Türkiye Bilimsel ve Teknolojik Araştırma Kurumu

19. Ulusal Ortaokul Matematik Olimpiyatı

İkinci Aşama Sınavı

15 Kasım 2014

Çözümler

1. $a+b+c+abc=4$ koşulunu sağlayan tüm a,b,c pozitif gerçel sayıları için,

$$\left(1+\frac{a}{b}+ca\right)\left(1+\frac{b}{c}+ab\right)\left(1+\frac{c}{a}+bc\right)\geq 27$$

olduğunu gösteriniz.

Çözüm: Eşitsizliğin sol tarafı

$$\left(1+\frac{a}{b}+ca\right)\left(1+\frac{b}{c}+ab\right)\left(1+\frac{c}{a}+bc\right)=(a+b+c+abc)\left(a+b+c+abc+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)-1$$

olarak yazılabilir. Buna göre, $a+b+c+abc=4$ olduğundan eşitsizlik

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geq 3$$

şekline dönüşüyor. İlk önce $abc\leq 1$ olduğunu gösterelim. $abc>1$ olursa $a+b+c=4-abc<3$ ve AGO eşitsizliğinden

$$3>a+b+c\geq 3\sqrt[3]{abc}>3$$

çelişkisi elde edilir. Sonuç olarak $abc\leq 1$. Bu eşitsizliği kullanarak yine AGO eşitsizliğinden

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geq\frac{3}{\sqrt[3]{abc}}\geq 3$$

olur. İspat tamamlanmıştır.

2. n pozitif bir tam sayı olmak üzere, $19^{4n}+4$ sayısının en az kaç farklı asal çarpanı olabileceğini belirleyiniz.

Çözüm: Cevap: 3.

$19^{4n}+4$ sayısını çarpanlarına ayıralım:

$$19^{4n}+4=19^{4n}+4\cdot 19^{2n}+4-4\cdot 19^{2n}=(19^{2n}+2)^2-(2\cdot 19^{n})^2$$

$$= (19^{2n} - 2 \cdot 19^n + 2)(19^{2n} + 2 \cdot 19^n + 2).$$

$n = 1$ durumunda $19^4 + 4 = 13 \cdot 25 \cdot 401$.

Şimdi farklı asal çarpan sayısının en az 3 olduğunu göstereceğiz.

$$d = obeb(19^{2n} - 2 \cdot 19^n + 2, 19^{2n} + 2 \cdot 19^n + 2)$$

olsun. d bir tek sayıdır ve

$$d|((19^{2n} - 2 \cdot 19^n + 2) - (19^{2n} + 2 \cdot 19^n + 2)) = 4 \cdot 19^n.$$

Buna göre, d sayısı $4 \cdot 19^{2n}$ sayısını bölüyor. Diğer taraftan,

$$d|((19^{2n} - 2 \cdot 19^n + 2) + (19^{2n} + 2 \cdot 19^n + 2)) = 2 \cdot 19^{2n} + 4.$$

Sonuç olarak d sayısı $8(2 \cdot 19^{2n} + 4) - (4 \cdot 19^n)^2 = 32$ sayısını da bölüyor. d bir tek sayı olduğuna göre, $d = 1$ olur.

5 sayısı $19^{4n} + 4$ sayısını bölüyor fakat 5 sayısının kuvvetleri $\pmod{19}$ da 5,6,11,17,9,7,16,4,1 olduğu için $19^{2n} \pm 2 \cdot 19^n + 2 \neq 5^k$. Sonuç olarak n sayısının tüm değerlerinde $19^{4n} + 4$ sayısının en az 3 farklı asal böleni vardır.

3. Her renkten 19 ar tane olmak üzere, 106 farklı renkte 2014 top bir çemberin çevresine nasıl dizilirse dizilsin, aralarında en az 53 farklı renkte topun yer aldığı ardışık n top bulunuyorsa, n sayısının alabileceği en küçük değeri belirleyiniz.

Çözüm: Cevap: 971.

