĞI

# MATEMATİK

17. ULUSAL
MATEMATİK OLİMPİYATI
BİRİNCİ AŞAMA SINAV
SORU VE ÇÖZÜMLERİ

## 2009

**TÜRKİYE BİLİMSEL VE TEKNOLOJİK ARAŞTIRMA KURUMU**
**BİLİM İNSANI DESTEK PROGRAMLARI BAŞKANLIĞI**

# ULUSAL MATEMATİK OLİMPİYATLARI SORU ve ÇÖZÜMLERİ

Ankara

Nisan 2019

XVII. Ulusal Matematik Olimpiyatı Birinci Aşama Sınavı **A**

**1**. $ABCD$ karesinin $[BC]$ kenarı üstünde bir $E$ noktası ve $[ED]$ üstünde bir $F$ noktası için, $|DF| = |BF|$ ve $|EF| = |BE|$ ise, $m(\widehat{DFA})$ nedir?

Cevap: $75°$. $|DF| = |BF|$ ve $|AD| = |AB|$ olduğundan $\triangle AFD \cong \triangle AFB$ dir. $\angle EFB = \angle EBF = 2\alpha$ olsun. Bu durumda $\angle FBD = \angle FDB = \alpha$ olur. $\angle EBD = 3\alpha = 45°$ olacağından $\alpha = 15°$ ve $\angle DFA = \angle BFA = 90° - \alpha = 75°$ elde ederiz.

**2**. $a^2 + b^4 = 5^n$ eşitliğini sağlayan kaç $(a, b, n)$ pozitif tam sayı üçlüsü vardır?

Cevap: Sonsuz çoklukta. $3^2 + 2^4 = 5^2$ olduğundan denklemin $k = 1, 2, \ldots$ olmak üzere, $(a, b, n) = (3 \cdot 5^{2k}, 2 \cdot 5^k, 4k + 2)$ şeklinde sonsuz çoklukta çözümü vardır.

**3**. $x = \sqrt[3]{11 + \sqrt{337}} + \sqrt[3]{11 - \sqrt{337}}$ olduğuna göre, $x^3 + 18x$ kaçtır?

Cevap: 22.

$$x^3 = 11 + \sqrt{337} + 11 - \sqrt{337}$$

$$+3\sqrt[3]{(11 + \sqrt{337})^2(11 - \sqrt{337})} + 3\sqrt[3]{(11 + \sqrt{337})(11 - \sqrt{337})^2}$$

$$= 22 - 18\sqrt[3]{(11 + \sqrt{337})} - 18\sqrt[3]{(11 - \sqrt{337})}.$$

Buna göre, $x^3 + 18x = 22$ olur.

**4**. Biri 5, diğeri 7 ile bölünebilen iki bileşik pozitif tam sayının toplamı şeklinde yazılamayan en büyük tam sayı kaçtır?

Cevap: 47. $n > 47$ olsun. $n = (n-14)+14$, $n = (n-21)+21$, $n = (n-28)+28$, $n = (n - 35) + 35$, $n = (n - 42) + 42$ ve her biri 5 den büyük olan $n - 14$, $n-21$, $n-28$, $n-35$, $n-42$ sayılarının biri 5 ile bölünüyor. Buna göre, tüm $n > 47$ sayıları biri 5, diğeri 7 ile bölünebilen iki bileşik pozitif tam sayının toplamı şeklinde yazılabilir. $47 = 7 + 40 = 14 + 34 = 21 + 26 = 28 + 19 = 35 + 12 = 42 + 5$ olduğuna göre, 47 sayısı biri 5, diğeri 7 ile bölünebilen iki bileşik pozitif tam sayının toplamı şeklinde yazılamıyor.

**5**. Bir dik üçgenin hipotenüsüne ait dış teğet çemberinin yarıçapı 30 ise, bu üçgenin çevresinin uzunluğu kaçtır?

Cevap: 60. $ABC$ dik üçgeninde $[BC]$ hipotenüsüne ait dış teğet çemberin merkezi $I_a$ ve bu çemberin $AB$ ve $AC$ doğrularına teğet olduğu noktalar sırasıyla $D$ ve $E$ olsun. $ADI_aE$ bir kare olur. Üçgenin yarı çevre uzunluğu $u$ olmak üzere $|AE| = |AD| = u$ olduğundan $u = 30$ ve buradan da çevre uzunluğu 60 olur.

**6**. $a^2b + ab^2 = 2009201020092010$ eşitliğini sağlayan kaç $(a, b)$ tam sayı ikilisi vardır?

Cevap: 0. $2009201020092010 \equiv 1 \pmod 9$ olduğundan $a \not\equiv 0 \pmod 3$ ve $b \not\equiv 0 \pmod 3$. $a^2b + ab^2 \equiv ab(a + b) \not\equiv 0 \pmod 3$ olduğuna göre $a \equiv b \pmod 3$. $a \equiv b \equiv 1 \pmod 3$ olursa, $a + b \equiv 2 \pmod 3$ ve $ab(a + b) \equiv 2 \pmod 3$, çelişki. $a \equiv b \equiv 2 \pmod 3$ olursa, $ab(a+b) = (3k+2)(3n+2)(3(k+n) + 4) = 24k + 24n + 12k + 12n + 16 \equiv 7 \pmod 9$, çelişki. Çözüm yoktur.

