Türkiye Bilimsel ve Teknolojik Araştırma Kurumu

18. Ulusal Ortaokul Matematik Olimpiyatı

İkinci Aşama Sınavı

23 Kasım 2013

Çözümler

1. $x+y+z=0$ ve $x^2+y^2+z^2=6$ koşullarını sağlayan x, y, z gerçel sayıları için,

$$|(x-y)(y-z)(z-x)|$$

ifadesinin alabileceği en büyük değeri belirleyiniz.

Çözüm : Cevap: $6\sqrt{3}$.

Genelliği bozmadan $x \geq y \geq z$ kabul edebiliriz. $a=x-y$ ve $b=y-z$ olarak tanımlarsak $ab(a+b)$ ifadesinin alabileceği en büyük değeri bulmamız gerekecektir. $x+y+z=0$ ve $x^2+y^2+z^2=6$ olduğundan $a^2+b^2+(a+b)^2=(x-y)^2+(y-z)^2+(x-z)^2=3(x^2+y^2+z^2)-(x+y+z)^2=18$ elde edilir. Buna göre, $a^2+ab+b^2=9$ olur. Arirmetik-Geometrik ortalama eşitsizliğinden

$$ab \leq \frac{(a+b)^2}{4} \leq \frac{a^2+ab+b^2}{3}=3$$

ve sonuç olarak

$$ab(a+b) \leq 3 \cdot 2\sqrt{3}=6\sqrt{3}$$

elde dilir. Eşitlik $x=\sqrt{3}, y=0, z=-\sqrt{3}$ durumunda sağlanır.

2. $p^4+2p+q^4+q^2=r^2+4q^3+1$ eşitliğini sağlayan tüm (p,q,r) asal sayı üçlülerini bulunuz.

Çözüm : Cevap: $(p,q,r)=(2,5,13)$.

$r=2$ durumunda $p^4+2p+q^4+q^2=4q^3+5$ olur. Burada $q=2$ veya 3 olmak zorundadır, çünkü $q \geq 5$ iken $q^4+q^2>4q^3+5$'tir. $q=2$ durumunda $p^4+2p=17$ olduğundan çözüm gelmiyor. $q=3$ durumunda $p^4+2p=23$ olduğundan çözüm gelmiyor. Demek ki r tek ve denklemin sağ tarafı çifttir. O zaman $2p+q^4+q^2=2p+q^2(q^2+1)$ çift ve dolayısıyla p^4 çifttir: $p=2$. Buna göre $r^2=q^4+q^2-4q^3+19$ olur. Şimdi $q \neq 2,3,5$ durumlarında

$$(q^2-2q-2)^2<q^4+q^2-4q^3+19<(q^2-2q-1)^2$$

olduğunu gösterelim. İlk eşitsizlik $(q-5)(q-3)>0$ ve ikinci eşitsizlik de $q^2+4q>18$ eşitsizliğine denktir. Demek ki $q \neq 2,3,5$ durumlarında $r^2=q^4+q^2-4q^3+19$ sayısı iki ardışık tam kare arasındadır ve dolayısıyla çözüm yoktur. $q=2$ durumunda $r^2=7$, $q=3$ durumunda $r^2=1$, $q=5$ durumunda $r^2=169$ olur. Sonuç olarak tek çözüm $(2,5,13)$ olur.

3. $|AC| > |AB|$ koşulunu sağlayan bir ABC üçgeninin $[AB]$ ve $[AC]$ kenarlarına sırasıyla, D ve E noktalarında teğet olan bir çember, ABC üçgeninin çevrel çemberini K ve L noktalarında kesiyor. Sırasıyla, $[AB]$ ve $[AC]$ kenarları üstünde yer alan X ve Y noktaları

$$\frac{|AX|}{|AB|} = \frac{|CE|}{|BD| + |CE|} \quad \text{ve} \quad \frac{|AY|}{|AC|} = \frac{|BD|}{|BD| + |CE|}$$

eşitliklerini sağlıyorsa, XY, BC, KL doğrularının noktadaş olduğunu kanıtlayınız.

