TÜRKİYE BİLİMSEL VE TEKNOLOJİK ARAŞTIRMA KURUMU
BİLİM İNSANI DESTEK PROGRAMLARI BAŞKANLIĞI

28. ULUSAL BİLİM OLİMPİYATLARI - 2020
BİRİNCİ AŞAMA SINAVI
MATEMATİK

Soru kitapçığı türü

A

29 Ağustos 2020 Cumartesi, 09.30-12.30

ÇÖZÜMLER

1. $m(\widehat{ABC}) = 135°$ olan bir ABC üçgeninin çevrel çemberinin merkezi O olsun. $[OC]$ doğru parçası üzerindeki bir D noktası için $m(\widehat{DBA}) = 90°$ ve $m(\widehat{ADO}) = 70°$ ise, $m(\widehat{BAC})$ nedir?

Cevap: 25°. O merkez ve $m(\widehat{ABC}) = 135°$ olduğundan $m(\widehat{DOA}) = 90°$'dir. O halde A, B, D, O noktaları çemberseldir. $\Rightarrow m(\widehat{ABO}) = 70°$. $|OA| = |OB|$ olduğundan $m(\widehat{BAO}) = 70°$ bulunur. AOC ikizkenar dik üçgen olduğu için $m(\widehat{BAC}) = 70° - 45° = 25°$ elde edilir.

2. $2^{p-3} + 3^{p-3} + 4^{p-3}$ toplamının p ile tam bölünmesini sağlayan p tek asal sayılarının toplamı kaçtır?

Cevap: 64. $p = 3$'ün sağladığı açıktır. $p > 3$ olsun. Fermat Teoremi'nden dolayı $2^{p-1} \equiv 3^{p-1} \equiv 4^{p-1} \equiv 1 \pmod p$'dir. $p | 2^{p-3} + 3^{p-3} + 4^{p-3} \Leftrightarrow p | 9 \cdot 16 \cdot (2^{p-3} + 3^{p-3} + 4^{p-3}) = 36 \cdot 2^{p-1} + 16 \cdot 3^{p-1} + 9 \cdot 4^{p-1} \Leftrightarrow p | 36 + 16 + 9 = 61$. O halde 3 dışındaki tek çözüm 61'dir.

3. x bir gerçel sayı olmak üzere $(x + 4)(x^2 + 16) = 11$ ise, $x^4 - 11x$ aşağıdakilerden hangisine eşit olabilir?

a) 175 b) 183 c) 196 d) 204 e) 212

Cevap: 212. Verilen eşitlik $x^3 + 4x^2 + 16x + 53 = 0$ denklemine denktir ve bu denklem üçüncü dereceden olduğu için en az bir gerçel köke sahiptir. Verilen eşitlikte her iki tarafı $x - 4$ ile çarparsak $x^4 - 256 = 11x - 44$ elde edilir ve buradan da $x^4 - 11x = 212$ bulunur.

4. Bir sincap 101 fındık içeren bir kesedeki fındıkların tümünü ya da bir kısmını üç gün içinde yiyecektir. Bu sincap, ikinci ve üçüncü günlerde eşit sayıda fındık ve her gün en az bir fındık yiyecek şekilde bu işlemi kaç farklı biçimde yapabilir?

Cevap: 2500. Birinci, ikinci ve üçüncü günde yenen fındık sayıları sırasıyla a, b ve b olsun. O zaman $0 < a < a + 2b \leq 101$ olmak üzere, a ve $a + 2b$ sayıları her şeyi belirleyecektir. Buna göre, toplam durum sayısı 50 çift ya da 51 tek sayıdan iki sayıyı seçme sayısı na eşit olur. Dolayısıyla cevap $\binom{50}{2} + \binom{51}{2} = 2500$'dür.

5. Düzgün bir $ABCDEF$ altıgeninin $[DE]$ kenarı üzerinde bir P noktası alınıyor. Alan$(PAB) = 60$ ve Alan$(PBC) = 44$ ise, Alan(PAF) kaçtır?

Cevap: 46. Altıgenin bir kenar uzunluğu a ve $|EP| = x$ olsun. E ve D noktalarından AF doğrusuna inen dikme uzunlukları sırasıyla $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ ve $a\sqrt{3}$'tür. Dolayısıyla benzerlikten P'den AF doğrusuna inen dikmenin uzunluğunun $\frac{(a+x)\sqrt{3}}{2}$ olduğu görülür. O halde $\text{Alan}(PAF) = \frac{a(a+x)\sqrt{3}}{4}$ bulunur. Benzer şekilde $\text{Alan}(PBC) = \frac{a(a+(a-x))\sqrt{3}}{4} = \frac{a(2a-x)\sqrt{3}}{4}$ elde edilir. Kolayca görüleceği üzere $\text{Alan}(PAB) = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$'dir ve

$$\text{Alan}(PBC) + \text{Alan}(PAF) = \frac{3}{2}\text{Alan}(PAB)$$

eşitliği sağlanır. O zaman $\text{Alan}(PAF) = 90 - 44 = 46$'dır.

