

20. Ulusal Ortaokul Matematik Olimpiyatı
İkinci Aşama Sınavı

5 Aralık 2015

1. Sabit olmayan her $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ fonksiyonu için $f(x + y) < f(xy)$ olacak şekilde x, y gerçel sayılarının bulunabileceğini gösteriniz.

2. Bir sergide her biri tam olarak k renk kullanılarak çizilmiş 100 tablo bulunmaktadır. Bu tablolardan herhangi 20 sinde ortak bir renk bulunup tabloların tamamında ortak bir renk bulunmuyorsa, k nın alabileceği en küçük değer nedir?

3. p bir asal, n ise bir pozitif tam sayı olmak üzere,

$$p^3 - 2p^2 + p + 1 = 3^n$$

eşitliğini sağlayan tüm (p, n) ikililerini bulunuz.

4. Bir ABC üçgeninde $[BC]$ kenarının orta noktası D olsun. D den geçip AB ye B noktasında teğet olan çember ile D den geçip AC ye C noktasında teğet olan çember D den farklı bir M noktasında kesişiyorlar. M nin BC göre yansıması olan M' noktasının AD doğrusu üzerinde bulunduğunu gösteriniz.