TÜBİTAK

Türkiye Cumhuriyeti
SANAYİ VE TEKNOLOJİ BAKANLIĞI

MATEMATİK

18. ULUSAL
MATEMATİK OLİMPİYATI
BİRİNCİ AŞAMA SINAV
SORU VE ÇÖZÜMLERİ

2010

TÜRKİYE BİLİMSEL VE TEKNOLOJİK ARAŞTIRMA KURUMU
BİLİM İNSANI DESTEK PROGRAMLARI BAŞKANLIĞI

ULUSAL MATEMATİK OLİMPİYATLARI SORU ve ÇÖZÜMLERİ

Ankara

Nisan 2019

1. Bir ABC eşkenar üçgeninin iç bölgesindeki bir D noktası için $m(\widehat{BAD}) = m(\widehat{ABD}) = 5^o$ ve dış bölgesindeki bir E noktası için de, $m(\widehat{CAE}) = m(\widehat{ACE}) = 5^o$ ise, $m(\widehat{EDC})$ kaçtır?

Cevap: $35°$. $\triangle ABD \sim \triangle ACE$ ve $|AB| = |AC|$ olduğundan $\triangle ABD \cong \triangle ACE$ ve buradan da $|AD| = |AE|$ olur. $\angle DAE = \angle BAC = 60°$ olduğundan ADE eşkenar üçgendir. Buradan da $\angle AED = 60°$ ve $\angle DEC = 110°$ elde ederiz. Ayrıca $|ED| = |EA| = |EC|$ olur. $|ED| = |EC|$ olduğundan $\angle EDC = 35°$ olur.

2. $y^2 - x^2 = 2y + 7x + 4$ eşitliğini sağlayan kaç (x, y) pozitif tam sayı ikilisi vardır?

Cevap: 1. Verilen ifade 4 ile çarpıldığında $(2y - 2)^2 - (2x + 7)^2 = -29 = (2y - 2x - 9)(2y + 2x + 5)$ olarak yazılabilir. x ve y pozitif tam sayılar olduğundan $(2y + 2x + 5, 2y - 2x - 9)$ ikilisi $(29, -1)$ veya $(1, -29)$ olabilir. $(2y + 2x + 5) - (2y - 2x - 9) = 4x + 14$ olduğundan $x = 4$ gelir. $(2y + 2x + 5) + (2y - 2x - 9) = 4y - 4 \geq 0$ olduğundan yalnızca $y = 8$ bulunur. Tek çözüm $(4, 8)$ dir.

3.
$$\begin{aligned} x^2 + 2y &= 2xy \\ x^3 + x^2y &= y^2 \end{aligned}$$

denklem sistemini sağlayan kaç (x, y) gerçel sayı ikilisi vardır?

Cevap: 3. Birinci denklemdeki $y = \dfrac{x^2}{2x - 2}$ ifadesini ikinci denkleme yazarsak

$$x^3 + x^2 \cdot \frac{x^2}{2x - 2} = (\frac{x^2}{2x - 2)^2})^2$$

elde ederiz. Buradan $x = 0$ çözümü gelir. $x \neq 0$ durumunda ise $6x^2 - 11x + 4 = 0$ olur ve $x = 1/2$, $x = 4/3$ çözümleri gelir. Çözümler denklem sistemi sağlıyor.

4. Rakamlarının faktöriyellerinin toplamı kendisine eşit olan 2010 dan küçük kaç pozitif tam sayı vardır?

Cevap: 3. Tek basamaklı sayılardan sadece 1 ve 2 koşulları sağlıyorlar. $5! = 120$ olduğundan koşulu sağlayan iki basamaklı sayıların rakamları sadece 1,2,3,4 olacaktır. Fakat 11,12,13,14,21,22,23,24,31,32,33,34,41,42,42,44 sayılarının hiçbiri

koşulu sağlamıyor. $7! = 5040$ olduğundan koşulu sağlayan üç basamaklı sayıların rakamları 6'dan büyük olamazlar. $6! = 720 > 666$ olduğundan üç basamaklı sayıların rakamları 5'den büyük olamazlar. O zaman sayı en fazla 555 olur ve $3 \cdot 5! = 360$ olduğundan üç basamaklı sayı en fazla 360 olur. O zaman ilk basamak en fazla 3 olur. $3! + 5! + 5! = 246 < 300$ olduğundan ilk basamak 3 olamaz. İlk basamak 2 olsun. $2! + 5! + 5! = 242 < 255$ olduğundan bu sayı 255 değil. Diğer durumlarda $2! + 4! + 5! < 200$ olduğundan çelişki gelir. İlk basamak 1 olsun. $1! + 4! + 4! < 100$ olduğundan sadece 145,154 ve 155 sayılarını denemeliyiz. Bu sayılardan koşulları sadece 145 sağlıyor: $1! + 4! + 5! = 145$. Şimdi $[1000, 2010]$ aralığındaki sayıları inceleyelim. $7! = 5040$ olduğundan bu sayıların basamakları 7'den büyük olamazlar. Bu sayılarda 6 rakamı bulunmuyorsa $2! + 5! + 5! + 5! < 999$ olduğundan çelişki gelir. 6 rakamı sadece bir basamakta bulunuyorsa $2! + 5! + 5! + 6! < 1000$ olduğundan çelişki gelir. 6 rakamı iki basamakta bulunsun. $2! + 5! + 6! + 6! < 2000$ olduğundan ilk basamak 1 olmak zorundadır. $1 + 3! + 6! + 6! > 1400$ olduğundan ikinci basamak 4'den küçük olamaz. İkinci basamak 4 olamaz: $1! + 4! + 6! + 6! = 1465 \neq 1466$. İkinci basamak 5 olamaz: $1! + 5! + 6! + 6! = 1561 \neq 1666$. İkinci basamak 6 olamaz: $1! + 6! + 5! + 6! < 1600$. Son olarak 6 rakamı üç basamakta bulunursa $6! + 6! + 6! > 2010$ çelişkisi gelir. Çozümler: $1, 2, 145$.