6. $\sqrt{n+11} + \sqrt{n+\sqrt{n+11}}$ ifadesinin bir tam sayı olmasını sağlayan n tam sayılarının toplamı kaçtır?

Cevap: 113. $\sqrt{n+11} + \sqrt{n+\sqrt{n+11}} = m$ olsun. $\Rightarrow \sqrt{n+\sqrt{n+11}} = m-\sqrt{n+11}$. Her iki tarafın karesini alırsak $(2m+1)\sqrt{n+11} = m^2+11$ elde edilir. Buradan $\sqrt{n+11}$'in bir rasyonel sayı olduğu görülür. O halde $n+11$ tam sayı olduğu için $\sqrt{n+11}$ tam sayı olmalıdır. Dolayısıyla $2m+1|m^2+11$ bulunur. $\Rightarrow 2m+1|4(m^2+11)-(2m+1)(2m-1) = 45$. m'nin pozitif bir sayı olduğu açıktır ve dolayısıyla $2m+1$ sayısı 3, 5, 9, 15 veya 45 olabilir. $2m+1 = 3$ ise, $m = 1$ ve $n = 5$ bulunur ancak bu ikili başlangıçtaki eşitliği sağlamaz. $2m+1 = 5$ ise, $m = 2$ ve $n = -2$ olur fakat bu ikili de başlangıçtaki eşitliği sağlamaz. $2m+1 = 9, 15, 45$ durumlarında ise sırasıyla $(m,n) = (4,-2), (7,5), (22,110)$ bulunur ve bu ikililer koşulları sağlar. O halde cevap $-2+5+110 = 113$'tür.

7. $a > 0$ ve $b \neq c$ koşullarını sağlayan a, b, c, d gerçel sayıları için $P_1(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ve $P_2(x) = ax^3 + cx^2 + bx + d$ polinomları tanımlanıyor. $P_1(x+1) - P_1(x)$ ve $P_2(x+1) - P_2(x)$ polinomlarının alabilecekleri en küçük değerler eşitse, $\dfrac{b+c}{a}$ aşağıdakilerden hangisine eşit olabilir?

a) -3 b) -1 c) 1 d) 3 e) Hiçbiri

Cevap: -3. $Q_1(x) = P_1(x+1) - P_1(x) = 3ax^2 + (3a+2b)x + a + b + c$ polinomunun alabileceği en küçük değer $a+b+c-(3a+2b)^2/(12a)$'dır. Benzer şekilde $Q_2(x) = P_2(x+1) - P_2(x) = 3ax^2 + (3a+2c)x + a + b + c$ polinomunun alabileceği en küçük değer $a+b+c-(3a+2c)^2/(12a)$'dır. Bu iki değer eşit olduğundan $(3a+2b)^2 = (3a+2c)^2$ elde edilir. $b \neq c$ olduğu için de $b+c = -3a$ olur.

8. N pozitif bir tam sayı olmak üzere, $a_1, a_2, \ldots, a_k$ pozitif tam sayıları $N = a_1 + a_2 + \cdots + a_k$ ve her $1 \le i \le k$ için $a_i = a_{k+1-i}$ koşullarını sağlıyorsa, $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ sıralı k-lisine N'nin bir *simetrik dağılımı* diyelim. Örneğin, (5), $(2, 1, 2)$ ve $(1, 1, 1, 1, 1)$ sıralılarının her biri 5 in bir simetrik dağılımıdır. Buna göre 28 sayısının kaç farklı simetrik dağılımı vardır?

Cevap: 16384. 28 tane 1 sayısını bir sıraya dizelim. Bu sayıların aralarında 27 tane boşluk bulunuyor. Bu boşlukların bazılarına ayraçlar yerleştirerek farkli $28 = a_1 + a_2 + \cdots + a_k$ gösterimleri elde ederiz. Simetrik dağılım elde etmek için ilk 14 boşluğun bazılarına ayraç yerleştirip daha sonra ayraç koyulan boşlukların 14. boşluğa göre simetrilerine de ayraç ekleriz. 28'in her simetrik dağılımı bu şekilde tek türlü elde edildiğinden sonuç $2^{14} = 16384$'tür.

9. Bir ABC üçgeninin $[BC]$ kenarı üzerinde alınan bir D noktası için $m(\widehat{BAD}) = 120°$ ve $m(\widehat{CAD}) = 30°$'dir. $|AD| = 6$ ve $|DC| = 21$ ise, $|AB|$ kaçtır?

Cevap: 10. D'den geçip AC'ye paralel olan doğru AB'yi E noktasında kessin. EAD, tepe açısı $120°$ olan bir ikizkenar üçgendir ve dolayısıyla $|AE| = 6$ ve $|ED| = 6\sqrt{3}$ olduğu görülür. D'den AC'ye inen dikme ayağı F olmak üzere, $|AF| = 3\sqrt{3}$ ve $|FD| = 3$ bulunur. DFC üçgeninde Pisagor teoremi ile $|FC| = 12\sqrt{3}$ elde edilir. O halde $|AC| = 15\sqrt{3}$'tür. AC ile DE paralel olduğundan $(|AB| - 6)/|AB| = |ED|/|AC| = 2/5$'tir ve böylece $|AB| = 10$ olduğu bulunur.