**7**. $x^4 + 2x^3 - 8x^2 - 6x + 15$ ve $x^3 + 4x^2 - x - 10$ polinomlarının ortak olmayan gerçel köklerinin çarpımı kaçtır?

Cevap: 6. $x^4+2x^3-8x^2-6x+15 = (x^2-3)(x^2+2x-5)$ ve $x^3+4x^2-x-10 = (x + 2)(x^2 + 2x - 5)$ olduğuna göre bu iki polinomun ortak olmayan gerçel köklerinin çarpımı $(-2) \cdot \sqrt{3} \cdot (-\sqrt{3}) = 6$ olur.

**8**. $\{1, 2, \ldots, n\}$ kümesi iki altkümeye nasıl ayrılırsa ayrılsın, altkümelerden en az birindeki iki farklı elemanın toplamı bir tam kare oluyorsa, $n$ en az kaçtır?

Cevap: 15. $n = 14$ olamaz: $\{1, 2, \ldots, 14\}$ kümesini $\{1, 2, 4, 6, 9, 11, 13\}$ ve $\{3, 5, 7, 8, 10, 12\}$ olarak iki altkümeye ayırırsak, koşullar sağlanmıyor. $n \neq 14$ olduğu için $n < 14$ de olamaz. Şimdi de $n \geq 15$ durumunda en az bir altkümedeki iki farklı elemanın toplamının bir tam kare olduğunu gösterelim. 1 ve 3 aynı alt kümede olursa, $1 + 3 = 2^2$, 1 ve 15 aynı alt kümede olursa, $1 + 15 = 4^2$. 1 ve 3 farklı alt kümelerde olsun. O zaman 3 ve 15 aynı alt kümede olacaktır. 6 da aynı alt kümede olursa, $3 + 6 = 3^2$ olur. Benzer şekilde 10 da aynı alt kümede olursa, $10 + 15 = 5^2$ olur. Fakat 6 ve 10 aynı alt kümede olursa, $6 + 10 = 4^2$ olacaktır. İspat tamamlanmıştır.

**9**. Dışbükey bir $ABCD$ dörtgeninin köşegenlerinin kesişim noktası $E$ olmak üzere, $AEB, BEC, CED$ ve $DEA$ üçgenlerinin çevre uzunlukları birbirlerine eşittir. $AEB, BEC$ ve $CED$ üçgenlerinin iç teğet çemberlerinin yarıçapları sırasıyla, 3, 4 ve 6 ise, $DEA$ üçgeninin iç teğet çemberinin yarıçapı kaçtır?

Cevap: 9/2. Bir üçgenin alanı, çevre uzunluğunun yarısı ile iç teğet çemberinin yarıçapının çarpımına eşittir. Soruda verilen dört üçgenin çevre uzunlukları eşit olduğundan bu üçgenlerin alanları iç teğet çember yarıçap uzunluklarıyla orantılıdır. $DEA$ üçgeninin iç teğet çember yarıçapına $x$ dersek $\text{Alan}(DEA)/\text{Alan}(AEB) = x/3$ ve $\text{Alan}(CED)/\text{Alan}(BEC) = 6/4$ olur. Öte yandan $\text{Alan}(DEA)/\text{Alan}(AEB) = |ED|/|EB| = \text{Alan}(CED)/\text{Alan}(BEC)$ olacağından $x/3 = 6/4$ ve $x = 9/2$ elde ederiz.

**10**. $n$ tam sayısının kaç farklı değeri için $n^4 + 4n^3 + 3n^2 - 2n + 7$ sayısı asaldır?

Cevap: 4. Öncelikle $n^4 + 4n^3 + 3n^2 - 2n + 7 = (n^2 - n + 1)(n^2 + 5n + 7)$ olduğu görülebilir. Buradan,

- $n^2 - n + 1 = 1$ ise, $n = 1$ veya $n = 0$ olabilir. $n = 1$ için verilen ifade 13 e, $n = 0$ için verilen ifade 7 ye eşittir.
- $n^2 - n + 1 = -1$ ise, $n^2 - n + 2 = 0$ olmalıdır, bu denklemin tam sayı çözümü yoktur.
- $n^2 + 5n + 7 = 1$ ise, $n = -2$ veya $n = -3$ olabilir. $n = -2$ için verilen ifade 7 ye, $n = -3$ ise verilen ifade 13 e eşittir.
- $n^2 + 5n + 7 = -1$ ise, $n^2 + 5n + 8 = 0$ olmalıdır, bu denklemin tam sayı çözümü yoktur.

Sonuç olarak, $n = 0, 1, -2, -3$ olabilir.

**11**. Her $n$ pozitif tam sayısı için, $a_n \neq 0$ ve $a_n a_{n+3} = a_{n+2} a_{n+5}$ koşullarını sağlayan bir $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ gerçel sayı dizisinde $a_1a_2 + a_3a_4 + a_5a_6 = 6$ ise, $a_1a_2 + a_3a_4 + \cdots + a_{41}a_{42}$ toplamı kaçtır?