5. Dışbükey bir $ABCD$ dörtgeninde, $|AB| = 10$, $|CD| = 3\sqrt{6}$, $m(\widehat{ABD}) = 60^o$, $m(\widehat{BDC}) = 45^o$, $|BD| = 13 + 3\sqrt{3}$ ise, $|AC|$ kaçtır?

Cevap: 16. $[BD]$ üzerinde $|BE| = 13$, $|DE| = 3\sqrt{3}$ olacak biçimde bir E noktası alalım. CDE üçgeninde kosinüs teoreminden $|CE| = 3\sqrt{3}$ olur. Buradan da $\angle CED = 90^\circ$ elde ederiz. BEC üçgeninde Pisagor teoreminden $|BC| = 14$ buluruz. $\angle EBC = \alpha$ olmak üzere $\cos\alpha = 13/14$ ve $\sin\alpha = 3\sqrt{3}/14$ eşitliklerini kullanarak $\cos(\alpha + 60^\circ) = \cos\alpha\cos 60^\circ - \sin\alpha\sin 60^\circ = 1/7$ olur. Son olarak ABC üçgeninde kosinüs teoremini kullanarak $|AC| = 16$ elde ederiz.

6. $2011y^2 = 2010x + 3$ eşitliğini sağlayan kaç (x, y) tam sayı ikilisi vardır?

Cevap: 0. Eşitlik (mod 5) te incelendiğinde $y^2 \equiv 3 \pmod 5$ elde edilir. Ancak bir tamkare 5 ile bölündüğünde sadece $0, 1$ veya 4 kalanını verebilir.

7. r metre yarıçaplı daire biçiminde bir adacığın merkezinde duran bir kurbağa 1/2 metrelik bir atlayışla başlayıp, her seferinde 90° sağa veya sola dönerek bir öncekinin yarısı uzunluğunda bir atlayış yapıyor. Sonlu sayıda atlayışta kurbağanın suya varamamasını sağlayan en küçük r değeri nedir?

Cevap: $\dfrac{\sqrt{5}}{3}$. Kurbağanın ilk atlayış yönünü x ekseni kabul eden ve orjini adacığın merkezi olan koordinat sistemini ele alalım. Kurbağa $n.$ atlayışında n tekse x eksenine, n çiftse y eksenine paralel hareket edeccektir. Dolayısıyla kurbağanın x koordinatının mutlak değeri en fazla $\frac{1}{2}+\frac{1}{8}+\frac{1}{32}+\cdots=\frac{2}{3}$, y koordinatının mutlak değeri ise en fazla $\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+\cdots=\frac{1}{3}$ olabilir. O halde kurbağanın merkeze uzaklığı $\sqrt{(\frac{2}{3})^2+(\frac{1}{3})^2}=\sqrt{5}/3$ sayısından her zaman küçüktür ve bu sayıdan küçük olan herhangi bir sayıdan daha büyük olabilir.

8. İlk 2010 pozitif tam sayının rakamlarının toplamı kaçtır?

Cevap: 28068. 0 ve 1999, 1 ve 1998, 2 ve 1997, ... , 999 ve 1000 sayı ikililerinin her birinin rakamlarının toplamı 28 dir. $2000, 2001, \ldots, 2010$ sayılaı̊nın rakamlarının toplamı ise 68 dir. Buna göre cevap $1000 \cdot 28 + 66 = 28068$ olur.

9. Bir $ABCD$ karesinin dışındaki bir E noktasının AC doğrusuna uzaklığı 6, BD doğrusuna uzaklığı da 17 birimdir. E noktasının karenin en yakın köşesine uzaklığı 10 birim ise, karenin alanı nedir?

Cevap: 162. E noktasından AC ve BD doğrularına çizilen dikme ayakları sırasıyla K ve L olsun. Karenin köşegenleri F de kesişsin. $EKFL$ bir dikdörtgen olduğundan $|KF| = |EL| = 17$ dir. $|EB|$ ve $|ED|$ en az 17 birim olacağından E ye en yakın köşe A ve C den biridir. Genelliği bozmadan C kabul edelim, $|EC| = 10$ olur. $|EK| = 6$ olduğundan Pisagor teoreminden $|KC| = 8$ ve buradan da $|CF| = 9$ olur. Yani karenin kenar uzunluğu $9\sqrt{2}$ ve alanı 162 olur.

10. $0 \leq n < 840$ koşulunu sağlayan kaç tam sayı için, $n^8 - n^4 + n - 1$ sayısı 840 ile bölünür?

