

TÜRKİYE BİLİMSEL VE TEKNOLOJİK ARAŞTIRMA KURUMU

19. Ulusal Matematik Olimpiyatı

İkinci Aşama Sınavı

Birinci Gün

3 Aralık 2011

1. $n \geq 2$ ve $E = \{1, 2, \dots, n\}$ olsun. A_1, A_2, \dots, A_k ; E nin altkümeleri olmak üzere, her $1 \leq i < j \leq k$ için, $A_i \cap A_j$, $A'_i \cap A_j$, $A_i \cap A'_j$ ve $A'_i \cap A'_j$ kümelerinden tam olarak bir tanesi boş ise, k nin alabileceği en büyük değeri belirleyiniz.

[A , E nin bir altkümesi ise, E nin A ya ait olmayan elemanlarının kümesini A' ile gösteriyoruz.]

2. D , ABC üçgeninin $[BC]$ kenarı üstünde köşelerden farklı bir nokta ve E , $[CD]$ nin orta noktası olsun. E den BC doğrusuna çizilen dikme $[AC]$ kenarını $|AF| \cdot |BC| = |AC| \cdot |EC|$ koşulunu sağlayan bir F noktasında kesiyor. ADC üçgeninin çevrel çemberi de, $[AB]$ kenarını A dan farklı bir G noktasında kesiyor. AGF üçgeninin çevrel çemberine F noktasından çizilen teğetin BGE üçgeninin çevrel çemberine de teğet olduğunu kanıtlayınız.

3. $xyz = 1$ koşulunu sağlayan tüm x, y, z pozitif gerçel sayıları için,

$$\frac{1}{x + y^{20} + z^{11}} + \frac{1}{y + z^{20} + x^{11}} + \frac{1}{z + x^{20} + y^{11}} \leq 1$$

olduğunu gösteriniz.

*Sınav süresi 4 1/2 saattir.
Her soru 7 puan değerindedir.*

TÜRKİYE BİLİMSEL VE TEKNOLOJİK ARAŞTIRMA KURUMU

19. Ulusal Matematik Olimpiyatı
İkinci Aşama Sınavı

İkinci Gün
4 Aralık 2011

4. $a_1 = 5$ ve $n \geq 1$ için, $a_{n+1} = a_n^3 - 2a_n^2 + 2$ olsun. $p \equiv 3 \pmod{4}$ koşulunu sağlayan bir p asal sayısı $a_{2011} + 1$ sayısını bölüyorsa, $p = 3$ olduğunu kanıtlayınız.

5. M ve N düzlemde yer alan düzgün dışbükey çokgensel bölgeler olmak üzere, uç noktalarından biri M ye, diğeri de N ye ait olan doğru parçalarının orta noktalarından oluşan kümeyi $K(M, N)$ ile gösterelim. $K(M, N)$ nin de düzgün dışbükey çokgensel bir bölge olmasını sağlayan tüm (M, N) ikililerini belirleyiniz.

6. A ülkesindeki 2011 kent ile B ülkesindeki 2011 kent arasında karşılıklı uçak seferleri yapılıyor. İki kent arasındaki seferleri yalnızca bir hava yolu şirketi işletebiliyor ve bir kentten çıkan seferleri en çok 19 farklı hava yolu şirketi işletebiliyor. Uçuşlar hava yolu şirketleri arasında bu koşulları sağlayacak biçimde nasıl paylaşılmış olursa olsun, yalnızca bir tek hava yolu şirketinin uçuşlarını kullanarak herhangi ikisi arasında gidebileceğimiz k kent bulunuyorsa, k nin alabileceği en büyük değeri belirleyiniz.

Sınav süresi 4 1/2 saattir.
Her soru 7 puan değerindedir.