10. m, n ve k pozitif tam sayılar olmak üzere, m sayısının n ile bölümünden kalan k dir. Ayrıca m sayısı 28 ile bölündüğünde kalan 27, bölüm ise n dir. Buna göre, k nin alabileceği kaç farklı değer vardır?

Cevap: 14. İlk koşuldan $n | m - k$ ve $k < n$ elde edilir. İkinci koşuldan $m = 28n + 27$ bulunur. O zaman $n | 27 - k$'dir ve dolayısıyla $k \neq 27$ iken $n \le |27 - k|$ elde edilir. $k = 27$ için $n = 100$ ve $m = 2827$ koşulları sağlar. $k > 27$ ise, $k < n \le k - 27$ çelişkisi elde edilir. $k \le 27$ ise, $k < n \le 27 - k$ bulunur ve buradan $k \le 13$ sonucu çıkar. $k \in \{1, 2, \ldots, 13\}$ için $n = 27 - k$ ve $m = 28(27 - k) + 27$ koşulları sağlar.

11. Negatif olmayan a, b ve c gerçel sayıları $a + b + c = 1$ eşitliğini sağlıyorsa,

$$\frac{1}{1 + 4a^2} + \frac{1}{1 + 4b^2} + \frac{1}{1 + 4c^2}$$

ifadesinin alabileceği en küçük değer nedir?

Cevap: 2. $0 \le x \le 1$ olsun. $1 \ge (1-x)(1+4x^2) = 1-x(2x-1)^2$ olduğundan $\dfrac{1}{1+4x^2} \ge 1-x$. Buradan $\frac{1}{1+4a^2} + \frac{1}{1+4b^2} + \frac{1}{1+4c^2} \ge 3-a-b-c = 2$ gelir. İfade $a=0$ ve $b=c=\frac{1}{2}$ durumunda 2 değerini alıyor.

12. Her pozitif tam sayı k renkten birine, farkları veya oranları 2 olan herhangi iki sayı farklı renkte olacak şekilde boyanabiliyorsa, k nin alabileceği en küçük değer nedir?

Cevap: 3. 4, 6 ve 8 sayılarının herhangi ikisi farklı renkte olmak zorundadır. O halde $k \ge 3$. 3 renk kullanarak boyama yapılabildiğini gösterelim. 1 v e 2 sayılarını farklı renklere boyayalım. Daha sonra her seferinde boyanmamış en küçük sayıyı ele alalım. Bu sayının yarısı veya 2 eksiği olan pozitif tam sayıların renklerinden farklı bir renk ile bu sayıyı boyayalım. Böylelikle bütün pozitif tam sayıları istenen koşula göre 3 renk kullanarak boyamış oluruz.

13. Bir ABC üçgeninin sırasıyla $[AB]$ ve $[AC]$ kenarları üzerinde alınan K ve L noktaları için $|AK| = 12$, $|BK| = 16$ ve $|CL| = 6$'dır. $[BC]$ kenarı üzerinde D ve E noktaları $E \in [DC]$ ve $|BD| = |DE| = |EC|$ olacak şekilde alınıyor. $m(\widehat{BKE}) = m(\widehat{CLD})$ ise, $|AL|$ kaçtır?

Cevap: 10. B'den geçip DL'ye paralel olan doğrunun AC ile kesişimi L' olsun. C'den geçip KE'ye paralel olan doğrunun AB ile kesişimi K' olsun. Paralelliklerden $|LL'| = 3$, $|KK'| = 8$, $m(\widehat{BKE}) = m(\widehat{BK'C})$ ve $m(\widehat{CLD}) = m(\widehat{CL'B})$ elde edilir. O halde B, K', L', C çemberseldir ve A noktasının bu dört noktadan geçen çembere göre kuvveti $|AK'| \cdot |AB| = |AL'| \cdot |AC|$'dir. Buradan $4 \cdot 28 = |AL'|(|AL'| + 9)$ ve $|AL'| = 7$ bulunur. Sonuç olarak $|AL| = |AL'| + |L'L| = 7 + 3 = 10$ elde edilir.

14. Her $n \ge 1$ için $a_{n+1} = a_n^3 + 1799$ koşulunu sağlayan bir $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ pozitif tam sayı dizisinde en az iki tam kare bulunuyorsa, a_{2020} sayısının 28 ile bölümünden kalan aşağıdakilerden hangisi olabilir?

a) 2 b) 6 c) 14 d) 22 e) Hiçbiri

Cevap: 22. $1799 \equiv 3 \pmod 4$ olduğunu not edelim. Öncelikle diziyi (mod 4)'te inceleyelim. $a_1 \equiv 0 \pmod 4$ ise, dizinin kalanı 3, 2, 3, 2,... olarak devam edecektir. $a_1 \equiv 1 \pmod 4$ ise, dizinin kalanı 0, 3, 2, 3, 2,... olarak devam edecektir. $a_1 \equiv 2 \pmod 4$ ise, dizinin kalanı 3, 2, 3, 2,... olarak devam edecektir. $a_1 \equiv 3 \pmod 4$ ise, dizinin kalanı 2, 3, 2, 3,... olarak devam edecektir. Bir tam kare (mod 4)'te 0'a veya 1'e denktir.

