

28. Ulusal Bilim Olimpiyatları
Ortaokul Matematik İkinci Aşama Sınavı

5 Mart 2021

1. $2x^2 + y^2 + 7 = 2(x + 1)(y + 1)$ eşitliğini sağlayan tüm (x, y) gerçel sayı ikililerini belirleyiniz.

2. m ve n pozitif tam sayılar olmak üzere

$$\frac{17m + 43n}{m - n}$$

oranı bir tam sayıysa (m, n) ikilisine *özel ikili* diyelim. $1, 2, \dots, 2021$ sayıları arasından herhangi ikisi özel ikili oluşturmayan en çok kaç sayı seçilebilir?

3. $|AB| < |BC|$ olan dar açılı bir ABC üçgeninin çevrel çember merkezi O , $[AB]$ ve $[AC]$ kenarlarının orta noktaları sırasıyla D ve E olmak üzere, OE doğrusu BC yi K de kesiyor. OKB üçgeninin çevrel çemberinin OD ile ikinci kesişim noktası L , A dan KL doğrusuna indirilen dikmenin ayağı F olmak üzere F noktasının DE doğrusu üzerinde olduğunu gösteriniz.

4. Ormandaki her cücenin üç kavuğu vardır, her kavuğun üzerinde $1, 2, \dots, 28$ sayılarından biri yazılıdır ve her cücenin kavuklarındaki üç sayı birbirinden farklıdır. Bir gün üç şenlik düzenleniyor ve her cüce birinci şenliğe üzerindeki sayı en küçük olan kavuğunu giyerek, ikinci şenliğe üzerindeki sayı ortanca olan kavuğunu giyerek, üçüncü şenliğe ise üzerindeki sayı en büyük olan kavuğunu giyerek katılıyor. Daha sonra şenliklerden en az ikisine üzerlerindeki sayıların aynı olduğu kavuklarla katılan bir cüce ikilisinin bulunmadığı fark ediliyor. Buna göre, cücelerin sayısı en çok kaçtır?