

1. $a + b + c + abc = 4$ koşulunu sağlayan tüm a, b, c pozitif gerçel sayıları için,

$$\left(1 + \frac{a}{b} + ca\right) \left(1 + \frac{b}{c} + ab\right) \left(1 + \frac{c}{a} + bc\right) \geq 27$$

olduğunu gösteriniz.

2. n pozitif bir tam sayı olmak üzere, $19^{4n} + 4$ sayısının en az kaç farklı asal çarpanı olabileceğini belirleyiniz.

3. Her renkten 19 ar tane olmak üzere, 106 farklı renkte 2014 top bir çemberin çevresine nasıl dizilirse dizilsin, aralarında en az 53 farklı renkte topun yer aldığı ardışık n top bulunuyorsa, n sayısının alabileceği en küçük değeri belirleyiniz.

4. Diklik merkezi H olan dar açılı bir ABC üçgeninin $[BC]$ kenarı üstündeki birbirinden farklı D ve E noktaları için, AD ve AE doğru parçaları BHC üçgeninin çevrel çemberini sırasıyla, P ve Q noktalarında kesiyor.

$$|BD|^2 + |CD|^2 = 2|DP| \cdot |DA| \quad \text{ve} \quad |BE|^2 + |CE|^2 = 2|EQ| \cdot |EA|$$

eşitlikleri sağlanıyorsa, $|BP| = |CQ|$ olduğunu kanıtlayınız.