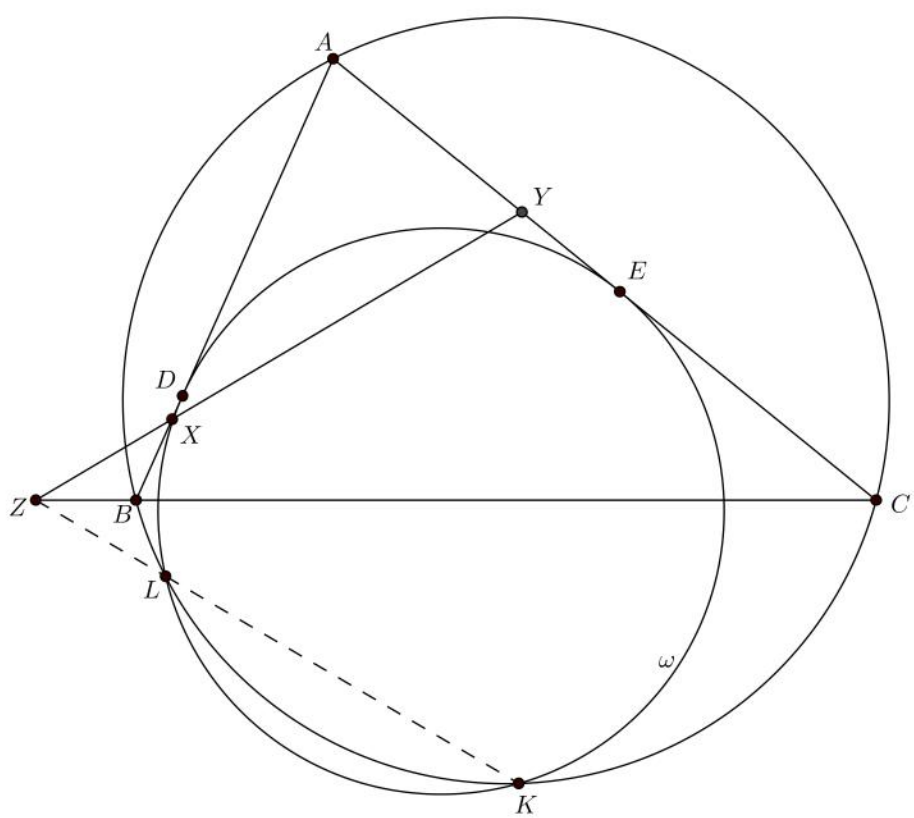
Çözüm : $BD = a, CE = b, AD = AE = c$ olsun.

$$AX = \frac{AB \cdot CE}{BD + CE} = \frac{(a+x)b}{a+b} \quad \text{ve} \quad AY = \frac{AC \cdot BD}{BD + CE} = \frac{(b+x)a}{a+b}$$

olduğundan

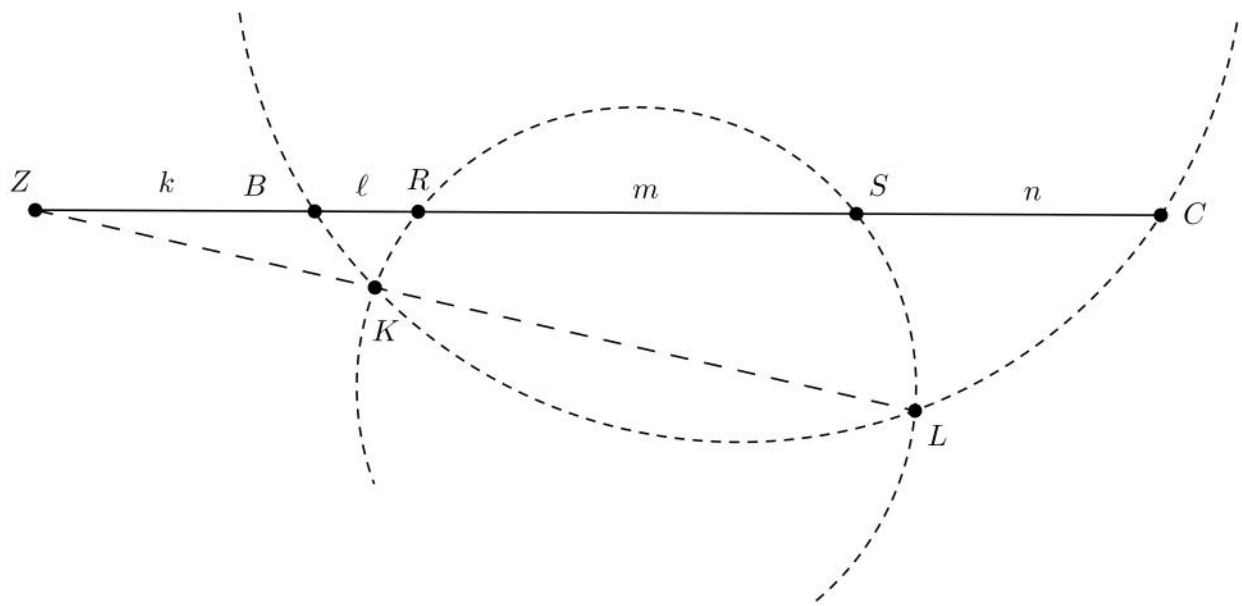
$$BX = AB - AX = \frac{(a+x)a}{a+b} \quad \text{ve} \quad CY = AC - AY = \frac{(b+x)b}{a+b}$$

