Türkiye Bilimsel ve Teknolojik Araştırma Kurumu

16. Ulusal İlköğretim Matematik Olimpiyatı

İkinci Aşama Sınavı

3 Aralık 2011

Çözümler

1. Tüm x, y pozitif gerçel sayıları için,

$$1 \leq \frac{(x+y)(x^3+y^3)}{(x^2+y^2)^2} \leq \frac{9}{8}$$

olduğunu gösteriniz.

Çözüm: Cauchy-Schwarz eşitsizliğinden $(x+y)(x^3+y^3) \geq (x^2+y^2)^2$ olur. Buna göre,

$$1 \leq \frac{(x+y)(x^3+y^3)}{(x^2+y^2)^2}$$

bulunur ve ilk eşitsizlik ispatlanmış olur.

$0 \leq ((x-y)^2 - 2xy)^2$ olduğuna göre,

$$4xy(x-y)^2 \leq (x-y)^4 + 4x^2y^2$$

elde edilir. Parantezleri açarsak

$$8x^3y + 8y^3x \leq x^4 + 18x^2y^2 + y^4$$

gelir. Son eşitsizlikte her iki tarafa $8x^4 + 8y^4$ eklersek

$$8x^3y + 8y^3x + 8x^4 + 8y^4 \leq 9x^4 + 18x^2y^2 + 9y^4$$

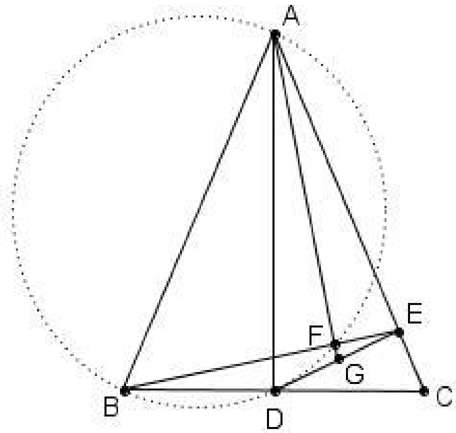
elde edilir. Bunu da $8(x+y)(x^3+y^3) \leq 9(x^2+y^2)^2$ şeklinde yazabiliriz. Sonuç olarak

$$\frac{(x+y)(x^3+y^3)}{(x^2+y^2)^2} \leq \frac{9}{8}$$

eşitsizliği de ispatlanmıştır.

2. $|AB| = |AC|$ olan bir ABC üçgeninde $[BC]$ nin orta noktası D ve D den AC doğrusuna inilen dikmenin ayağı E dir. BE doğrusu ABD üçgeninin çevrel çemberini ikinci kez F noktasında kesiyor. DE ve AF doğrularının kesişim noktası G ise, $|DG| = |GE|$ olduğunu kanıtlayınız.

Çözüm:



$\angle ACB = \alpha$ olsun. $|AB| = |AC|$ olduğundan dolayı $\angle ABD = \angle ABC = \alpha$ olur. $DE \perp AC$ ve $AD \perp BC$ olduğundan $\angle EDC = 90° - \alpha$ ve $\angle ADE = \alpha$ gelir. Sonuç olarak $\angle ABD = \angle ADE = \alpha$ olur. Dolayısıyla DE doğrusu ABD üçgeninin çevrel çemberine teğettir. O zaman kuvvet bağıntısına göre,

$$|GD|^2 = |GF| \cdot |GA| \qquad (1)$$

olur. Diğer taraftan $\angle BFA = \angle ADB = 90°$. Demek ki EF doğrusu AEG dik üçgeninin hipotenüsüne diktir. Sonuç olarak

$$|GE|^2 = |GF| \cdot |GA| \qquad (2)$$

olur. (1) ve (2) den $|GD| = |GE|$ elde edilir.

3. $m < n$ pozitif tam sayılar olmak üzere, $p = \dfrac{n^2 + m^2}{\sqrt{n^2 - m^2}}$ olsun.

a. p nin asal sayı olmasını sağlayan üç tane (m, n) pozitif tam sayı ikilisi bulunuz.

b. p bir asal sayı ise, $p \equiv 1 \pmod 8$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm:

a. $(m, n) = (6, 10), (12, 15)$ ve $(30, 78)$ için p sırasıyla

$$\frac{10^2 + 6^2}{8} = 17, \quad \frac{15^2 + 12^2}{9} = 41 \quad \text{ve} \quad \frac{78^2 + 30^2}{72} = 97$$

değerlerini alır.

b. $k = \sqrt{n^2 - m^2}$ olsun. O zaman (k, m, n) bir Pisagor üçlüsüdür. O halde $m = d(x^2 - y^2)$ veya $m = 2dxy$, $n = d(x^2 + y^2)$ ve $obeb(x, y) = 1$ olacak şekilde d, x, y pozitif tam sayıları bulunur.