Cevap: 42. $a_n a_{n+3} = a_{n+2} a_{n+5}$ eşitliğini $n = k$, n=$k$+1 ve $n = k$+2 için yazıp bu üç eşitliği taraf tarafa çarparsak, her $k = 1, 2 \ldots$ için $a_k a_{k+1} = a_{k+6} a_{k+7}$ elde ederiz. Buna göre,

$$a_1a_2 + a_3a_4 + \cdots + a_{41}a_{42} = 7(a_1a_2 + a_3a_4 + a_5a_6) = 7 \cdot 6 = 42.$$

**12**. Tam olarak yedi farklı rakamın kullanıldığı kaç tane sekiz basamaklı sayı vardır?

Cevap: $\binom{9}{3}^2 \cdot 6! \cdot 3$. Sekiz basamaklı sayının soldan ilk basamağını ve kalan yedi basamakta geçen 6 rakamı belirleyelim: $\binom{9}{1}\binom{9}{6}$. İki kez kullanılan rakam solda ilk basamaktaki rakamla aynı olur veya aynı olmaz. Buna göre cevap

$$\binom{9}{1}\binom{9}{6}\left(\binom{7}{1}\cdot 6! + \binom{6}{1}\cdot\frac{7!}{2!}\right) = \binom{9}{3}^2 \cdot 6! \cdot 3 \quad \text{olur.}$$

**13**. $AB//CD$ ve $m(\widehat{CAB}) < 90^o$ olan $ABCD$ yamuğunda , $|AB| = 5$, $|CD| = 3$ ve $|AC| = 15$ ise, $|BD|$ nin alabileceği farklı tam sayı değerlerin toplamı nedir?

Cevap: 108. $C$ noktasından geçen ve $BD$ ye paralel olan doğru $AB$ doğrusunu $E$ de kessin. $DCEB$ paralelkenar olacağından $|BE| = |CD| = 3$ ve $|BD| = |CE|$ olur. $CAE$ üçgeninde $A$ açısı dar açı olduğundan $|CE|^2 < |AC|^2 + |AE|^2 = 15^2 + 8^2 = 17^2$ ve buradan da $|CE| < 17$ olur. Üçgen eşitsizliğinden $|CE| > |AC| - |AE| = 7$ dir. Yani $7 < |CE| = |BD| < 17$ dir. Bu aralıktaki tüm tam sayı değerleri için $\angle CAB$ dar açı olacağından soruda verilen şartları sağlayan bir yamuk çizilebilir. Cevap $8 + 9 + \cdots + 16 = 108$ olur.

**14**. Kaç $(m, n)$ pozitif tam sayı ikilisi için, $2008 \cdot 2009 \cdot 2010$ sayısı $mn$ ile bölünür?

Cevap: $2 \cdot 3^7 \cdot 5$. $2008 \cdot 2009 \cdot 2010 = 2^4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7^2 \cdot 41 \cdot 67 \cdot 251$. $p$ bir asal sayı olmak üzere, $2008 \cdot 2009 \cdot 2010$ çarpımında $p$ nin en büyük kuvveti $k$ olsun. $m = p^x.a, n = p^y b, p \nmid a$ ve $p \nmid b$ ise, $x + y \leq k$ olmalı. Dolayısıyla toplam seçenek sayısı $x + y + z = k$ denkleminin negatif olmayan tam sayılarda çözüm sayısı, dolayısıyla $\binom{3+k-1}{3-1} = \binom{2+k}{2}$ dir. Buna göre, cevap

$$\binom{6}{2}\binom{3}{2}\binom{3}{2}\binom{4}{2}\binom{3}{2}\binom{3}{2}\binom{3}{2} = 2 \cdot 3^7 \cdot 5 \quad \text{olur.}$$

**15**. $|x| + |y| = 13$ eşitliğini sağlayan $(x, y)$ gerçel sayı ikilileri için, $x^2 + 7x - 3y + y^2$ ifadesi aşağıdaki değerlerden hangisini alamaz?

a) 208 b) $15\sqrt{2}$ c) $\frac{35}{2}$ d) 37 e) Hiçbiri

Cevap: Hiçbiri. Koordinat düzleminde $(13,0)$, $(0,13)$, $(-13,0)$ ve $(-13,-13)$ noktalarının oluşturduğu kareyi düşünelim. $|x|+|y|=13$ eşitliğini sağlayan $(x,y)$ gerçel sayı ikilileri bu karenin üzerinde yer almalıdır. $x^2+7x-3y+y^2$ ifadesi ise, $\left(x+\frac{7}{2}\right)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{29}{2}$ ye eşittir. Dolayısıyla, karenin üzerinde yer alan bir $(x,y)$ noktasının $\left(\frac{-7}{2},\frac{3}{2}\right)$ noktasına uzaklığının karesinden $\frac{29}{2}$ çıkararak bulunabilir. $\left(\frac{-7}{2},\frac{3}{2}\right)$ noktasının kareye en yakın noktasının $\left(\frac{-15}{2},\frac{11}{2}\right)$, en uzak noktasının ise $(13,0)$ olduğu görülebilir. Bu noktalara olan uzaklıklarının karelerinden $\frac{29}{2}$ çıkararak ise sırasıyla $\frac{35}{2}$ ve 260 elde ederiz. Soruda verilen bütün şıklar $\left[\frac{35}{2},260\right]$ aralığında yer aldığından hepsi alınabilir.