Cevap: 2. $840 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$. $n^8 - n^4 + n - 1$ sayısı 840 ile bölünsün. O halde n sayısı 2,3,5,7 sayılarından hiçbiri ile bölünmez. $\Rightarrow n^2 \equiv 1 \pmod 8 \Rightarrow n^8 - n^4 + n - 1 \equiv 1 - 1 + n - 1 \equiv n - 1$

(mod 8) $\Rightarrow n \equiv 1 \pmod 8$. Fermat teoreminden $n^2 \equiv 1 \pmod 3$ ve $n^4 \equiv 1 \pmod 5$ olduğundan benzer biçimde $n \equiv 1 \pmod 3$ ve $n \equiv 1 \pmod 5$ elde edilir. Fermat teoreminden $n^6 \equiv 1 \pmod 7$ olduğundan $n^8 - n^4 + n - 1 \equiv n^2 - n^4 + n - 1 \equiv (n-1)(1 - n^2 - n^3) \equiv 0 \pmod 7$ bulunur. O halde $n \equiv 1, 3 \pmod 7$. Çinli Kalan Teoremi'ne göre verilen aralıkta $1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 2 = 2$ çözüm vardır.

11. xy-düzleminde $(\sqrt{20}, \sqrt{10})$ merkezli bir çemberin üstünde koordinatları tam sayı olan en çok kaç tane nokta bulunabilir?

Cevap: 1. En az 1 nokta bulunabileceği açıktır. (a, b) ve (c, d) koordinatları tam sayı olan iki nokta nokta olsun. O zaman

$$(a - \sqrt{20})^2 + (b - \sqrt{10})^2 = (c - \sqrt{20})^2 + (d - \sqrt{10})^2$$

vu buradan da

$$2(c - a)\sqrt{20} + 2(d - b)\sqrt{10} = c^2 + d^2 - a^2 - b^2$$

gelir. Her iki tarafın karesi alınırsa sol taraf irrasyonel, sağ taraf rasyonel olur ve çelişki elde edilir.

12. $0 \leq a, b, c, d < 7$ olmak üzere, 7 nin $ab - cd$ yi bölmesini sağlayan kaç (a, b, c, d) tam sayı dörtlüsü vardır?

Cevap: 385. $ab \equiv cd \equiv k \pmod 7$ ve $k \in \{0, 1, \ldots, 6\}$ olsun. $k = 0$ ise, a ve b den en az biri 0 ve benzer biçimde c ve d den en az biri 0 dır. Bu durumdan $13^2 = 169$ çözüm gelir. $k \neq 0$ ise, a ve c sayıları $\{1, 2, \ldots, 6\}$ kümesinden rastgele seçildiğinde b ve d tek türlü belirlenir. Dolayısıyla bu durumda $6 \cdot 6^2 = 216$ çözüm vardır. O halde toplam çözüm sayısı $169 + 216 = 385$ tir.

13. $|AB| = |AC|$ ve $m(\widehat{BAC}) = 40^o$ olan bir ABC üçgeninin $[AB]$ ve $[AC]$ kenarları üstünde sırasıyla, D ve E noktaları alınıyor. BC doğrusu üstünde de C noktası, B ile F arasında kalacak biçimde bir F noktası alınıyor. $|BE| = |CF|$, $|AD| = |AE|$ ve $m(\widehat{BEC}) = 60^o$ ise, $m(\widehat{DFB})$ kaçtır?

Cevap: $25°$. ABC ikizkenar olduğundan $\angle ACB = 70°$ ve buradan da $\angle EBC = 50°$ olur. $|AD| = |AE|$ olduğundan $|BD| = |EC|$ dir. Bu durumda $\triangle BEC \cong \triangle CDB$ olacağından $|CD| = |BE| = |CF|$ olur. $\angle DCB = \angle EBC = 50°$ olduğundan $\angle DFB = 25°$ bulunur.

14. Gerçel sayı doğrusu üstünde 0 noktasından başlayarak, her adımda doğru boyunca istediği yönde 364 veya 715 birim sıçrayan bir çekirgenin konduğu noktaların 2010 noktasına uzaklığı en az ne kadar olabilir?

Cevap: 5. $364 = 2^2 \cdot 7 \cdot 13$ ve $715 = 5 \cdot 11 \cdot 13$. $\Rightarrow$ obeb$(364, 715) = 13$. 0 dan başlayarak çekirgenin ulaşabileceği sayı $364a + 715b$ $(a, b \in \mathbb{Z})$ formunda bir tam sayıdır. obeb$(364, 715) = 13$ olduğundan bu çekirge yalnızca 13 ile tam bölünebilen sayılara varabilir. $2010 = 13 \cdot 154 + 8 = 13 \cdot 155 - 5$ olduğundan çekirge 2010 a en az 5 uzaklıktaki bir noktaya gidebilir.

15. x, y, z gerçel sayıları, $\dfrac{xyz}{x+y} = -1$, $\dfrac{xyz}{y+z} = 1$ ve $\dfrac{xyz}{z+x} = 2$ eşitliklerini sağlıyorsa, xyz aşağıdaki değerlerden hangisini alabilir?

a) $-\dfrac{8}{\sqrt{15}}$ b) $\dfrac{8}{\sqrt{5}}$ c) $-8\sqrt{\dfrac{3}{5}}$ d) $\dfrac{7}{\sqrt{15}}$ e) Hiçbiri

Cevap: $-\dfrac{8}{\sqrt{15}}$. $a = \frac{1}{yz}, b = \frac{1}{xz}, c = \frac{1}{xy}$ olsun. $\Rightarrow a + b = -1, b + c = 1, a + c = \frac{1}{2}$. $\Rightarrow a = -\frac{3}{4}, b = -\frac{1}{4}, c = \frac{5}{4}$. $\Rightarrow yz = -\frac{4}{3}, xz = -4, xy = \frac{4}{5}$. $\Rightarrow xyz = \pm\frac{8}{\sqrt{15}}$. $x = 6/\sqrt{15}, y = 2/\sqrt{15}, z = -10/\sqrt{15}$ için $xyz = -8/\sqrt{15}$ olur ve eşitlikler sağlanır.