Durum 1. $m = d(x^2 - y^2)$. O zaman $p = \dfrac{d(x^4 + y^4)}{xy}$ olur. $obeb(x, y) = 1$ olduğundan ötürü $obeb(xy, x^4 + y^4) = 1$ olur ve böylece $xy|d$ olduğu görülür. p bir asal sayı ve $x^4 + y^4 \geq 17$ olduğundan $d = xy$ ve $p = x^4 + y^4$ elde edilir. x ve y sayılarından biri çift diğeri tek olduğu için $p = x^4 + y^4 \equiv 1 \pmod 8$ bulunur.

Durum 2. $m = 2dxy$. O zaman $p = d(x^2 - y^2) + \dfrac{8dx^2y^2}{x^2 - y^2}$ olur. $obeb(xy, x^2 - y^2) = 1$ ve $\dfrac{8dx^2y^2}{x^2 - y^2}$ bir tam sayı olduğu için $x^2 - y^2 | 8d$ elde edilir. Öte yandan, p bir asal sayı olduğu için d ve $\dfrac{8d}{x^2 - y^2}$ aralarında asal sayılardır. O halde $x^2 - y^2$ sayısı d'nin bir tam katıdır. Sonuç olarak $x^2 - y^2 = d, 2d, 4d$ veya $8d$ olmalı.

$x^2 - y^2 = d$ ise, $p = d^2 + 8x^2y^2$ bir asal sayı olduğu için d tektir ve böylece $p \equiv 1 \pmod 8$ elde edilir.
$x^2 - y^2 = 2d$ ise, $p = 2(d^2 + 2x^2y^2)$ bir asal sayı değildir.
$x^2 - y^2 = 4d$ ise, $p = 2(2d^2 + x^2y^2)$ bir asal sayı değildir.
$x^2 - y^2 = 8d$ ise, $p = 8d^2 + x^2y^2$ bir asal sayı olduğu için hem x hem de y tek sayıdır ve böylece $p \equiv 1 \pmod 8$ elde edilir.

4. Öğretmen sınıfa 20 tane matematik ve 11 tane fizik sorusundan oluşan bir liste vererek, her öğrencinin tam olarak 1 matematik ve 1 fizik sorusu seçip çözmesini istiyor. Aynı soru ikilisi birden fazla öğrenci tarafından seçilmemişse ve her öğrencinin seçtiği iki sorudan en az biri kendisinden başka en çok bir öğrenci tarafından seçilmişse, bu sınıfta en çok kaç öğrenci olabileceğini belirleyiniz.

Çözüm: Cevap: 54.

$1 \le i \le 20$, $1 \le j \le 11$ ikilisi için bir öğrenci tarafından i numaralı matematik ve j numaralı fizik sorusu seçilmişse $a_{i,j} = 1$, diğer durumlarda $a_{i,j} = 0$ olsun. Soruda $A = \sum_{i=1}^{20} \sum_{j=1}^{11} a_{i,j}$ ifadesinin

- $a_{i,j} = 0$ veya 1
- bir (k, l) ikilisi için $a_{k,l} = 1$ ise $\sum_{j=1}^{16} a_{k,j}$ ve $\sum_{i=1}^{20} a_{i,l}$ toplamlarının en az biri en fazla 2 olacak

koşulları altında en büyük değerinin bulunması gerekiyor. $A \le 54$ olduğunu gösterelim. $a_{k,l} = 1$ olsun. $\sum_{j=1}^{11} a_{k,j} \le 2$ ise k sayısına *satır-iyi* indis, $\sum_{i=1}^{20} a_{i,l} \le 2$ ise l sayısına *sütun-iyi* indis diyelim.
k nin satır-iyi değerlerinin sayısı 20 ise, $A \le 2 \cdot 20 = 40$ olur.
l nin sütun-iyi değerlerinin sayısı 11 ise, $A \le 2 \cdot 11 = 22$ olur.
k nin satır-iyi değerlerinin sayısı 19 ise, $A \le 2 \cdot 19 + 11 = 49$ olur.
l nin sütun-iyi değerlerinin sayısı 10 ise, $A \le 2 \cdot 10 + 20 = 40$ olur.

k nin satır-iyi değerlerinin sayısı en fazla 18 ve l nin sütun-iyi değerlerinin sayısı en fazla 9 ise, satır veya sütun iyi değerlerinin toplam sayısı en fazla 27 oluyor. A nın sıfırdan farklı olan her $a_{k,l}$ terimi için k ve l sayılarından en az biri iyi indis olmak zorundadır. Her satır-iyi k değerleri için en fazla iki farklı $a_{k,l}$ sıfırdan farklı oalbilir. Her sütun-iyi l değerleri için en fazla iki farklı $a_{k,l}$ sıfırdan farklı olabilir. Buna göre, A sayısı iyi indis değerlerinin toplam sayısının iki katından fazla değildir: $A \le 27 \cdot 2 = 54$.

$A = 54$ için bir örnek verelim: $i \in \{1, 20\}$ ve $j \in \{1, 11\}$ olmak üzere, $(1, 1), (1, 11)$, $(20, 1)$ ve $(20, 11)$ dışındaki tüm (i, j) ikilileri için $a_{i,j} = 1$, diğer tüm (i, j) ikilileri için $a_{i,j} = 0$ olursa, sorudaki koşullar sağlanır.