**16**. $x+19y\equiv 0 \pmod{23}$ ve $x+y<69$ koşullarını sağlayan kaç $(x,y)$ pozitif tam sayı ikilisi vardır?

Cevap: 100. $69=3\cdot 23$ olduğuna göre, $x=23$ ve $x=46$ sayılarının her biri için $x+19y\equiv 0 \pmod{23}$ denkliğini sağlayan tam olarak iki $1\le y<69$ sayısı bulunuyor. Benzer şekilde, her $1\le x<69$, $x\neq 23,46$ için $x+19y\equiv 0 \pmod{23}$ denkliğini sağlayan tam olarak üç $1\le y<69$ sayısı bulunuyor. Sonuç olarak $x+19y\equiv 0 \pmod{23}$ ve $1\le x<69$, $1\le y<69$ koşullarını sağlayan $(x,y)$ ikililerinin sayısı $68\cdot 3-2=202$ olur. Bu ikililerden $x+y>69$, $x+y=69$ ve $x+y<69$ koşuluna uyanları sırasıyla, 1.,2. ve 3. gruba ayıralım. 1. ve 3. grupların eleman sayıları aynıdır: 1. gruptaki her $(x,y)$ ikilisine karşılık olarak 3. gruptan $(69-x,69-y)$ ikilisi gösterilebilir. 2. grupta sadece 2 ikili bulunuyor: $x+y=69$ ise, $23|69-y+19y$ ve $23|18y$. Buna göre, $y=23,46$. Demek ki, koşulları sağlayan $(x,y)$ ikili sayısı $\frac{202-2}{2}=100$ olur.

**17**. $ABC$ eşkenar üçgeninin iç bölgesindeki bir $D$ noktası, $|AD|=8$, $|BD|=13$ ve $m(\widehat{ADC})=120^o$ koşullarını sağlıyorsa $|DC|$ kaçtır?

Cevap: 15. $AC$ doğrusuna göre $B$ ile farklı tarafta kalan $DCE$ eşkenar üçgen olacak biçimde bir $E$ noktası alalım. $\angle DCB=\angle ACE$, $|CE|=|CD|$ ve $|CA|=|CB|$ olduğundan $\triangle DCB\cong\triangle ECA$ olur. Buradan da $|AE|=|BD|=13$ elde ederiz. $\angle ADE=60^\circ$ dir. $A$ noktasından $DE$ doğrusuna

çizilen dikmenin ayağı $F$ olsun. $|AF| = 4\sqrt{3}$ ve $|DF| = 4$ olur. Pisagor teoreminden $|FE| = \sqrt{169-48} = 11$ ve $|DE| = |DC| = 15$ elde ederiz.

**18**. $1 \leq n \leq 455$ ve $n^3 \equiv 1 \pmod{455}$ koşullarını sağlayan kaç $n$ tam sayısı vardır?

Cevap: 9. Öncelikle $455 = 5 \cdot 7 \cdot 13$ tür. $n^3 \equiv 1 \pmod{455}$ olması için $n^3 \equiv 1$ ( mod 5), $n^3 \equiv 1 \pmod 7$ ve $n^3 \equiv 1 \pmod{13}$ denkliklerini incelemeliyiz.

- $n^3 \equiv 1 \pmod 5$ olması için $n \equiv 1 \pmod 5$ olmalıdır.
- $n^3 \equiv 1 \pmod 7$ olması için $n \equiv 1, 2, 4 \pmod 7$ olabilir.
- $n^3 \equiv 1 \pmod{13}$ olması için $n \equiv 1, 3, 9 \pmod{13}$ olabilir.

Sonuç olarak, Çinli Kalan Teoremi'ne göre $1 \leq n \leq 455$ koşullarını sağlayan $1 \cdot 3 \cdot 3 = 9$ tane $n$ tam sayısı bulunur.

**19**. $a$ bir gerçel sayı; $x_1$ ve $x_2$, $x^2 + ax + 2 = x$ denkleminin farklı iki kökü; $x_3$ ve $x_4$ de, $(x-a)^2 + a(x-a) + 2 = x$ denkleminin farklı iki kökü olmak üzere, $x_3 - x_1 = 3(x_4 - x_2)$ ise, $x_4 - x_2$ nedir?

Cevap: $\dfrac{a}{2}$. $P(x) - x = x^2 + (a-1)x + 2$ ve $P(x-a) - x = (x-a)^2 + a(x-a) - x + 2 = x^2 - (a+1)x + 2$. O zaman $x_1 + x_2 = 1 + a$, $x_3 + x_4 = a + 1$ eşitliklerinden $(x_4 - x_2) + (x_3 - x_1) = 2a$ elde edilir. Demek ki $x_3 - x_1 = 3(x_4 - x_2)$ olduğuna göre, $4(x_4 - x_2) = 2a$ olur.

**20**. İlk rakamı tek olup, çift rakam geçen basamaklarının sayısı çift olan beş basamaklı pozitif tam sayıların sayısı $A$ ve ilk rakamı çift olup çift rakam geçen basamaklarının sayısı çift olan beş basamaklı pozitif tam sayıların sayısı $B$ ise, $A - B$ kaçtır?

Cevap: 5000. İlk rakamı tek olup, çift rakam geçen basamaklarının sayısı çift olan beş basamaklı pozitif tam sayıların sayısı

$$\binom{5}{1}\left(\binom{4}{0} + \binom{4}{2} + \binom{4}{4}\right) \cdot 5^4 = 25000,$$

ilk rakamı çift olup çift rakam geçen basamaklarının sayısı çift olan beş basamaklı pozitif tam sayıların sayısı

$$\binom{4}{1}\left(\binom{4}{1} + \binom{4}{3}\right) \cdot 5^4 = 20000$$

olur. Buna göre cevap $A - B = 5000$.