16. 11 farklı kitap üç raflı bir kitaplığa, en çok bir raf boş kalacak biçimde kaç farklı şekilde yerleştirilebilir?

Cevap: $75 \cdot 11!$ İlk önce 11 kitabı sıraya dizelim. Komşu kitapların araları, ilk kitabın solu ve son kitabın sağı olmak üzere 12 boşluk bulunuyor. Bu boşluklardan ikisini seçip (aynı boşluk iki kez seçilebilir) seçilmiş boşlukları raflar arasında olan sınırlar gibi düşünebiliriz. Fakat sadece ilk ve son boşluklar seçilirse en az iki raf boş kalır. Buna göre cevap $11! \cdot (\binom{12}{2} - 1 + 10) = 75 \cdot 11!$ olur.

17. Uzayda yer alan A, B, C, D noktaları için, $|AB| = |AC| = 3$, $|DB| = |DC| = 5$, $|AD| = 6$ ve $|BC| = 2$ dir. BC doğrusunun D noktasına en yakın noktası P ve ABC üçgeninin bulunduğu düzlemin D noktasına en yakın noktası da Q ise, $|PQ|$ kaçtır?

Cevap: $1/\sqrt{2}$. $|DB| = |DC|$ olduğundan P noktası $[BC]$ nin orta noktası ve $|QB| = |QC|$ olur. $|QD| = h$, $|QB| = |QC| = x$, $|PQ| = y$

olsun. Pisagor teoreminden $|AP| = 2\sqrt{2}, x^2+h^2 = 25, h^2+(y+2\sqrt{2})^2 = 36$ ve $x^2 - y^2 = 1$ olur. Bu eşitliklerden $36 - 25 = h^2 + (y + 2\sqrt{2})^2 - (x^2 + h^2) = 4\sqrt{2}y + 8 - (x^2 - y^2) = 4\sqrt{2}y + 7$ ve böylece $y = 1/\sqrt{2}$ elde ederiz.

18. 1000 elemanlı bir kümenin 500 elemanlı altkümelerinin sayısı aşağıdaki sayılardan hangisine bölünmez?

a) 3 b) 5 c) 11 d) 13 e) 17

Cevap: 11. Bir p asal sayısının $n!$ i bölen en büyük kuvveti $f_p(n) = \lfloor \frac{n}{p} \rfloor + \lfloor \frac{n}{p^2} \rfloor + \lfloor \frac{n}{p^3} \rfloor + \cdots$ toplamıdır. $\binom{1000}{500} = \frac{1000!}{500!^2}$ dir. $f_3(1000) = 333 + 111 + 37 + 12 + 4 + 1 = 498$, $f_3(500) = 166+55+18+6+2 = 247$ ve $f_3(1000) > 2f_3(500)$ olduğundan sayı 3 ile bölünür. $f_5(1000) = 200+40+8+1 = 249$, $f_5(500) = 100+20+4 = 124$ ve $f_5(1000) > 2f_5(500)$ olduğundan sayı 5 ile de bölünür. Benzer biçimde $f_{13}(1000) = 76 + 5 = 81 > 2f_{13}(500) = 2(38 + 2) = 80$ ve $f_{17}(1000) = 58 + 3 = 61 > 2f_{17}(500) = 2(29 + 1) = 60$ olduğundan sayı 13 ve 17 ile de tam bölünür. Ancak $f_{11}(1000) = 90 + 8 = 98$ ve $f_{11}(500) = 45 + 4 = 49$ olduğundan $f_{11}(1000) = 2f_{11}(500)$ olur ve dolayısıyla sayı 11 ile bölünmez.

19. $x^5 - 2x^2 - 9x - 6$ polinomumun farklı gerçel köklerinin toplamı nedir?

Cevap: 1. Kolayca görüleceği üzere $P(x) = x^5 - 2x^2 - 9x - 6$ poinomunun bir kökü -1 dir. $P(x)$'in $x + 1$ ile bölümünnden $Q(x) = x^4 - x^3 + x^2 - 3x - 6$ elde edilir. Açıkça görüleceği üzere -1 sayısı $Q(x)$'in de bir köküdür. $Q(x)$'in $x + 1$ ile bölümünden $T(x) = x^3 - 2x^2 + 3x - 6 = x^2(x - 2) + 3(x - 2) = (x - 2)(x^2 + 3)$ bulunur. Sonuç olarak $P(x) = (x + 1)^2(x - 2)(x^2 + 3)$ elde edilir ve dolayısıyla $P(x)$'in farklı gerçel kökleri -1 ve 2'dir.

