

29. Ulusal Bilim Olimpiyatları
Matematik İkinci Aşama Sınavı

Birinci Gün
5 Ocak 2022

1. Başlangıçta masadaki iki kutudan biri boş olup, diğerinde farklı renkli 29 bilye bulunmaktadır. Dolu kutuyla başlamak ve kutulara sırayla hamle yapmak üzere her hamlede sırası gelen kutudan bir veya birkaç bilye seçilip diğer kutuya aktarılıyor. Aynı bilye öbeği bir defadan fazla seçilmeden en çok kaç hamle yapılabilir?

2. Derecesi d olan gerçel katsayılı bir polinomun en az d adet katsayısı 1'e eşit olup d adet gerçel kökü varsa d nin alabileceği en büyük değer nedir?

(Not: Polinomun kökleri birbirinden farklı olmak zorunda değildir.)

3. Γ çemberi ABC üçgeninin BC kenarına X noktasında, AC kenarına ise Y noktasında teğettir. AB kenarı üzerindeki bir P noktası için XP ve YP nin Γ ile ikinci kesişimleri sırasıyla K ve L , AK ve BL nin Γ ile ikinci kesişimleri sırasıyla R ve S olsun. XR ve YS nin AB üzerinde kesiştiğini gösteriniz.

29. Ulusal Bilim Olimpiyatları
Matematik İkinci Aşama Sınavı

İkinci Gün
6 Ocak 2022

4. Dar açılı bir ABC üçgeninde $D \in [AC]$ ve $E \in [AB]$ olmak üzere $[BD]$ ve $[CE]$ açıortaylardır. D den BC ve BA ya indirilen dikmelerin ayakları sırasıyla P ve Q , E den CA ve CB ye indirilen dikmelerin ayakları sırasıyla R ve S olsun. AP ile CQ nun kesişimi X , AS ile BR nin kesişimi Y , BX ile CY nin kesişimi Z olmak üzere $AZ \perp BC$ olduğunu gösteriniz.

5. a, b, c, d pozitif tam sayıları için

$$\{a \cdot b^n + c \cdot d^n : n = 1, 2, 3, \dots\}$$

kümesinin en az bir elemanını bölen asal sayılar sonlu çoklukta ise $b = d$ olduğunu gösteriniz.

6. 2021 öğrencinin bulunduğu bir okulda her öğrencinin tam olarak k arkadaşı olup üçü de birbiriyle arkadaş olan üç öğrenci bulunmuyorsa, k nin alabileceği en büyük değer nedir?