elde ederiz. DE ve BC doğrularının kesişim noktası Z olsun. Menelaus teoreminden



$$\frac{ZB}{ZC} = \frac{BX}{AX} \cdot \frac{AY}{CY} = \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} = \frac{a^2}{b^2}$$

bulunur. Z, K, L noktalarının doğrusal olduklarını göstermemiz için Z'nin ABC üçgeninin çevrel çemberi ABC ve ABC'nın kuvvet ekseni üzerinde yer aldığını göstermemiz yeterlidir. ω ve BC doğrusunun kesişim noktaları R and S olsun. $(R \in [BS])$. $ZB = k$, $BR = \ell$, $RS = m$, $SC = n$ olsun B ve C noktalarının ω çemberine göre kuvvetlerinden



$$a^2 = BE^2 = BR \cdot BS = \ell(\ell + m) \quad \text{ve} \quad b^2 = CD^2 = CS \cdot CR = n(m+n)$$

elde edilir ve böylece

$$\frac{\ell(\ell+m)}{n(m+n)} = \frac{BR \cdot BS}{CS \cdot CR} = \frac{BE^2}{CD^2} = \frac{a^2}{b^2} = \frac{ZB}{ZC} = \frac{k}{k+\ell+m+n}$$

olur. Buradan $kn^2 + (km - \ell^2 - \ell m)n - \ell(\ell+m)(k+\ell+m) = 0$ bulunur. Son eşitlik

$$[kn - \ell(k+\ell+m)](m+n+\ell) = 0$$

denklemine denktir. Dolayısıyla, $m + n + \ell = BC > 0$ olduğu için $kn = \ell(k+\ell+m)$ olmalıdır ve buradan da $k(k+\ell+m+n) = (k+\ell)(k+\ell+m)$ buluruz. Sonuç olarak, $ZB \cdot ZC = ZR \cdot ZS$ olur ve Z noktası bu iki çemberin kuvvet eksenindedir.

4. Aybike bir çemberin çevresine istediği tek sayıda kutuyu yerleştirip, 2013 boncuğu bu kutulardan bazılarına istediği biçimde dağıtıyor. Sonra Berk bu kutulardan birini seçiyor. Daha sonra da Aybike, Berk'in seçmediği kutulardan yarısını herhangi ikisi ardışık olmayacak biçimde seçiyor. Aybike seçtiği kutularda k tane boncuk olmasını garantileyebiliyorsa, k nin alabileceği en büyük değeri belirleyiniz.

Çözüm : Cevap: 1342.

İlk önce Aybike'nin 1342 boncuk alabileceğini gösterelim. Bunun için Aybike çember etrafına 9 kutu yerleştiriyor, kutuları saat yönünde $1, \ldots, 9$ olarak numaralandırıp 1, 4 ve 7 numaralı kutuların her birine 671 boncuk koyuyor. Berk'in her seçiminde Aybike'nin iki tane boş olmayan kutuyu seçebileceği açıktır.
Şimdi Aybike'nin 1342 den daha çok boncuğu almayı garantilemesinin imkansız olduğunu gösterelim. Bir $2m + 1$ sayısı için boncukların uygun şekilde dağıtılarak bunun yapılabileceğini varsayalım.

Kutuları saat yönünde $1, \ldots, 2m+1$ olarak numaralandıralım. Aybike'nin seçmediği kutulardan sadece iki tanesi birbirine komşu olacaktır. Genelliği bozmadan bu kutuların numaraları $2m+1$ ve 1 olsun. Aybike tarafından seçilen kutular A türü kutu, seçilmeyen kutular ise B türü kutu olsun. Varsayıma göre, A türü kutulardaki toplam boncuk sayısı 1342' den fazla olacaktır. Buna göre, $1 < i \leq t$ numaralı A türü kutularda toplam boncuk sayısı en az 672 ve $t \leq i < 2m+1$ numarallı A türü kutularda toplam boncuk sayısı en az 672 olacak şekilde bir t numarası bulunacaktır. Bu durumda Berk başlangıçta t numaralı kutuyu seçerse, ya $1 < i \leq t$ numaralı ya da $t \leq i < 2m+1$ numaralı A türü kutuların tümü Aybike tarafından seçilemez ve sonuç olarak Aybike'nin seçtiği kutularda en fazla 1341 boncuk bulunmuş olur. Bu çelişki sorunun çözümünü tamamlıyor.