20. 0 sayısı ile başlanıp, her adımda bir önceki sayının 1 fazlası veya 2 katı alınarak, aşağıdaki sayılardan hangisini en az sayıda adımda elde edilir?

a) 2011 b) 2010 c) 2009 d) 2008 e) 2007

Cevap: 2008. Sayıları 2 tabanında yazalım. Bir sayının 2 katı alındığında basamak sayısı 1 artar ancak içindeki 1'lerin adedi değişmez. Bir çift sayının 1 fazlası alındığında içindeki 1'lerin adedi 1 artar ancak basamak sayısı değişmez. Bir tek sayının 1 fazlası

alındığında ise, içindeki 1'lerin sayısı kesinlikle artmaz (belki azalır) ve basamak sayısı da en çok 1 artar (belki artmaz). Özetle, soruda bahsedilen iki işlemin her biri, sayının içindeki 1'lerin adedini ve sayının basamak sayısını en çok 1 artırabilir ancak ikisini aynı anda artıramaz. Dlayısıyla, bir sayının basamak sayısı m ve içindeki 1'lerin adedi n ise o sayıyı elde etmek için en az $m+n-1$ adım gerekir. Öte yandan bu kadar adımın yeterli olduğunu görmek de kolaydır.

$2007 = (11111010111)_2$ olduğuna göre en az $11+9-1=19$,
$2008 = (11111011000)_2$ olduğuna göre en az $11+7-1=17$,
$2009 = (11111011001)_2$ olduğuna göre en az $11+8-1=18$,
$2010 = (11111011010)_2$ olduğuna göre en az $11+8-1=18$,
$2011 = (11111011011)_2$ olduğuna göre en az $11+9-1=19$

adım gerekiyor.

21. Merkezleri aynı ve yarıçapları 10 ve 20 birim olan iki düzlemdeş daireyi sırasıyla taban kabul eden, herbiri 20 birim yüksekliğinde bir dik silindir ve bir dik koni düzlemin aynı tarafında kalacak biçimde alınıyor. Koninin silindirin içinde kalan kısmının hacminin, silindirin dışında kalan kısmının hacmine oranı nedir?

Cevap: 1. Dairelerin merkezi O, koninin tepe noktası A, büyük daire üzerinde bir nokta B ve koni ile silindirin kesişiminde kalan çemberin merkezi C olsun. $|AO| = |OB| = 20$ olduğundan $\angle ABO = 45°$ olur. Koni ile silindirin kesişimindeki C merkezli çemberin yarıçapı 10 olduğundan $|AC| = |CO| = 10$ olmalıdır. Bu durumda koni ile silindirin kesişimdeki bölgenin hacmi $4000\pi/3$, koninin içinde ve silindirin dışında kalan bölgenin hacmi ise yine $4000\pi/3$ tür. İstenen oran 1 olur.

22. $\dfrac{x}{y+7} + \dfrac{y}{x+7} = 1$ eşitliğini sağlayan kaç (x, y) tam sayı ikilisi vardır?

Cevap: 15. Eşitliğin her iki tarafını $(x+7)(y+7)$ ile çarparsak $x^2+y^2-xy = 49$ olur ve buradan $(2x-y)^2+3y^2 = 4\cdot 49$ elde edilir. Son eşitliği sağlayan 18 tane (x, y) ikilisi bulunuyor: $(x, y) = (3, 8), (5, 8), (-3, -8), (-5, -8), (0, 7), (7, 7), (-7, -7), (0, -7), (8, 5), (-3, 5), (3, -5), (-8, -5), (5, -3), (-8, -3), (8, 3), (-5, 3), (-7, 0), (7, 0)$. Fakat $(0, -7), (-7, 0), (-7, -7)$ ikilileri ilk eşitliği sağlamıyorlar.

23. $1 \leq n \leq 2010$ koşulunu sağlayan kaç tane n tam sayısı için $1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \cdots + (2n-1)^2 - (2n)^2$ sayısı 2010 ile bölünür?

Cevap: 8. $1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \cdots + (2n-1)^2 - (2n)^2 = \sum_{k=1}^{n}(2k-1)^2 - (2k)^2 = \sum_{k=1}^{n} 1 - 4k = n - 4\frac{n(n+1)}{2} = -n(2n+1)$. $2010 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 67$. $2010|n(2n+1)$ ancak ve ancak $n \equiv 0 \pmod 2, n \equiv 0, 1 \pmod 3, n \equiv 0, 2 \pmod 5$ ve $n \equiv 0, 33 \pmod{67}$. Dolayısıyla Çinli Kalan Teoremi'ne göre verilen aralıkta $1 \cdot 2 \cdot \cdot 2 \cdot 2 = 8$ çözüm vardır.

24. On tabanına göre tersten yazılımı ile kendisi aynı olup 11 ile bölünen kaç tane yedi basamaklı pozitif tam sayı vardır?

Cevap: 818. Sayı $abcdcba$ olsun.$\Rightarrow 11|2(a+c-b)-d$. a, b, c rakamları rastgele seçildiğinde d rakamı tek türlü belli olur. Ancak d rakam olduğundan $a+c-b \equiv 5 \pmod{11}$ olan durumları çıkarmalıyız. Başka bir deyişle abc üç basamaklı sayısı $\pmod{11}$ de 5 e denk olmayan herhangi bir sayı olabilir. O halde cevap $900 - 82 = 818$ dir.

25. $m(\widehat{BAC}) = 90^o$, $|AB| = 1$ ve $|AC| = \sqrt{2}$ olan bir ABC üçgeniyle aynı düzlemde yer alan P ve Q noktaları, $|PB| = 1 = |QB|$, $|PC| = 2 = |QC|$ ve $|PA| > |QA|$ koşullarını sağlıyorsa, $|PA|/|QA|$ nedir?