Bu dizide en az iki tam kare bulunuyorsa tam olarak iki tane tam kare vardır ve bunlar a_1 ile a_2 olmak zorundadır. Ayrıca $a_1 \equiv 1 \pmod 4$'tür ve $a_{2020} \equiv 2 \pmod 4$'tür. $a_1 = n^2$ ve $a_2 = m^2$ olsun $(m, n \in \mathbb{Z}^+)$. $\Rightarrow (m - n^3)(m + n^3) = 1799 = 7 \cdot 257$. Buradan $n = 5$ ve $m = 132$ bulunur. $\Rightarrow a_1 = 25 \equiv 4 \pmod 7$ ve her $k \geq 2$ için $a_k \equiv 1 \pmod 7$ elde edilir. O halde $a_{2020} \equiv 22 \pmod{28}$'dir.

15. $P(x)$ bir polinom olmak üzere, her a gerçel sayısı için $P(a) = P(b)$ eşitliğini sağlayan a dan farklı en az bir b gerçel sayısı bulunuyorsa, $P(x)$ polinomuna *çok tersli* polinom diyelim. $P_1(x) = x^2 - 2020x$, $P_2(x) = x^3 - 2020x^2 + x$, $P_3(x) = x^4 - 2020x^2$ ve $P_4(x) = x^5 - 2020x^3$ polinomlarından kaç tanesi çok terslidir?

Cevap: 1. $P(x)$, derecesi tek sayı ve baş katsayısı pozitif olan bir polinom ise, her $x > N$ ve $y < x$ için $P(y) < P(x)$ olacak şekilde bir N gerçel sayısı bulunur. Bu durumda $P(n + 1) = P(b)$ ve $b \neq N + 1$ olan b gerçel sayısı bulunmaz ve dolayısıyla $P(x)$ çok tersli değildir. O halde $P_2(x)$ ve $P_4(x)$ çok tersli değillerdir. $P_1(1010) = P(b)$ ise, $b^2 - 2020b = -1010^2$ elde edilir. $\Rightarrow (b - 1010)^2 = 0$ ve $b = 1010$ bulunur. Demek ki $P_1(x)$ de çok tersli değildir. $a \neq 0$ iken $P_3(a) = P_3(-a)$ ve $P_3(0) = P_3(\sqrt{2020})$ olduğundan dolayı $P_3(x)$ çok tersli polinomdur.

16. 6 farklı renkten 100 er top n kutuya, aynı renkli herhangi iki top farklı kutularda yer alacak şekilde dağıtılmıştır. Herhangi iki kutu için bu 6 renkten öyle biri vardır ki bu iki kutunun hiçbirinde o renge boyalı top bulunmamaktadır. Buna göre n nin alabileceği en küçük değer nedir?

Cevap: 200. $n = 200$ için bir örnek verelim. Kutuları numaralandıralım. 1-50 numaralı kutuların her birine birer kırmızı, beyaz ve mavi; 51-100 numaralı kutuların her birine birer mavi, yeşil ve siyah; 101-150 numaralı kutuların her birine birer siyah, sarı ve kırmızı; 151-200 numaralı kutuların her birine birer beyaz, yeşil ve sarı top yerleştirirsek koşullar sağlanmış olur. Şimdi kutu sayısının daha az olamayacağını gösterelim. Öncelikle, hiçbir kutuda 5 veya 6 top bulunamayacağı kolayca görülür. Bir kutuda 4 top bulunuyorsa, diğer hiçbir kutuda bu 4 topun renkleri dışındaki iki renk aynı anda bulunamaz. Buna göre, $n \geq 1 + 100 + 100 = 201$ olur. Her kutuda en fazla 3 top var ise, $n \geq \frac{6 \cdot 100}{3} = 200$ olur.

17. $|AB| = 10$ ve $m(\widehat{BAC}) = 124°$ olan bir ABC üçgeninin $[BC]$ kenarı üzerinde alınan bir D noktası için $|AD| = 4$ ve $m(\widehat{BAD}) = 68°$ dir. $[BD]$ doğru parçası üzerinde alınan bir E noktası için $|BE|/|ED| = 5$

tir. $[AB]$ kenarının orta noktası F olmak üzere, CF doğrusu AD ve AE doğrularını sırasıyla P ve N noktalarında kestiğine göre, APN üçgeninin alanının $DENP$ dörtgeninin alanına oranı kaçtır?

Cevap: 10/11. $124° - 68° = 180° - 124°$ olduğundan AC doğrusu ABD üçgeninin bir dış açıortayıdır. Dış açıortay teoreminden $|CD|/|CB| = 4/10 = 2/5$ bulunur. $|BE|/|ED| = 5$ olduğundan $|DC| = 4|ED|$ bulunur. O halde N noktası ABC üçgeninin ağırlık merkezidir ve dolayısıyla $|AN|/|NE| = 2$'dir. ABD üçgeninde C, P, F kesenine göre uygulanan Meneleus teoreminden $|AP|/|PD| = 5/2$ bulunur. Sonuç olarak $\text{Alan}(ANP)/\text{Alan}(ADE) = \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{7} = \frac{10}{21}$ bulunur ve dolayısıyla $\text{Alan}(ANP)/\text{Alan}(DENP) = 10/11$'dir.

