Türkiye Bilimsel ve Teknolojik Araştırma Kurumu

16. Ulusal İlköğretim Matematik Olimpiyatı

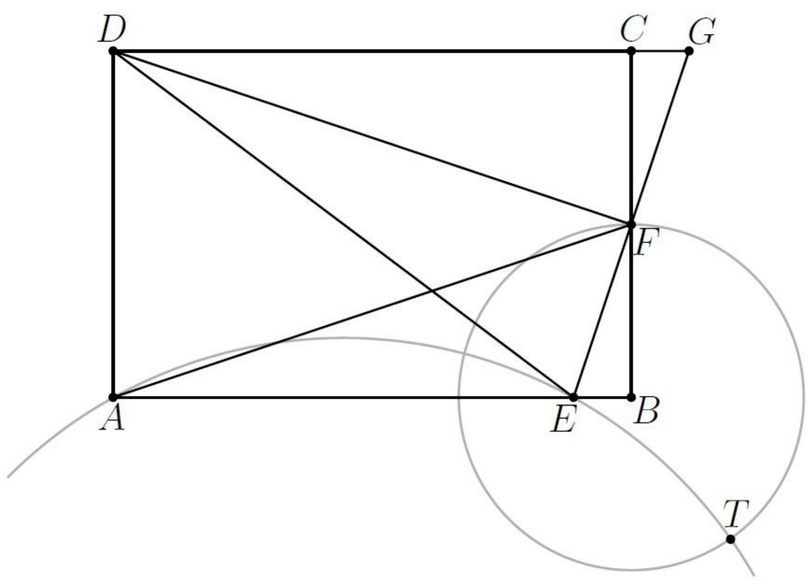
İkinci Aşama Sınavı

27 Kasım 2010

Çözümler

1. $ABCD$ dikdörtgeninin A köşesinden geçen bir çember $[AB]$ kenarını köşelerden farklı bir E noktasında kesiyor. B den geçen ve bu çembere teğet olan bir doğrunun değme noktası T olmak üzere, merkezi B olan ve T den geçen çember de $[BC]$ yi F noktasında kesiyor. $s(\widehat{CDF}) = s(\widehat{BFE})$ ise, $s(\widehat{EDF}) = s(\widehat{CDF})$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm: EF ve DC doğrularının kesişim noktası G olsun. $\angle CFG = \angle BFE = \angle CDF$ olduğuna göre, DF ve EG doğruları birbirine diktir.



Diğer taraftan, $BA \cdot BE = BT^2 = BF^2$ olduğuna göre, BAF ve BFE üçgenleri benzerdir ve dolayısıyla $\angle BAF = \angle BFE = \angle CDF$. Sonuç olarak $BF = CF$, $EF = GF$ ve $\angle EDF = \angle GDF = \angle CDF$. Çözüm tamamlanmıştır.

2. $(n+15)(n+2010)$ sayısının tam kare olmasını sağlayan kaç n pozitif tam sayısı bulunduğunu belirleyiniz.

Çözüm: Cevap: 39.

m bir pozitif tam sayı olmak üzere, $m^2 = n^2 + 2025n + 2010 \cdot 15$ olsun. Son denklem $(2n+2m+2025)(2n-2m+2025) = 1995^2$ şeklinde yazılabilir. $2n+2m+2025 = A$ ve $2n-2m+2025 = B$

olsun. O zaman n ve m sayıları; A ve B, $AB = 1995^2$, $A > B$, $A + B > 4050$ koşullarını sağlayan tam sayılar olmak üzere, $n = (A + B - 4050)/4$ ve $m = (A - B)/4$ şekilinde yazılabilir. $1995^2 \equiv 1 \pmod 4$ olduğundan bu formüller m ve n için tam sayı değerleri tanımlıyorlar.

$f(x) = x + \dfrac{1995^2}{x}$ fonksiyonu artandır: $x_2 > x_1 > 1995$ için $f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1)\left(1 - \dfrac{1995^2}{x_1 x_2}\right) > 0$ olur.

$1995^2 = 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 19^2$ sayısının 1995 ten büyük olan ilk böleni $A = 2205 = 3^2 \cdot 5 \cdot 7^2$ sayısıdır, fakat bu sayı için $f(A) > 4050$ eşitsizliği sağlanmıyor. Bundan sonraki bölen olan $A = 2527 = 7 \cdot 19^2$ için $f(A) > 4050$. $f(\cdot)$ fonksiyonu artan olduğundan 2527 sayısından büyük olan tüm bölenler için $f(A) > 4050$ olacaktır. Demek ki $1995^2 = 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 19^2$ sayısını iki eşit olmayan çarpana ayırıp büyük olan çarpanı A olarak alırsak $A = 2205$ dışındaki tüm durumlarda bir çözüm geliyor. Sonuç olarak, cevap $((2 + 1)^4 - 1)/2 - 1 = 39$ olur.

