Türkiye Bilimsel ve Teknolojik Araştırma Kurumu

17. Ulusal İlköğretim Matematik Olimpiyatı
İkinci Aşama Sınavı

24 Kasım 2012

Çözümler

1. x, y tam sayılar ve p asal sayı olmak üzere,

$$x^2 - 3xy + p^2y^2 = 12p$$

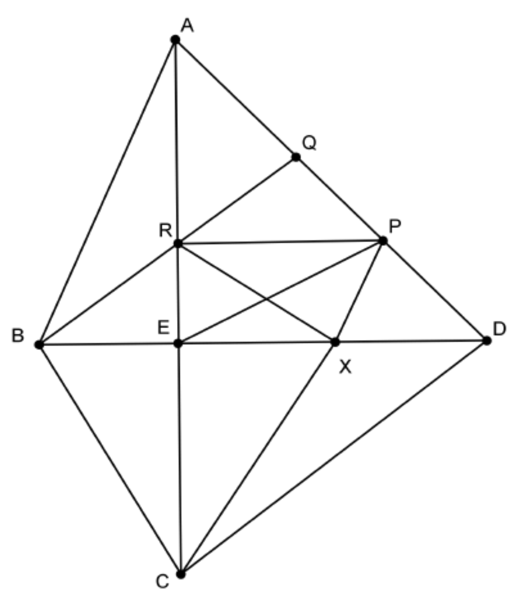
eşitliğini sağlayan tüm (x, y, p) üçlülerini bulunuz.

Çözüm: Cevap: $(x, y, p) = (-6, 0, 3), (0, -2, 3), (0, 2, 3), (6, -2, 3), (6, 0, 3), (6, 2, 3)$.

$x^2 + p^2y^2 \equiv 0 \pmod 3$ olduğundan, $p \neq 3$ olursa $x^2 + y^2 \equiv 0 \pmod 3$ ve sonuç olarak $x \equiv y \equiv 0 \pmod 3$. Bu durumda $9 \mid (x^2 - 3xy + p^2y^2)$ ve bu da $9 \nmid 12$ ile çelişiyor. Sonuç olarak $p = 3$ ve $x^2 - 3xy + 9y^2 = 36$. Buradan $3 \mid x$ gelir. $x = 3k$ yazarak $k^2 - ky + y^2 - 4 = 0$ ikinci dereceli denklemi elde edilir. Diskriminant $\Delta = 16 - 3y^2 = m^2$ olduğuna göre, ya $y^2 = 0$ ya da $y^2 = 4$ olacaktır. Buradan tüm çözümlerin $(-6, 0, 3), (0, -2, 3), (0, 2, 3), (6, -2, 3), (6, 0, 3), (6, 2, 3)$ olduğu görülür.

2. Bir $ABCD$ dışbükey dörtgeninin köşegenleri birbirine dik olarak E noktasında kesişiyor. $[AD]$ kenarı üstünde yer alan A dan farklı bir P noktası $|PE| = |EC|$ koşulunu sağlıyor. BCD üçgeninin çevrel çemberi de $[AD]$ yi yine A dan farklı bir Q noktasında kesiyor. A dan geçen ve EP doğrusuna P noktasında teğet olan çember ise, $[AC]$ doğru parçasını R noktasında kesiyor. B, R, Q noktaları doğrudaş ise, $s(\widehat{BCD}) = 90°$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm:



$\angle EAP = \alpha$ ve $\angle ECD = \beta$ olsun. O zaman $\angle RPE = \alpha$ olacaktır. $[ED]$ doğru parçası üzerinde $\angle RPX = 90^o$ olacak şekilde X noktası alınıyor. O zaman R, P, X, E çemberdeştir ve sonuç olarak $\angle RXE = \alpha$. Demek ki A, R, X, D noktaları da çemberdeştir. Sonuç olarak $ER \cdot EA = EX \cdot ED$ olur. Diğer taraftan $ER \cdot EA = EP^2 = EC^2$. Buna göre, $EX \cdot ED = EC^2$ ve dolayısıyla $\angle EXC = \beta$. $\angle QDC = 180^o - \alpha - \beta$ olduğuna göre, $\angle QBC = \angle RBC = \alpha + \beta$. Demek ki Q, B, C, D noktaları çemberdeş ve B, Q, R noktaları doğrusaldır. Diğer taraftan $\angle RXC = \alpha + \beta$ ve sonuç olarak X noktası B noktasının E noktasına göre simetriğidir. Buna göre, $\angle EBC = \angle EXC = \beta$. Sonuç olarak $\angle BCD = \angle BCE + \angle ECD = (90° - \beta) + \beta = 90°$. İspat tamamlanmıştır.

3. $a^3 + b^3 + c^3 = a^4 + b^4 + c^4$ eşitliğini sağlayan tüm a, b, c pozitif gerçel sayıları için,

$$\frac{a}{a^2 + b^3 + c^3} + \frac{b}{a^3 + b^2 + c^3} + \frac{c}{a^3 + b^3 + c^2} \geq 1$$

olduğunu kanıtlayınız.