18. $n^4 + 2n^3 + 4n^2 + 4n - 62$ ifadesinin bir tam kare olmasını sağlayan n tam sayılarının toplamı kaçtır?

Cevap: 1. $(n^2+n)^2 = n^4+2n^3+n^2$ ve $(n^2+n+2)^2 = n^4+2n^3+5n^2+4n+4$'tür. O halde n bir tam sayı iken $(n^2+n)^2 < n^4+2n^3+4n^2+4n-62 \Leftrightarrow 62 < n(3n+4) \Leftrightarrow 3 < n$ veya $n < -5$ olduğu görülür. $n^4+2n^3+4n^2+4n-62 < (n^2+n+2)^2$ eşitsizliği her n için doğrudur. O halde $n > 3$ veya $n < -5$ ise, $n^4+2n^3+4n^2+4n-62 = (n^2+n+1)^2 = n^4+2n^3+3n^2+2n+1 \Leftrightarrow n(n+2) = 63 \Leftrightarrow n = 7$ veya $n = -9$ bulunur. $n = 3$ için ifade $121 = 11^2$'ne eşittir. $n \in \{2, 1, 0, -1, -2, -3\}$ iken ifade negatiftir. $n = -4$ iken ifade $\equiv 2 \pmod 4$ ve $n = -5$ iken ifade $\equiv 3 \pmod 5$ olduğundan bu durumlarda ifade tam kare değildir. Sonuç olarak cevap $3 + 7 - 9 = 1$'dir.

19. Bir $f : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$ fonksiyonu $f(1) = f(2) = 0$ ve her n pozitif tam sayısı için

$$f(3n) = f(n) + 1 \quad \text{ve} \quad f(3n+1) = f(3n+2) = f(n)$$

koşullarını sağlıyor. Buna göre $f\left(\dfrac{3^{2020}-1}{8}\right)$ kaçtır?

Cevap: 1009. Tümevarımla her n pozitif tam sayısı için $f(n)$ nin n sayısının 3 tabanında yazılımındaki sıfırların sayısına eşit olduğunu gösterebiliriz. $\dfrac{3^{2020}-1}{8} = \dfrac{9^{1010}-1}{9-1} = 3^{2018} + 3^{2016} + \cdots + 3^0 = (1010\cdots101)_3$ sayısı 3 tabanında 1009 tane sıfır içerir.

20. Bir satranç turnuvasına katılan üç arkadaş, turnuvadaki herkesin en fazla üç arkadaşı bulunduğunu ve arkadaş olmayan her iki kişinin ortak en az bir arkadaşı bulunduğunu farkediyor. Bu turnuvaya katılan kişi sayısı en fazla kaç olabilir?

Cevap: 8. Turnuvaya katılan üç arkadaş A, B ve C olsun. Bu üç kişiden birinin sadece iki arkadaşı varsa (genelliği bozmadan bu kişi A olsun), A ile arkadaş olmayan herkesin B veya C ile arkadaş olması gerekir ve dolayısıyla turnuvadaki kiş sayısı en fazla 5 olur. Bu üç kişinin her birinin üç arkadaşı var ise, her birinin bir arkadaşı daha vardır. A ile A_1, B ile B_1, C ile C_1 arkadaş olsun. A, B, C, A_1, B_1, C_1 dışındaki bir kişi A ile arkadaş olmadığından koşullar gereği A_1 ile arkadaştır. Ancak A_1'in A dışında en fazla 2 arkadaşı vardır. O halde bu turnuvada en fazla $6 + 2 = 8$ kişi vardır. A_1, B_1 ve C_1'in farklı ve D ile E kişilerinin her ikisinin de A_1, B_1 ve C_1 ile arkadaş olduğu durum 8 kişi için bir örnektir.

21. $|AB| = 25$ ve $|AC| = 40$ olan bir ABC üçgeninin $[BC]$ kenarı üzerinde alınan bir D noktası için $|BD| = 15$ ve $|DC| = 24$ tür. Buna göre ABD ve ACD üçgenlerinin diklik merkezleri arasındaki uzaklık kaçtır?

Cevap: 13. ABD ve ACD üçgenlerinin diklik merkezleri sırasıyla H_1 ve H_2 olsun. $DH_1 \cap AB = \{X\}$, $AH_1 \cap BD = \{Y\}$ ve $DH_2 \cap AC = \{Z\}$ olsun. ABY ve ACY üçgenlerinde uygulanan Pisagor teoremlerinden $|AY|^2 = 25^2 - |BY|^2 = 40^2 - |CY|^2$ bulunur. Bu bilgi $|BY| + |CY| = 15 + 24 = 39$ ile birleştirilirse $|BY| = 7$, $|YD| = 8$ ve $|AY| = 24$ elde edilir. Sonuç olarak ABD dar açılı, ADC ise geniş açılı bir üçgendir. B, X, H_1, Y noktaları çembersel olduğundan $m(\widehat{YH_1D}) = m(\widehat{ABC})$ bulunur. H_2, Y, Z, C noktaları çembersel olduğundan $m(\widehat{YH_2D}) = m(\widehat{ACB})$ elde edilir. O zaman ABC ve DH_1H_2 benzer üçgenlerdir (A.A.A). O halde bu iki üçgende karşılık gelen yükseklik/taban oranı aynıdır. $\Rightarrow |AY|/|BC| = |DY|/|H_1H_2|$. $\Rightarrow |H_1H_2| = 8 \cdot 39/24 = 13$.