**21**. $ABC$ üçgeninde $|AB| = |AC|$ ve $m(\widehat{BAC}) = 80^o$ dir. $ABC$ üçgeninin iç bölgesindeki bir $E$ noktası, $|AE| = |EC|$ ve $m(\widehat{EAC}) = 10^o$ koşullarını sağlıyorsa, $m(\widehat{EBC})$ nedir?

Cevap: $20°$. $AEB$ üçgeninin iç bölgesinde $AFE$ eşkenar üçgen olacak biçimde bir $F$ noktası alalım. $\angle FAB = 10°$ olur. Buradan da $\triangle AFB \cong \triangle AEC$ ve böylece $|BF| = |EC| = |AE| = |AF| = |FE|$ elde ederiz. $\angle AFB = 160°$, $\angle AFE = 60°$ olduğundan $\angle BFE = 140°$ ve $\angle FEB = \angle FBE = 20°$ olur. $\angle ABE = 30°$ olacağından $\angle EBC = 20°$ elde ederiz.

**22**. Her $n \geq 0$ için, $a_{n+1} = a_n^3 + a_n^2$ koşulunu sağlayan bir $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ tam sayı dizisinin terimlerinin 11 e bölümünden kalanların oluşturduğu kümenin en çok kaç elemanı vardır?

Cevap: 3. $a_n \equiv 1 \pmod{11}$ ise $a_{n+1} \equiv 2 \pmod{11}$ ve $a_n \equiv 2 \pmod{11}$ ise $a_{n+1} \equiv 1 \pmod{11}$ olduğu görülebilir. Dolayısıyla $a_0 \equiv 1, 2 \pmod{11}$ ise en fazla 2 elemanlı bir küme elde ederiz. $B = \{0, 3, 7\}$ olmak üzere, $a_n$ sayısı 11 modunda $B$ kümesinden bir elemana denk ise, $a_{n+1} \equiv a_n \pmod{11}$ elde ederiz, bu da $a_0$ sayısının 11 modunda $B$ kümesinden bir elemana denk olması durumunda tek elemanlı bir küme elde edeceğimizi gösterir. $C = \{4, 5, 9, 10\}$ olmak üzere, $a_n$ sayısı 11 modunda $C$ kümesinden bir elemana denk ise, $a_{n+1}$ sayısı $B$ kümesinden bir elemana denk olur. Dolayısıyla $a_0$ sayısının 11 modunda $C$ kümesinden bir elemana denk olması durumunda 2 elemanlı bir küme elde ederiz. Son olarak, $a_0 \equiv 6 \pmod{11}$ olması durumunda $\{6, 10, 0\}$ ve $a_0 \equiv 8 \pmod{11}$ olması durumunda $\{8, 4, 3\}$ kümelerini elde ederiz, bu da cevabın 3 olduğunu gösterir.

**23**. $x$ bir gerçel sayı olmak üzere, $x(x+4)(x+8)(x+12)$ ifadesinin alabileceği en küçük değer nedir?

Cevap: $-256$. $s = x^2 + 12x$ olsun.

$$x(x+4)(x+8)(x+12) = (x^2 + 12x)(x^2 + 12x + 32)$$

$$= s^2 + 32s = (s+16)^2 - 256 \geq -256.$$

$x = -6 \pm \sqrt{20}$ değerlerinde $s + 16 = 0$ oluyor. Buna göre, ifadenin alabileceği en küçük değer $-256$ olur.

**24**. $xy$-düzlemine, $m$ mavi ve $k$ kırmızı dikdörtgen, kenarları eksenlere paralel olacak, eksenlerden herhangi birine paralel olan hiçbir doğru aynı renkte birden fazla dikdörtgeni kesmeyecek ve farklı renkte hangi iki dikdörtgen alınırsa alınsın, yalnızca bunları kesen ve eksenlerden birine paralel olan bir doğru bulunacak biçimde yerleştirilmişse, $(m, k)$ tam sayı ikilisi aşağıdakilerden hangisi olamaz?

a) $(1, 7)$ b) $(2, 6)$ c) $(3, 4)$ d) $(3, 3)$ e) Hiçbiri

Cevap: $(m, k)$ ikilisi $(1, 7)$, $(2, 6)$, $(3, 4)$, $(3, 3)$ değerlerinin hepsini alıyor.

Aşağıda her durum için birer örnek vereceğiz. Koordinat sisteminde köşelerinin koordinatları $(x_1, y_1)$, $(x_2, y_2)$, $(x_3, y_3)$, $(x_4, y_4)$ olan dikdörtgeni rengine göre $M((x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), (x_4, y_4))$ veya $K((x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), (x_4, y_4))$ olarak işaretleyelim.

$(1, 7)$: Mavi dikdörtgen $M((0, 0), (13, 0), (13, 1), (0, 1))$ ve $i = 0, 1, \ldots, 6$ olmak üzere, kırmızı dikdörtgenler $K_i((2i, 2i + 2), (2i + 1, 2i + 2), (2i + 1, 2i + 3), (2i, 2i + 3))$.

$(2, 6)$: Mavi dikdörtgenler $M_1((0, 0), (11, 0), (11, 1), (0, 1))$, $M_2((12, 2), (13, 2), (13, 13), (12, 13))$ ve $i = 0, 1, \ldots, 5$ olmak üzere, kırmızı dikdörtgenler $K_i((2i, 2i), (2i + 1, 2i), (2i + 1, 2i + 1), (2i, 2i + 1))$.