Çözüm:

$$f(a,b,c) = \frac{a}{a^2 + b^3 + c^3} + \frac{b}{a^3 + b^2 + c^3} + \frac{c}{a^3 + b^3 + c^2}$$

ve

$$g(a,b,c) = a(a^2 + b^3 + c^3) + b(a^3 + b^2 + c^3) + c(a^3 + b^3 + c^2)$$

olsun. Cauchy-Schwarz eşitsizliğinden $f(a,b,c) \cdot g(a,b,c) \geq (a+b+c)^2$ gelir. $a^3 + b^3 + c^3 = a^4 + b^4 + c^4$ olduğuna göre, $g(a,b,c) = (a+b+c)(a^3 + b^3 + c^3)$ olur. Buna göre, ispatı tamamlamak için

$$a + b + c \geq a^3 + b^3 + c^3 \qquad (1)$$

eşitsizliğini göstermemiz yeterli olacaktır. Yine Cauchy-Schwarz eşitsizliğinden,

$$(a+b+c)(a^3 + b^3 + c^3) \geq (a^2 + b^2 + c^2)^2$$

ve

$$(a^2 + b^2 + c^2)(a^4 + b^4 + c^4) \geq (a^3 + b^3 + c^3)^2$$

yazabiliriz. Son olarak $a^3 + b^3 + c^3 = a^4 + b^4 + c^4$ olduğuna göre, (1) son iki eşitsizlikten elde edilir.

4. İçlerinde çeşitli renklerde toplar bulunan 2012 torbayı k kutuya,

i. herhangi bir kutudaki tüm torbalar aynı renkte bir top içerecek veya

ii. herhangi bir kutudaki her torba, bu kutudaki diğer torbalardan hiçbirinin içermediği renkte bir top içerecek

biçimde yerleştirmek istiyoruz. Torbalardaki topların sayıları ve renkleri ne olursa olsun, böyle bir yerleştirmeyi olanaklı kılan en küçük k sayısını belirleyiniz.

Çözüm : Cevap: 62.

İlk önce $k \geq 62$ olduğunu gösterelim. 62 torbanın her birinin içinde sadece 1 rengine boyalı bir top, 61 torbanın her birinin içinde sadece 2 rengine boyalı bir top, ..., 1 torbanın içinde sadece

63 rengine boyalı bir top olsun. Bu 1953 torbanın 62 kutuya yerleştirilemeyeceğini gösterelim. İçinde l renkli top bulunan torbaya l renkli torba diyelim. Kurallara göre bir kutuda iki tane l renkli torba bulunuyorsa bu kutudaki tüm torbalar l renkli oalacaktır. Sadece aynı renkli torbalar içeren kutuya tek renkli kutu diyelim. Bu 1953 torbanın kutulara herhangi bir dağılımını inceleyelim. Bu dağılımda tek renkli kutuların sayısı s olsun. O zaman en az $63 - s$ tane 1 renkli torba birbirinden farklı kutularda bulunacaktır. Sonuç olarak en az $s+(62-s) = 62$ kutu gerekecektir.

Şimdi 62 kutunun yeterli olacağını gösterelim.

Lemma. Aynı renkli top içeren torba sayısı en fazla m olan her torba öbeği en fazla m kutuya yerleştirilebilir.
İspat: Herhangi bir l_1 rengi seçelim. $l_1 \leq m$ olduğundan l_1 renkli top içeren tüm torbaları farklı kutulara yerleştirebiliriz. Herhangi bir l_2 rengi seçelim. $l_2 \leq m$ olduğundan kalan torbalardan l_2 renkli top içeren tüm torbaları farklı kutulara yerleştirebiliriz. Her defa yeni bir renk seçerek benzer şekilde tüm torbaları m kutuya yerleştirebiliriz. O zaman her kutudaki her torba, bu kutudaki diğer torbalardan hiçbirinin içermediği renkte bir top içermiş olacak. İspat tamamlanmıştır.

İlk önce en çok sayıda torbada bulunan bir n_1 rengi seçelim. Bu sayı 62 den fazla değilse lemmayı kullanarak torbaları 62 kutuya yerleştirebiliriz. Aksi takdirde bu torbaları (en az 63 torba) aynı kutuya yerleştirelim ve kalan torbalar öbeğinde en çok sayıda torbada bulunan bir n_2 rengi seçelim. Bu sayı 61 den fazla değilse lemmayı kullanarak kalan torbaları kalan 61 kutuya yerleştirebiliriz. Aksi takdirde bu torbaları (en az 62 torba) yeni bir kutuya yerleştirelim ve benzer şekilde devam edelim. $63 + 62 + ... + 1 = 2017 > 2012$ olduğundan bir a pozitif tam sayısı için $a - 1$ adım sonucunda en fazla $63 - a$ torbada ortak renkli top bulunacaktır. Lemmayı kullanarak bu torbaları en fazla $63 - a$ tane kullanılmamış kutuya yerleştirebiliriz. İlk $a - 1$ adımda $a - 1$ kutu kullanıldığından toplamda en fazla 62 kutu yeterli olacaktır.