22. $a_1 = 2$, $a_2 = 8$ ve her $n \geq 2$ için $a_{n+1} = 2a_n + 4n^2 a_{n-1}$ koşullarını sağlayan bir $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ pozitif tam sayı dizisi tanımlanıyor. a_{2020} sayısını tam bölen en büyük asal sayı kaçtır?

Cevap: 2017. Tümevarımla $a_n = 2^n \cdot n!$ olduğunu görebiliriz. Yani a_n'yi bölen en büyük asal $p \leq n$ şartını sağlayan en büyük p asalıdır. 2020 den küçük olan en büyük asal sayı 2017'dir.

23. L ve U gerçel sayılar ve $L < U$ olmak üzere, her $L < a < U$ gerçel sayısı için $9x^4 - 6x^2 = a$ denkleminin dört farklı gerçel kökü bulunuyorsa, $U - L$ nin alabileceği en büyük değer nedir?

Cevap: 1. $9x^4 - 6x^2 - a = 0$ denkleminin dört farklı gerçel kökü vardır ancak ve ancak $9t^2 - 6t - a = 0$ denkleminin iki farklı pozitif kökü vardır. Bu durum da ancak ve ancak $36 + 36a > 0$ ve $6 - \sqrt{36 + 36a} > 0$ iken olur. Sonuç olarak istenen koşul ancak ve ancak $-1 < a < 0$ iken sağlanır. O halde $-1 \le L < U \le 0$'dır. O halde $U - L \le 1$ elde edilir ve $U = 0$ ve $L = -1$ durumunda koşullar sağlanır.

24. Tek kişilik bir oyun oynayan Aslı, ilk hamlesinde boş bir tahtaya iki basamaklı bir pozitif tam sayı yazıyor. Aslı, bundan sonraki her hamlesinde, tahtada yazılı olan sayılardan birinin hem iki katını hem de üç katını tahtaya yazıyor. Bir kaç hamle sonucunda tahtadaki bütün sayıların toplamı 2018, 2020, 2022, 2024 sayılarından kaçına eşit olabilir?

Cevap: 2. Aslı, başlangıçta tahtaya 20 yazıp, daha sonraki her hamlesinde tahtaya 40 ve 60 sayılarını ekleyerek 2020'yi elde edebilir. Aslı, başlangıçta tahtaya 44 yazıp, daha sonraki her hamlesinde tahtaya 88 ve 132 sayılarını ekleyerek 2024'ü de elde edebilir. Aslı'nın diğer sayıları elde edemeyeceğini gösterelim. $N \in \{2018, 2022\}$ olsun. Tahtaya yazılan ilk sayı a ise, bundan sonra yazılan tüm sayılar a nın katı olacaktır. Buna göre, N sayısının elde edilmesi için a sayısın N'yi bölmesi gerekir. İlk hamle dışındaki her hamlede tahtaya yazılan sayıların toplamı 5'in katı oluyor. Bundan ötürü, bir hamle sonucunda tahtadaki sayıların toplamı $\pmod 5$'te değişmez ve dolayısıyla $a = N \pmod 5$ olmak zorundadır.
$N = 2018 = 2 \cdot 1009$ sayısının iki basamaklı bir böleni yoktur. $N = 2022 = 2 \cdot 3 \cdot 337$ sayısının iki basamaklı bir böleni yoktur.

25. $m(\widehat{BAC}) = 60^\circ$ olan bir ABC üçgeninin $[BC]$ kenarı üzerinde $m(\widehat{ADB}) < 90^\circ$ şartını sağlayan bir D noktası alınıyor. $|AB| \cdot |AC| = 4$, $|BD| \cdot |CD| = 2$ ve $|AD| = \sqrt{2}$ ise, $m(\widehat{ADB})$ nedir?

Cevap: 45°. Stewart teoreminden $(|AB|^2 \cdot |CD| + |AC|^2 \cdot |BD|)/|BC| = |BD| \cdot |CD| + |AD|^2 = 4 = |AB| \cdot |AC|$ eşitliği elde edilir. Bu eşitlik $(|AB| - |AC|)(|AB| \cdot |CD| - |AC| \cdot |BD|) = 0$ eşitliğine denktir. $|AB| = |AC|$ olması durumunda ABC eşkenar üçgen olacağından $|BD| + |CD| = 2$, $|BD| \cdot |CD| = 2$ olur ve $|BD| + |CD| < 2\sqrt{|BD| \cdot |CD|}$ olduğundan buradan çözüm gelmez. $|AB| \cdot |CD| = |AC| \cdot |BD|$ durumunda AD iç açıortay olacağından $m(\widehat{BAD}) = 30^\circ$ olur. $|AB| \cdot |AC| = 4$ ve $|BD| \cdot |CD| = 2$ eşitliklerini kullanarak $|AB|/|BD| = \sqrt{2}$ bulunur. ABD üçgeninde Sinüs teoreminden $\sin(\widehat{ADB}) = \sqrt{2}/2$ gelir. Buradan da $\widehat{ADB}$ dar açı olduğundan $m(\widehat{ADB}) = 45^\circ$ elde edilir.