$(3, 4)$: Mavi dikdörtgenler $M_1((0, 0), (3, 0), (3, 3), (0, 3))$, $M_2((4, 4), (7, 4), (7, 7), (4, 7))$, $M_3((8, 8), (11, 8), (11, 11), (8, 11))$ ve kırmızı dikdörtgenler $K_1((0, 6), (1, 6), (1, 9), (0, 9))$, $K_2((2, 10), (5, 10), (5, 11), (2, 11))$, $K_3((6, 0), (9, 0), (9, 1), (6, 1))$, $K_4((10, 2), (11, 2), (11, 5), (10, 5))$.

$(3, 3)$ örneği $(3, 4)$ örneğindeki kırmızı dikdörtgenlerin herhangi birinin atılmasıyla elde ediliyor.

**25**. $ABC$ üçgeninin iç teğet çemberi, $BC$, $AC$ ve $AB$ kenarlarına sırasıyla, $A_1$,$B_1$ ve $C_1$ noktalarında teğettir. $AA_1$ doğrusu, iç teğet çemberi ikinci kez $Q$ noktasında kesiyor. $A_1C_1$ ve $A_1B_1$ doğruları, $A$ noktasından geçen ve $BC$ ye paralel olan doğruyu sırasıyla, $P$ ve $R$ noktalarında kesiyor. $m(\widehat{PQC_1}) = 45^o$ ve $m(\widehat{RQB_1}) = 65^o$ ise, $m(\widehat{PQR})$ nedir?

Cevap: $125°$. Teğet-kiriş açıdan $\angle C_1QA_1 = \angle C_1A_1B$ ve paralellikten $\angle C_1A_1B = \angle APC_1$ dir. Buradan da $\angle C_1QA_1 = \angle APC_1$ olduğundan

$APC_1Q$ kirişler dörtgenidir. Benzer şekilde $ARB_1Q$ da kirişler dörtgeni olur. Buradan da $\angle ABC = \angle C_1AP = \angle C_1QP = 45^\circ$ ve $\angle ACB = \angle B_1AR = \angle B_1QR = 65^\circ$ elde ederiz. $\angle PQR = \angle B_1QC_1 = \angle C_1A_1B + \angle B_1A_1C = 180^\circ - (\angle ABC + \angle ACB)/2 = 125^\circ$ olur.

**26**. Her $0 \leq i \leq 17$ için, $a_i$ sayısı, $-1$, 0 veya 1 olmak üzere,

$$a_0 + 2a_1 + 2^2a_2 + \cdots + 2^{17}a_{17} = 2^{10}$$

eşitliğini sağlayan kaç $(a_0, a_1, \ldots, a_{17})$ on sekizlisi vardır?

Cevap: 8. Eşitliğin sağ tarafının çift olması nedeniyle $a_0 = 0$ dır. O zaman her iki tarafı 2 ile böldükten sonra benzer şekilde $a_1 = 0$ elde ederiz. Bu şekilde devam edersek $a_0 = a_1 = \cdots = a_9 = 0$ gelir:

$$2^{10}a_{10} + 2^{11}a_{11} + 2^{12}a_{12} + \cdots + 2^{17}a_{17} = 2^{10}$$

$a_i \neq 0$ olan en büyük $i = k$ olsun:

$$2^{10}a_{10} + 2^{11}a_{11} + 2^{12}a_{12} + \cdots + 2^{k}a_{k} = 2^{10}.$$

Eşitliğin sağ tarafının pozitif olması nedeniyle $a_k = 1$ olacaktır. $k = 10$ ise, $a_{10} = 1$ ve tüm diğer katsayılar sıfır olacaktır. $k > 10$ ise, $a_{10} = a_{11} = \cdots = a_{k-1} = -1$ olmak zorundadır, sadece bu durumda

$$-2^{10} - 2^{11} - \cdots - 2^{k-1} + 2^k$$

$$= -2^{10}(1 + 2 + \cdots + 2^{k-10-1}) + 2^k = -2^{10}(2^{k-10} - 1) + 2^k = 2^{10}$$

oluyor. Demek ki, her $10 \leq k \leq 17$ değeri için sorudaki eşitliği sağlayan tek bir $(a_0, a_1, \ldots, a_{17})$ on sekizlisi bulunuyor.

**27**. $f(x) = \dfrac{x^5}{5x^4 - 10x^3 + 10x^2 - 5x + 1}$ ve, $1 \leq i \leq 2009$ için, $x_i = \dfrac{i}{2009}$ ise, $f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_{2009})$ toplamı kaçtır?

Cevap: 1005. $f(x) = \dfrac{x^5}{x^5 + (1-x)^5}$ olduğundan $f(x) + f(1-x) = 1$ olur. Sonuç olarak

$$f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_{2009}) = 1005 \cdot 1 = 1005.$$

**28**. Tüm tam sayılar kümesi, farkları asal bir sayıya eşit olan herhangi iki tam sayı aynı altkümeye düşmeyecek biçimde, $n$ altkümeye ayırılabiliyorsa, $n$ en az kaçtır?