Cevap: $\sqrt{2}+\sqrt{3}$. B ve C noktaları $[PQ]$ nun orta dikmesi üzerindedir. Yani BC doğrusu $[PQ]$ nun orta dikmesidir. Pisagor teoreminden $|BC| = \sqrt{3}$ tür. $|BC|^2 + |BQ|^2 = |CQ|^2$ olduğundan $\angle CBQ = 90°$ dir. Benzer şekilde $\angle CBP = 90°$ olduğundan $B \in [PQ]$ olur. $|BQ|/|CQ| = 1/2$ olduğundan $\angle QCB = \angle PCB = 30°$ dir. $\angle ACB = \alpha$ dersek $\cos\alpha = \sqrt{2}/\sqrt{3}$ ve $\sin\alpha = 1/\sqrt{3}$ olmak üzere kosinüs teoreminden $|AP|^2 = |AC|^2 + |PC|^2 - 2 \cdot |AC| \cdot |PC| \cos(\alpha + 30°) = 6 - 4\sqrt{2}\cos(\alpha + 30°)$ ve $|AQ|^2 = |AC|^2 + |QC|^2 - 2 \cdot |AC| \cdot |QC| \cos(\alpha - 30°) = 6 - 4\sqrt{2}\cos(\alpha - 30°)$ buluruz. $\cos(\alpha + 30°) = \cos\alpha\cos 30° - \sin\alpha\sin 30°$ ve $\cos(\alpha - 30°) = \cos\alpha\cos 30° + \sin\alpha\sin 30°$ eşitliklerini kullanarak $|AP|/|AQ| = \sqrt{2} + \sqrt{3}$ olduğunu görebiliriz.

26. m nin aşağıdaki değerlerinden hangisi için $3x^2 + 4y^2 - 5z^2 = m$ eşitliğini sağlayan (x, y, z) pozitif tam sayı üçlüsü yoktur?

a) 16 b) 14 c) 12 d) 10 e) 8

Cevap: 10. (x, y, z) üçllüsü $(8, 6, 8)$ iken $m = 16$, $(1, 2, 1)$ iken $m = 14$, $(4, 6, 6)$ iken $m = 12$ ve $(2, 2, 2)$ iken $m = 8$ oluyor. Farzedelim ki $m = 10$ için bir üçlü bulunsun. $3x^2+4y^2-5y^2 = 10$ eşitliği $\pmod 5$ te incelendiğinde x ve y nin ikisinin de 5 ile bölünmesi gerektiği görülür. $x = 5x_1$ ve $y = 5y_1$ yazılıp sadeleştirme yapılınca $15x_1^2 + 20y_1^2 - z^2 = 2$ elde edilir. Buradan $z^2 \equiv 3 \pmod 5$ bulunur ancak hiçbir tamkare $\pmod 5$ te 3 e denk değildir. Çelişki.

27. Katsayılarının her biri 1 veya -1 ve tüm kökleri gerçel sayılar olan bir polinomun derecesi en çok kaç olabilir?

Cevap: 3. Polinom $P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$ ve gerçel kökleri de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ olsun. O zaman $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = -a_{n-1}$ ve $x_1x_2 + x_2x_3 + \cdots x_{n-1}x_n = a_{n-2}$ olur. İlk ifadenin karesinden ikinci ifadeyi çıkarırsak $x_1^2 + x_2^2 + \cdots x_n^2 = a_{n-1}^2 - 2a_{n-2}$ elde ederiz. Son ifadenin sol tarafı negatif olmadığından $a_{n-2} = -1$ ve $x_1^2 + x_2^2 + \cdots x_n^2 = 3$ olur. O zaman $x_1x_2 \cdots x_n = a_0/a_n = \pm 1$ olduğundan

$$3 = x_1^2 + x_2^2 + \cdots x_n^2 \geq n\sqrt[n]{x_1^2x_2^2 \cdots x_n^2} = n$$

olur ve buradan $n \leq 3$ elde edilir. $Q(x) = x^3 + x^2 - x - 1$ polinomu sorudaki koşulları sağlıyor ve buna göre cevap $n = 3$ olur.

28. 2010 kişinin yaşadığı bir köyde her ikisi de aynı arkadaş sayısına sahip olan bir tek ikili varsa, bu sayı kaç farklı değer alabilir?

Cevap: 2. Her kişinin arkadaş sayısı $0, 1, \ldots, 2019$ sayılarından birine eşittir ve bir kişinin 0 (2009) arkadaşı varsa kimsenin 2009 (0) arkadaşı olamaz.

Durum 1: 2009 arkadaşı olan bir kişi var. O zaman 0 arkadaşı olan kimse yoktur ve arkadaş sayısı 1,2,...,2009 olan kişiler vardır. 2009 arkadaşı olan kişiyi köyden atıp tüm arkadaşlıklarını da iptal edersek kalan 2009 kişi arasında arkadaş sayısı 0,1,...,2007 olan kişiler olacaktır. Demek ki arkadaş sayısı 2008 olan kişi olmayacaktır. 0 arkadaşı olan kişiyi köyden atalım. Kalan 2008 kişi arasında arkadaş sayısı 1,2,..,2007 olan kişiler olacaktır. Demek ki arkadaş sayısı 0 olan kişi olmayacaktır. Arkadaş sayısı 2007 olan kişiyi köyden atıp tüm arkadaşlıklarını da iptal edersek kalan 2007 kişinin arasında arkadaş sayısı 0,1,...,2005 olan kişiler olacaktır. Demek ki arkadaş sayısı 2006 olan kişi olmayacaktır. Benzer şekilde devam edersek sonunda

birbiriyle arkadaş olan iki kişi kalacaktır. Köyden atılan kişileri de dikkate alırsak bu iki kişinin her birinin başlangıçtaki arkadaş sayısı 1005 olmalıdır.