26. n pozitif bir tam sayı olmak üzere, $a^3 - 1$ in n ile tam bölündüğü her a tam sayısı için $a^{2020} - 1$ de n ile tam bölünüyorsa, n ye *tuhaf sayı* diyelim. Aşağıdakilerden hangisi bir tuhaf sayıdır?

Cevap: 69. p bir tuhaf asal sayı olsun. $p|a^3 - 1$ olan bir a tam sayısı ele alalım. O halde $p|a^{2020} - 1$. 3 ve 2020 aralarında asal olduğundan $p|a - 1$ elde edilir. Demek ki $p|a^3 - 1 = (a - 1)(a^2 + a + 1)$ ise $p|a - 1$ olmalı. $p = 2$ ve $p = 3$ bu şartı açıkça sağlar. $p > 3$ için $p|a^2 + a + 1$ olacak biçimde a tam sayısı bulunmamalı. O zaman $p|x^2 + 3$ olacak şekilde x $(= 2a + 1)$ tam sayısı yoktur. Başka bir deyişle $\pmod p$ de -3 kare kalan değildir. O halde $p \equiv 2 \pmod 3$. Demek ki tuhaf asal sayılar 3 ve $3k + 2$ formundaki asal sayılardır. Çinli Kalan Teoremi'nden dolayı, m ve n aralarında asal pozitif tam sayılar olmak üzere, mn tuhaf sayıdır ancak ve ancak hem m hem de n tuhaf sayıdır olduğu görülür.
61 asal ve $\equiv 1 \pmod 3 \Rightarrow 61$ tuhaf değildir. $63 = 9 \cdot 7$ ve $7 \equiv 1 \pmod 3$ $\Rightarrow 63$ tuhaf değildir. $65 = 5 \cdot 13$ ve $13 \equiv 1 \pmod 3 \Rightarrow 65$ tuhaf değildir. 67 asal ve $\equiv 1 \pmod 3 \Rightarrow 67$ tuhaf değildir. $69 = 3 \cdot 23$. Hem 3 hem de 23 tuhaf sayı olduklarından 69 da tuhaf sayıdır.

27. $x^2 - x + 1 = y^3$ ve $y^2 - y = x^3$ eşitliklerinin her ikisini de sağlayan kaç farklı (x, y) gerçel sayı ikilisi vardır?

Cevap: 1. $y = 0$ ise $x = 0$ olur ve denklemler sağlanmaz. $y \neq 0$ olsun. $(y^2 - y + 1)/y^3 = (x^3 + 1)/(x^2 - x + 1) = x + 1$ olacağından $y^2 - y = x^3 = [(y^2 - y + 1 - y^3)/y^3]^3$ ve buradan da $y^{10}(y - 1) = -(y - 1)^3(y^2 + 1)^3$ olur. $y = 1$ için $x = 0$ olur ve şartlar sağlanır. $y \neq 1$ için $y^{10} = -(y - 1)^2(y^2 + 1)^3 < 0$ olduğundan başka çözüm gelmez.

28. Her birinin uzunluğu 1 olan n tane kapalı doğru parçasının bileşimi $[0, 28]$ doğru parçasına eşittir. Bu doğru parçalarının her birinde, diğer $n-1$ doğru parçasının hiçbirinde bulunmayan en az bir nokta varsa, n en fazla kaç olabilir?

Cevap: 54. Bu doğru parçaları $I_1 = [a_1, a_1 + 1], \ldots, I_n = [a_n, a_n + 1]$ olsun. Koşul gereği $i \neq j$ iken $a_i \neq a_j$'dir ve genelliği bozmadan $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$ kabul edebiliriz. Herhangi bir $1 \leq i \leq n - 2$ için $I_i \cap I_{i+2} \neq \emptyset$ olursa $I_{i+1} \subset I_i \cup I_{i+2}$ olur ve I_{i+1} için koşul sağlamaz. Demek ki bu doğru parçalarından tek indisliler ikişerli ayrıktır ve çift indisliler de ikişerli ayrıktır. O halde tek (çift) indisli doğru parça sayısı en fazla 27 olur. Buna göre, $n \leq 2 \cdot 27 = 54$ elde edilir. Şimdi $n = 54$ için bir örnek verelim. $d = 27/53$ olmak üzere,her

$i = 1, 2, \ldots, 54$ için $a_i = (i-1)d$ olursa, I_i'nin orta noktası yalnızca I_i'ye ait olur ve koşullar sağlanır.

29. Uzayda bir D düzlemi üzerinde çakışık veya doğrusal olmayan A, B ve C noktaları alınıyor. Bu üç noktadan geçen O merkezli bir küre üzerindeki P ve Q noktaları için $|PA| = |PB| = |PC| = 30$ ve $|QA| = |QB| = |QC| = 40$ ise, O noktasının D düzlemine uzaklığı kaçtır?