Cevap: $n = 4$. 0, 2, 5 ve 7 sayılarından herhangi ikisi aynı altkümenin elemanı olamazlar. Buna göre, $n$ sayısı 4 ten daha küçük olamaz. $i = 1, 2, 3, 4$ olmak üzere, $n \equiv i \pmod 4$ koşulunu sağlayan $n$ tam sayılarını $i$. altkümeye yerleştirirsek koşullar sağlanmış olacaktır.

**29**. $ABCD$ kirişler dörtgeninin $[AC]$ ve $[BD]$ köşegenleri, $P$ noktasında kesişiyor. $APB$ ve $CPD$ üçgenlerinin çevrel çemberlerinin merkezleri, $ABCD$ dörtgeninin çevrel çemberi üstünde ve $|AC| + |BD| = 18$ ise, $ABCD$ dörtgeninin alanı nedir?

Cevap: $81\sqrt{3}/4$. $APB$ ve $CPD$ üçgenlerinin çevrel çember merkezleri sırasıyla $O_1$ ve $O_2$ olsun. $\angle APB = \alpha$ dersek $\angle AO_1B = \angle DO_2C = 360° - 2\alpha$ olur. Çemberdeşlikten $\angle ACB = \angle CBD = 2\alpha - 180°$ olur. $\angle ACB + \angle CBD = \angle APB$ olduğundan $4\alpha - 360° = \alpha$ ve buradan da $\alpha = 120°$ elde ederiz. $PBC$ ve benzer şekilde $PAD$ eşkenar üçgen olacağından $|PC| = |PB|$ ve $|PA| = |PD|$ olur. Yani $|AC| = |BD| = 9$ olmalıdır. $ABCD$ dörtgeninin alanı ise $9 \cdot 9 \cdot \sin 120°/2 = 81\sqrt{3}/4$ e eşittir.

**30**. $11^2 + 13^2 + 17^2$, $24^2 + 25^2 + 26^2$, $12^2 + 24^2 + 36^2$, $11^2 + 12^2 + 132^2$ sayılarından kaçı bir tam sayının karesine eşittir?

Cevap: 1.

$11^2 + 13^2 + 17^2 \equiv 3 \pmod 4$, bir tam kare olamaz.
$24^2 + 25^2 + 26^2 \equiv 2 \pmod 3$, bir tam kare olamaz.
$12^2 + 24^2 + 36^2 = 12^2(1 + 4 + 39) = 12^2 \cdot 14$, bir tam kare değildir.
$11^2 + 12^2 + 132^2 = 11^2 + 12^2 + (11 \cdot 12)^2 = (11 \cdot 12 + 1)^2$, bir tam karedir.

**31**. $|x^3 + 3x^2 - 33x - 3| \geq 2x^2$ eşitsizliğini, $|x| \geq n$ koşulunu sağlayan her $x$ gerçel sayısı için doğru kılan $n$ tam sayısının alabileceği en küçük değer nedir?

Cevap: 9. $x = -8$ ise, $|(-8)^3 + 3 \cdot (-8)^2 - 33 \cdot (-8) - 3| = 59$ ve $2 \cdot (-8)^2 = 128$, eşitsizlik sağlanmıyor. Fakat $|x| \geq 9$ olursa,

$$\frac{|x^3+3x^2-33x-3|}{x^2} = |x+3-\frac{33}{x}-\frac{3}{x^2}|$$
$$\geq |x| - |3-\frac{33}{x}-\frac{3}{x^2}| \geq 9-3-\frac{33}{9}-\frac{3}{81} \geq 2.$$

**32**. Her biri dört elemanlı $n$ kümeden, hangi farklı ikisini alırsak alalım, bu iki kümeden yalnızca birine ait olan tüm elemanlardan oluşan küme, başlangıçdaki $n$ kümeden birine eşitse, $n$ en çok kaçtır?

Cevap: 7. Kümeler $K_1, K_2, \ldots, K_n$ olsun. Koşullara göre, her $i \neq j$ ikilisi için $|K_i \cap K_j| = 2$ olmalıdır. $i \neq 1, j \neq 1, i \neq j$ olmak üzere, bir $(i,j)$ ikiilisi için $K_1 \cap K_i = K_1 \cap K_j$ olursa, $K_1$ ve $K_i$ kümelerinin yalnızca birine ait olan tüm elemanlardan oluşan küme ile $K_j$ kümesinin ortak elemanı olmayacaktır, çelişki. Demek ki $n$ en fazla $1+\binom{4}{2} = 7$ olabilir. $n = 7$ için örnek verelim:

$K_1 = \{1,2,3,4\}$, $K_2 = \{3,4,5,6\}$, $K_3 = \{1,2,5,6\}$, $K_4 = \{2,3,6,7\}$, $K_5 = \{1,4,6,7\}$, $K_6 = \{1,3,5,7\}$, $K_7 = \{2,4,5,7\}$.

**33**. $ABC$ üçgeninin $[AL]$ ve $[BM]$ kenarortayları $K$ noktasında kesişiyor. $C$, $K$, $L$, $M$ noktaları çembersel ve $|AB| = \sqrt{3}$ ise, $[CN]$ kenarortayının uzunluğu nedir?