Durum 2: 0 arkadaşı olan bir kişi var. Birinci durumdaki gibi hareket edersek en son köyde aralarında arkadaş olmayan iki kişi kalacaktır. Köyden atılan kişileri dikkate alırsak bu iki kişinin başlangıçtaki arkadaş sayısı 1004 olmalıdır.

Buna göre, köyde her ikisi de aynı arkadaş sayısına sahip olan iki kişinin her birinin ya 1004, ya da 1005 arkadaşı bulunuyor.

29. Bir ABC üçgeninin iç açıortaylarının kesişme noktası I ve $[AC]$ kenarına teğet olan dış teğet çemberinin merkezi de O noktasıdır. $|BI| = 12$, $|IO| = 18$ ve $|BC| = 15$ ise, $|AB|$ kaçtır?

Cevap: 24. $\angle BAI = \angle BOC$ ve $\angle ABI = \angle OBC$ olduğundan $\triangle AIB \sim \triangle OCB$ ve buradan da $|AB| = |BI| \cdot |BO|/|BC| = 12 \cdot 30/15 = 24$ elde ederiz.

30. $N = \left[\!\left[\frac{2}{5}\right]\!\right] + \left[\!\left[\frac{2^2}{5}\right]\!\right] + \cdots + \left[\!\left[\frac{2^{2009}}{5}\right]\!\right]$ ise, 2^{2010} un N ile bölümünden kalan nedir?

Cevap: 5024.

$$\left[\!\left[\frac{2^n}{5}\right]\!\right] = \begin{cases} \frac{2^n-1}{5}, & n \equiv 0 \pmod 4 \text{ ise,} \\ \frac{2^n-2}{5}, & n \equiv 1 \pmod 4 \text{ ise,} \\ \frac{2^n-4}{5}, & n \equiv 2 \pmod 4 \text{ ise,} \\ \frac{2^n-3}{5}, & n \equiv 3 \pmod 4 \text{ ise,} \end{cases}$$

olduğundan

$$N = \sum_{n=1}^{2009} \frac{2^n}{5} - \frac{2008}{4} \cdot 2 - \frac{2}{5} = \frac{2^{2010} - 4}{5} - 1004$$

elde edilir. Buradan da $2^{2010} = 5N + 5024$ olduğu görülür. $N > 5024$ olduğundan 2^{2010} sayısının N ile bölümünden kalan 5024 tür.

31. Aşağıdaki (A, B) ikililerinden hangisi için

$$\begin{aligned} x^2 + xy + y &= A \\ \frac{y}{y-x} &= B \end{aligned}$$

denklem sisteminin gerçel çözümü yoktur?

a) $(1/2, 2)$ b) $(-1, 1)$ c) $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ d) $(1, 1/2)$ e) $(2, 2/3)$

Cevap: $(2, 2/3)$. $x = 0$ ve $y = A$ alınırsa $B = 1$ için eşitlikler sağlanır. $B \neq 1$ olsun. İkinci denklemden $y = Bx/(B-1)$ elde edilir. Bu eşitlik ilk denklemde yerine yazıldığında

$$\frac{2B-1}{B-1}x^2 + \frac{B}{B-1}x - A = 0$$

eşitliği elde edilir. Bu denklemin kökü olması için gerek ve yeter şart

$$\Delta = \left(\frac{B}{B-1}\right)^2 + \frac{4A(2B-1)}{B-1} \geq 0$$

olmasıdır. $B = 1/2$ veya $A > 0, B > 1$ iken $\Delta > 0$ olduğu kolayca görülür. $A = 2$ ve $B = 2/3$ iken $\Delta = -4$ olur ve çözüm bulunmaz.

32. 1001 kişilik bir okulda herhangi üç öğrenciden en az ikisi arkadaştır. Bu okulda en çok arkadaşa sahip olan öğrencilerden birinin arkadaş sayısı, $334, 412, 450, 499$ değerlerinden kaçını alabilir?

Cevap: En çok arkadaşa sahip olan öğrencilerden birinin arkadaş sayısı, $334, 412, 450, 499$ değerlerinden hiçbirini alamaz. Bu sayının en az 500 olduğunu gösterelim. Her öğrenci ikilisi arkadaşsa bu sayı 1000 olacaktır. Diğer durumda A ve B arkadaş olmayan iki öğrenci olsun. Kalan 999 öğrencinin her biri bu iki kişiden en az biri ile arkadaş olacaktır. Sonuç olarak A ve B öğrencilerinden en az birinin arkadaş sayısı en az 500 olacaktır.

