

TÜRKİYE BİLİMSEL VE TEKNOLOJİK ARAŞTIRMA KURUMU

18. Ulusal Matematik Olimpiyatı

İkinci Aşama Sınavı

Birinci Gün

27 Kasım 2010

1. Bir ülkede başkente doğrudan karayolu ile bağlı kentlerin sayısı 2010 dur. Başkent dışındaki her kent 2010 dan az sayıda kente doğrudan karayolu ile bağlı olup, aynı sayıda kente doğrudan bağlı olan herhangi iki kent için bu sayı çifttir. Başkenti doğrudan çeşitli kentlere bağlayan yollardan k tanesi kapatılarak bakıma alınacaktır. Bu ülkedeki karayolu ağı nasıl oluşturulmuş olursa olsun, bunun aralarında karayolu ulaşımı mümkün olan herhangi iki kent arasındaki ulaşımın hâlâ mümkün olacağı biçimde yapılmasını olanaklı kılan en büyük k sayımı belirleyiniz.

2. P , ABC üçgeninin iç bölgesinde yer alan, A köşesine ait kenarortay üstünde olmayan ve $m(\widehat{CAP}) = m(\widehat{BCP})$ koşulunu sağlayan bir nokta olsun. $BP \cap CA = \{B'\}$ ve $CP \cap AB = \{C'\}$ olmak üzere; AP doğrusu ile ABC üçgeninin çevrel çemberi ikinci kez Q noktasında, $B'Q$ ve CC' doğruları R noktasında ve $B'Q$ doğrusu ile P den AC doğrusuna paralel çizilen doğru da S noktasında kesişiyor. $B'C'$ ve QB doğruları AB doğrusunun C den farklı yanında yer alan bir T noktasında kesişsin. $m(\widehat{BAT}) = m(\widehat{BB'Q})$ olması için, $|SQ| = |RB'|$ olmasının gerek ve yeter koşul olduğunu kanıtlayınız.

3. Her n pozitif tam sayısı ve $a_1 a_2 \cdots a_n = 1$ koşulunu sağlayan tüm a_1, a_2, \dots, a_n pozitif gerçel sayıları için,

$$\sum_{i=1}^n \frac{a_i}{\sqrt{a_i^4 + 3}} \leq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i}$$

olduğunu kanıtlayınız.

*Sınav süresi 4 1/2 saattir.
Her soru 7 puan değerindedir.*

TÜRKİYE BİLİMSEL VE TEKNOLOJİK ARAŞTIRMA KURUMU

18. Ulusal Matematik Olimpiyatı

İkinci Aşama Sınavı

İkinci Gün

28 Kasım 2010

4. A ve B noktaları $[CD]$ çaplı çemberin üstünde ve CD doğrusunun farklı yanlarında bulunuyor. C ve D noktalarından geçen bir Γ çemberi $[AC]$ yi uçlarından farklı bir E noktasında, BC yi de F noktasında kesiyor. E noktasında Γ çemberine teğet olan doğru ile BC doğrusunun kesiştiği nokta P olmak üzere; Q noktası, $|QP| = |EP|$ koşulunu sağlayan ve CEP üçgeninin çevrel çemberi üstünde yer alan E den farklı bir nokta olsun. $AB \cap EF = \{R\}$ ve $[EQ]$ nun orta noktası S ise, DR ve PS doğrularının paralel olduğunu gösteriniz.

5. $0 \leq a, b < 2010^{18}$ tam sayılar olmak üzere, $P(x) = ax^2 + bx$ biçimindeki polinomların kümesini \mathcal{S} ile gösterelim. \mathcal{S} ye ait kaç P polinomunun, tüm $0 \leq n < 2010^{18}$ tam sayıları için $Q(P(n)) \equiv n \pmod{2010^{18}}$ bağıntısını sağlayan ve \mathcal{S} ye ait olan bir Q polinomunun bulunmasını olanaklı kıldığını belirleyiniz.

6. K , düzlemdeki dışbükey bir 2010-genin kenar ve köşegenlerinin kümesi olsun. A , K nin bir altkümesi olmak üzere; A ya ait her doğru parçası çifti kesişiyorsa, A ya *kesişimli küme* diyelim. İki kesişimli kümenin birleşiminin en çok kaç elemana sahip olabileceğini belirleyiniz.

*Sınav süresi 4 1/2 saattir.
Her soru 7 puan değerindedir.*