Cevap: 3/2. $K$ noktası ağırlık merkezi olduğundan $|AK| = 2|KL|$ dir. Çemberde kuvvetten $|AK| \cdot |AL| = |AM| \cdot |AC|$ ve buradan da $|AL|^2 = 3|AK| \cdot |AL|/2 = 3|AC|^2/4$ olur. $|BC| = a$, $|CA| = b$, $|AB| = c = \sqrt{3}$ olsun. Üçgende kenarortay teoreminden $3b^2/4 = |AL|^2 = (b^2+c^2)/2 - a^2/4$ ve buradan da $a^2+b^2 = 2c^2$ olur. Yine kenarortay teoreminden $|CN|^2 = (a^2+b^2)/2 - c^2/4 = c^2 - c^2/4 = 3c^2/4 = 9/4$ olduğundan $|CN| = 3/2$ elde ederiz.

**34**. $x$ ve $y$ farklı pozitif tam sayılar olmak üzere, $(x+y^2)(x^2-y)/(xy)$ ifadesinin alabileceği en küçük pozitif tam sayı değer nedir?

Cevap: 14. $x$ ve $y$ sayılarının en büyük ortak böleni $d$ olsun: $x = dx_0$, $y = dy_0$, $(x_0, y_0) = 1$. O zaman

$$\frac{(x+y^2)(x^2-y)}{xy} = \frac{(x_0+dy_0^2)(dx_0^2-y_0)}{x_0y_0}$$

olur. Buna göre, $x_0|d$, $y_0|d$ ve dolayısıyla, $d = kx_0y_0$. Buradan

$$\frac{(x+y^2)(x^2-y)}{xy} = (1+ky_0^3)(kx_0^3-1)$$

gelir. $x_0 \neq y_0$ olduğuna göre, $(1+ky_0^3)(kx_0^3-1)$ ifadesinin alabileceği en küçük değer $k=1, x_0=2, y_0=1$ durumunda elde edilir, cevap 14.

**35**. Her $n \geq 2$ için, $a_n = \sqrt[3]{n^3+n^2-n-1}/n$ ise, $a_2a_3\cdots a_k > 3$ eşitsizliğinin sağlanması için $k$ pozitif tam sayısının en az kaç olması gerekir?

Cevap: 106. $b_n = a_n^3 = \dfrac{n^3+n^2-n-1}{n^3}$ olsun. $b_2b_3\cdots b_k > 27$ eşitsizliğinin sağlayan en küçük $k$ pozitif tam sayısını bulmamız gerekiyor.

$$b_n = \frac{n^2(n+1)-(n+1)}{n^3} = \frac{(n-1)(n+1)^2}{n^3}$$

olduğuna göre,

$$b_2b_3\cdots b_k = \frac{1\cdot 3^2}{2^3}\cdot\frac{2\cdot 4^2}{3^3}\cdots\frac{(k-2)k^2}{(k-1)^3}\cdot\frac{(k-1)(k+1)^2}{(k)^3} = \frac{(k+1)^2}{4k}$$

Buradan $(k+1)^2 - 4k\cdot 27 > 0$ ve $k(k-106) \geq 0$ gelir. Sonuç olarak eşitsizliğinin sağlanması için $k$ pozitif tam sayısının alabileceği en küçük değer 106 olur.

**36**. Yüz kenti olan bir ülkedeki bazı kentler arasında yapılan tek yönlü uçak seferleri, başkentten başlayıp, ülkedeki her kentten en az bir kez geçerek, yeniden başkente dönmeyi mümkün kılan en az bir sefer dizisi bulunacak biçimde düzenlenmiştir. Böyle bir düzenlemede, bu şekildeki uçak seferi dizilerinden sefer sayısı en az olanın sefer sayısı, bütün bu tür düzenlemeler arasında en çok kaç olabilir?

Cevap: 2550.

Kentler $A_1, \ldots, A_{100}$ olmak üzere, uçuşlar:

her $i = 1, \ldots, 49$ için $A_i$ den $A_{i+1}$ e

her $i = 51, \ldots, 100$ için $A_{50}$ den $A_i$ ye

her $i = 51, \ldots, 100$ için $A_i$ den $A_1$ e

düzenlenmiş olsun. Bu durumda her kente en az bir kez uğrayan ve en az uçuş içeren kapalı güzergah en az $51 \cdot 50 = 2550$ uçak seferi içermektedir.

Şimdi ise başkentten başlayıp, ülkedeki her kentten en az bir kez geçerek, yeniden başkente dönmeyi mümkün kılan her uçuş düzenlemesinde her kente en az bir kez uğrayan ve en az uçak seferi içeren kapalı güzergahın en fazla 2550 uçak seferi içerdiğini gösterelim. Her $A_i$ ve $A_j$ kent ikilisi için $A_j$ den $A_i$ ye varmak için yapılması gereken en az uçuş sayısı $d(A_i, A_j)$ olmak üzere, $max_{i,j} d(A_i, A_j) = d(A_l, A_m) = p$ olsun. $p$ uçuş içeren $A_l \to A_m$ güzergahı, $A_l$ den $A_m$ ye en kısa güzergah olduğundan $A_l$ dışında $p$ farklı kent içeriyor. $A_m$ den bu $p$ kentten farklı yeni bir kente en fazla $p$ uçuş kullanarak gidilebiliyor. Daha sonra tüm kalan kentlere her yeni kent için en fazla $p$ uçuş kullanarak birer birer uğrarsak her kente en az bir kez uğrayan ve en az uçuş içeren kapalı güzergahın toplam uçuş sayısı en fazla

$$p + p(100 - p) = p(101 - p) \leq \frac{(101 - p + p)^2}{4} = 2550.25$$

olacaktır.