33. $m(\widehat{ABC}) = 90^o$ ve $|AC| = 10$ olan bir ABC üçgeninde $[AC]$ kenarının orta noktası D olmak üzere, $[AD]$ ve $[BD]$ nin orta dikmeleri E noktasında, $[BD]$ ve $[CD]$ nin orta dikmeleri de F noktasinda kesişiyor. $|EF| = 13$ ise, $|AB|$ aşağıdaki değerlerden hangisini alabilir?

a) $20\sqrt{\frac{2}{13}}$ b) $15\sqrt{\frac{2}{13}}$ c) $10\sqrt{\frac{2}{13}}$ d) $5\sqrt{\frac{2}{13}}$ e) Hiçbiri

Cevap: $5\sqrt{2/13}$. ABC dik üçgen olduğundan $|AD| = |BD| = |CD| = 5$ tir. DE ve DF doğruları sırasıyla $[AB]$ ve $[BC]$ yi dik ortalar. Öte yandan EF doğrusu da $[BD]$ yi dik ortalar. $\angle EDF = 90°$ olduğundan $|ED|^2 + |FD|^2 = |EF|^2 = 169$ ve $|ED| \cdot |DF| = 13 \cdot 5/2 = 65/2$ olur. Buradan $(|ED| + |FD|)^2 = 234$, $(|ED| - |FD|)^2 = 104$ olacağından

$|ED|$ ve $|FD|$ den biri $5\sqrt{26}/2$ diğeri de $\sqrt{26}/2$ olmalıdır. E den AD ye çizilen dikme ayağı K ve $[AB]$ nin orta noktası L olsun. $AKEL$ bir kirişler dörtgeni ve $|AK| = |KD| = 5/2$ olacağından $|DL| = |KD| \cdot |AD|/|ED| = 25/(2|ED|)$ dir. Pisagor teoreminden $|AB| = 2|AL| = 2\sqrt{25 - |DL|^2} = 2\sqrt{25 - 25^2/(4|ED|^2)}$ olur. $|ED| \in \{\sqrt{26}/2,\ 5\sqrt{26}/2\}$ için $|AB| \in \{5\sqrt{2/13},\ 25\sqrt{2/13}\}$ olur.

34. Aşağıdaki sayılardan hangisi $2^{2^{2010}} + 2^{2^{2009}} + 1$ sayısını böler?

a) 19 b) 17 c) 13 d) 11 e) Hiçbiri

Cevap: 13. $2^{2^{2009}} = x$ olsun. $\Rightarrow 2^{2^{2010}} = x^2$. $p > 3$ asal sayı olmak üzere $p|x^2 + x + 1$ ise, $x^3 \equiv 1 \pmod p$ ve $x \not\equiv 1 \pmod p$ dir. Dolayısıyla $3|p - 1$ olmak zorundadır. O halde $p = 17$ veya $p = 11$ olamaz. $2^{2009} \equiv 14 \pmod{18} \Rightarrow x \equiv 2^{14} \equiv 6 \pmod{19}$ $\Rightarrow x^2 + x + 1 \equiv 36 + 6 + 1 \equiv 5 \not\equiv 0 \pmod{19}$. $2^{2009} \equiv 8 \pmod{12} \Rightarrow x \equiv 2^8 \equiv 9 \pmod{13} \Rightarrow x^2 + x + 1 \equiv 81 + 9 + 1 \equiv 91 \equiv 0 \pmod{13}$.

35. Aşağıdaki ifadelerden hangisi, $0 < x < 1$ ve $0 < y < 1$ koşullarını sağlayan tüm x, y gerçel sayıları için $x^3 + y^5$ ten küçük değildir?

a) x^2y b) x^2y^2 c) x^2y^3 d) x^3y e) xy^4

Cevap: x^2y.

$$x^3 + y^5 > x^3 + y^6 \geq 3\sqrt[3]{\frac{x^3}{2}\frac{x^3}{2}y^6} > x^2y^2 \geq x^2y^3$$

olduğuna göre cevap x^2y^2 ve x^2y^3 değildir.

$x^3 + y^5 > x^3 > x^3y$ olduğuna göre cevap x^3y değildir.

$x \leq y$ olursa $x^3 + y^5 > y^5 \geq xy^4$ ve $x \geq y$ olursa, $x^3 + y^5 > x^3 \geq xy^2 > xy^4$ olduğuna göre cevap xy^4 değildir.

Son olarak $(x, y) = (\frac{1}{10}, \frac{2}{10})$ için

$$x^3 + y^5 = \frac{1}{10^3} + \frac{32}{10^5} < \frac{2}{10^3} = x^2y$$

olduğuna göre cevap x^2y olur.

36. Başlangıçta $m \times n$ bir satranç tahtasının yalnızca sol alt köşesinde bir taş bulunuyor. Oyuncular sırayla hamle yaparak, her hamlede taşı bulunduğu karenin hemen sağındaki, hemen üstündeki veya hemen sağ üst çaprazındaki kareye kaydırıyorlar. Hamle yapamayan oyuncu oyunu kaybediyor. Oyun, 6×7, 6×8, 7×7, 7×8 ve 8×8 tahtalarda birer kez oynanırsa, bu oyunlardan kaçını ilk hamleyi yapan oyuncu kazanmayı garanti edebilir?

Cevap: 4. 8×8 bir satranç tahtasının her birim karesine, oyun bu birim kareden başladığı durumda birinci oyuncu kazanıyorsa 1, ikinci oyuncu kazanıyorsa 0 yazalım. Bu işlemi sağ üst birim kareden başlatalım. Elde edilen tablo aşağıya çıkarılmıştır:

1	0	1	0	1	0	1	0
1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	1	0	1	0	1	0
1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	1	0	1	0	1	0
1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	1	0	1	0	1	0
1	1	1	1	1	1	1	1

Bu tabloya göre, oyunu 6×7, 6×8, 7×8 ve 8×8 tahtalarında birinci, 7×7 tahtasında ikinci oyuncu kazanacaktır.