Aynı renkli toplar ardışık şekilde dizilirse n sayısı en az $19 \cdot 51 + 2 = 971$ olmak zorundadır.

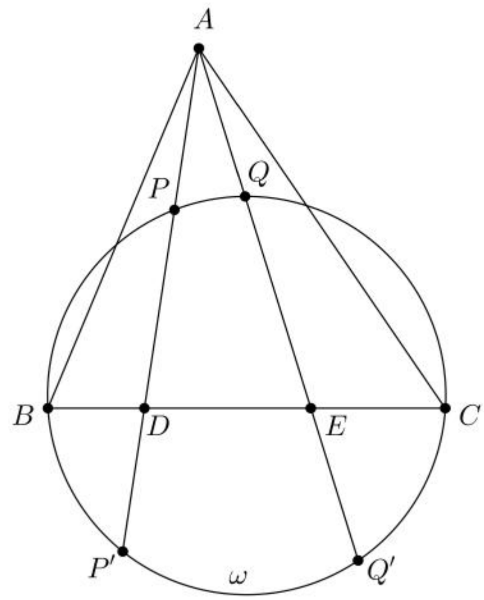
2014 topun bir çemberin etrafındaki herhangi bir dizilimini ele alalım. Bu dizilimde 53 farklı renkte topun yer aldığı ardışık toplardan oluşan ve en az top içeren grup G olsun (birden fazla böyle grup varsa bunlardan herhangi birini alıyoruz). G grubundaki top sayısı $l(G)$ olsun. G grubundaki saat yönündeki ilk ve son topların renkleri sırasıyla a ve b olsun. G grubu en az sayıda top içerdiği için $a \neq b$ ve bu grupta kalan topların her birinin rengi a ve b renklerinden farklıdır. Sonuç olarak, $l(G) \leq 19 \cdot (53 - 2) + 2 = 971$. İspat tamamlanmıştır.

4. Diklik merkezi H olan dar açılı bir ABC üçgeninin $[BC]$ kenarı üstündeki birbirinden farklı D ve E noktaları için, AD ve AE doğru parçaları BHC üçgeninin çevrel çemberini sırasıyla P ve Q noktalarında kesiyor.

$$|BD|^2 + |CD|^2 = 2|DP| \cdot |DA| \text{ ve } |BE|^2 + |CE|^2 = 2|EQ| \cdot |EA|$$

eşitlikleri sağlanıyorsa, $|BP| = |CQ|$ olduğunu kanıtlayınız.

Çözüm: BHC üçgeninin çevrel çemberi ω olsun. AP ve AQ doğruları ω yı ikinci kez sırasıyla P' ve Q' noktalarında kessin.



A, D, E noktalarının ω ya göre kuvvetlerinin hesaplanmasından

$$AP \cdot AP' = AQ \cdot AQ'$$
$$BD \cdot CD = DP \cdot DP'$$
$$BE \cdot CE = EQ \cdot EQ'$$

eşitlikleri elde edilir. $BD^2 + CD^2 = 2 \cdot DP \cdot DA$ olduğundan

$$BC^2 = (BD + CD)^2 = BD^2 + CD^2 + 2 \cdot BD \cdot CD = 2 \cdot DP \cdot DA + 2 \cdot DP \cdot DP' = 2 \cdot DP \cdot AP'$$

elde edilir. Benzer biçimde

$$BC^2 = (BE + CE)^2 = BE^2 + CE^2 + 2 \cdot BE \cdot CE = 2 \cdot EQ \cdot EA + 2 \cdot EQ \cdot EQ' = 2 \cdot EQ \cdot AQ'$$

olur. Dolayısıyla

$$\frac{DP}{EQ} = \frac{AQ'}{AP'} = \frac{AP}{AQ}$$

bulunur. Sonuç olarak, PQ ve BC doğruları paraleldir ve $BPQC$ dörtgeni bir yamuktur. $BPQC$ dörtgeni aynı zamanda bir kirişler dörtgeni de olduğu için bu dörtgen bir ikizkenar yamuktur ve dolayısıyla $BP = CQ$ elde ederiz.