Cevap: 7. ABC'nin çevrel çemberinin merkezi O_1, olsun. X noktası A, B ve C noktalarına eşit uzeklıkta bir nokta olsun. X noktasından D düzlemine inen dikme ayağının O_1 olduğu kolayca görülür. O halde P, Q ve O noktaları D düzlemine O_1 noktasında dik olan doğrunun üzerinde yer alırlar. $[PQ]$ kürenin bir çapıdır ve dolayısıyla PAQ bir dik üçgendir ve $[AO_1]$ bu üçgenin hipotenüsüne inen yüksekliktir. Buradan $|PQ| = 50$ ve $|AO_1| = 24$ olduğu kolayca bulunur ve dolayısıyla $|OO_1| = 7$ elde edilir.

30. Pozitif bölenleri toplamı 8 ile tam bölünmeyen bir pozitif tam sayıya *özel* sayı diyelim. Her biri özel sayı olan en fazla kaç ardışık pozitif tam sayı vardır?

Cevap: 7. Öncelikle $n \equiv 7 \pmod 8$ ise, n'nin özel sayı olmadığını gösterelim. $n \equiv 7 \pmod 8$ olduğundan n tam kare değildir ve n tek sayıdır. Ayrıca n'nin her d pozitif böleni için

$$\begin{aligned}
d &\equiv 1 \pmod 8 \text{ ise } \frac{n}{d} \equiv 7 \pmod 8 \\
d &\equiv 3 \pmod 8 \text{ ise } \frac{n}{d} \equiv 5 \pmod 8 \\
d &\equiv 5 \pmod 8 \text{ ise } \frac{n}{d} \equiv 3 \pmod 8 \\
d &\equiv 7 \pmod 8 \text{ ise } \frac{n}{d} \equiv 1 \pmod 8
\end{aligned}$$

geçerlidir. Dolayısıyla n'nin pozitif bölenleri, çarpımları n olacak şekilde ikişerli gruplanıp toplanırsa, n'nin pozitif bölenleri toplamının 8 ile tam böIündüğü görülür. O halde en fazla 7 tane ardışık özel sayı olabilir. $144 = 2^4 \cdot 3^2$, $145 = 5 \cdot 29$, $146 = 2 \cdot 73$, $147 = 3 \cdot 7^2$, $148 = 2^2 \cdot 37$, 149, $150 = 2 \cdot 3 \cdot 5^2$ sayılarının pozitif bölenleri toplamları sırasıyla $31 \cdot 13, 6 \cdot 30, 3 \cdot 74, 4 \cdot 57, 7 \cdot 38, 150, 3 \cdot 4 \cdot 31$ olduğundan bu ardışık 7 sayının her biri özeldir.(Not: Ardışık her 7 sayıdan biri 7 ile tam bölündüğünden ve 7 ile bölünüp 49 ile bölünmeyen bir sayı özel sayı olmadığından dolayı ardışık 7 özel sayıyı 49'un katları civarında aramak gerekir.)

31. x ve y gerçel sayılar olmak üzere $x^2-2y^2=\dfrac{3}{8}$ ise, x^4-y ifadesinin alabileceği en küçük değer nedir?

Cevap: 0. Her a gerçel sayısı için $(a-\frac{1}{2})^2 \geq 0$'dır ve buradan $a(1-a) \leq 1/4$ elde edilir. Bu eşitsizlikten $x^2-x^4=x^2(1-x^2) \leq 1/4$ ve $2y-4y^2=2y(1-2y) \leq 1/4$ olur. Bu iki eşitsizliği kullanarak $x^4-y+2y^2-x^2 \geq -3/8$ elde ederiz. Buradan da $x^4-y \geq 0$ olur. $x=1/\sqrt{2}$ ve $y=1/4$ iken eşitlik durumunu sağlanır.

32. 12×12 bir satranç tahtasının 71 birim karesi işaretlenecektir. Bu işlem, ortak bir kenar paylaşan işaretli iki birim kare bulunmayacak şekilde kaç farklı biçimde yapılabilir?

Cevap: 148. Satranç tahtasını 36 tane 2×2 kareye bölelim. Bu 2×2 karelerin 35 tanesinde iki birim kare, 1 tanesinde ise bir birim kare işaretlenecektir. İki işaretli birim kare içerecek 2×2 karelere normal, bir adet işaretli birim kare içerecek 2×2 kareye ise özel kare diyelim. Normal karelerin herhangi birinde işaretli birim karelerin seçimi kalan bütün normal karelerdeki işaretli birim kare seçimlerini tek türlü belirliyor. Normal karelerde sağ üstteki ve sol alttaki birim karelerin işaretlediğini varsayalım. Geriye kalan özel karedeki işaretlenecek birim kare, özel kare sol üst ve sağ alt köşede ise 3, değilse 2 farklı biçimde seçilebilir. Buna göre, toplamda $2\cdot(34\cdot 2+2\cdot 3)=148$ farklı işaretleme yapılabilir.