3. Bir sınavdaki her soruyu tam olarak dört öğrenci, her soru ikilisini de tam olarak bir öğrenci çözmüştür. Hiçbir öğrenci tüm soruları çözmediyse, bu sınavda en çok kaç soru bulunabileceğini belirleyiniz.

Çözüm: Cevap: 13.

$k > 4$ olmak üzere, S_1 öğrencisinin çözdüğü sorular $Q_1, \ldots, Q_k$ ve çözmediği sorulardan biri Q_{k+1} olsun. $1 \le i \le k$ olmak üzere, her (Q_i, Q_{k+1}) soru ikilisini çözen tek bir öğrenci bulunuyor. Q_{k+1} sorusunu çözen öğrenci sayısı 4 olduğuna göre, S_1 dışında bir öğrenci $Q_1, \ldots, Q_k$ sorularından ikisini çözmüştür, bu da her soru ikilisinin tam olarak bir öğrenci tarafından çözülmesi koşuluyla çelişiyor. O zaman $k \le 4$ olmak zorundadır. Q_1 sorusunu tam olarak 4 öğrenci çözmüştür. $i \ne 1$ olmak üzere, her (Q_1, Q_i) soru ikilisini bu 4 öğrenciden biri çözdüğüne göre, toplam soru sayısı en fazla $1 + 4 \cdot 3 = 13$ olacaktır.

Diğer taraftan 13 soruluk sınavın sonuçları

Q_1 sorusunu çözeneler:	S_1, S_2, S_3, S_4 ;	Q_2 sorusunu çözeneler:	S_1, S_5, S_6, S_7 ;
Q_3 sorusunu çözeneler:	S_1, S_8, S_9, S_{10} ;	Q_4 sorusunu çözeneler:	S_1, S_{11}, S_{12}, S_{13} ;
Q_5 sorusunu çözeneler:	S_2, S_5, S_9, S_{13} ;	Q_6 sorusunu çözeneler:	S_2, S_6, S_{10}, S_{11} ;
Q_7 sorusunu çözeneler:	S_2, S_7, S_8, S_{12} ;	Q_8 sorusunu çözeneler:	S_3, S_5, S_{10}, S_{12} ;
Q_9 sorusunu çözeneler:	S_3, S_6, S_8, S_{13} ;	Q_{10} sorusunu çözeneler:	S_3, S_7, S_9, S_{11} ;
Q_{11} sorusunu çözeneler:	S_4, S_5, S_8, S_{11} ;	Q_{12} sorusunu çözeneler:	S_4, S_6, S_9, S_{12} ;
Q_{13} sorusunu çözeneler:	S_4, S_7, S_{10}, S_{13}		

gibi olursa sorudaki tüm koşullar sağlanacaktır.

4. Tüm a, b pozitif gerçel sayıları için,

$$a^2b^2(a^2 + b^2 - 2) \ge (a + b)(ab - 1)$$

olduğunu kanıtlayınız.

Çözüm: Eşitsizlikte $p = ab$ ve $s = a+b$ yazarsak $p^2(s^2 - 2p - 2) \ge s(p - 1)$ elde ederiz. O zaman eşitsizlik $s^2 \ge 4p > 0$ değerleri için

$$p^2s^2 - (p-1)s - 2p^2(p+1) \geq 0$$

şeklinde yazılabilir. $s^2 \geq 4p$ olduğuna göre, $p^2s - (p-1) \geq p^2 \cdot 2\sqrt{p} + (1-p)$ olur. $p^2 \cdot 2\sqrt{p} + (1-p)$ negatif sayı değildir: $0 < p \leq 1$ ise $p^2s - (p-1) \geq p^2 \cdot 2\sqrt{p} + (1-p) > 0$ ve $p \geq 1$ ise $p^2s - (p-1) \geq (p^2 \cdot 2\sqrt{p} - p) + 1 > 0$. Buna göre,

$$p^2s^2 - (p-1)s - 2p^2(p+1) = s\left(p^2s - (p-1)\right) - 2p^2(p+1)$$

$$\geq 2\sqrt{p}\left(p^2 \cdot 2\sqrt{p} - p + 1\right) - 2p^2(p+1) = 2p^3 - 2p\sqrt{p} - 2p^2 + 2\sqrt{p} = 2\sqrt{p}\,(p-1)(p\sqrt{p} - 1) \geq 0$$

İspat tamamlanmıştır.