

Türkiye Bilimsel ve Teknolojik Araştırma Kurumu

16. Ulusal Matematik Olimpiyatı

İkinci Aşama Sınavı

Birinci Gün

29 Kasım 2008

1. Diklik merkezi H ve çevrel merkezi O olan dar açılı bir ABC üçgeninin BC , AC ve AB kenarlarının orta noktaları, sırasıyla A_1 , B_1 ve C_1 olsun. $[HA_1]$, $[HB_1]$ ve $[HC_1]$ ışınları, ABC üçgeninin çevrel çemberini, sırasıyla A_0 , B_0 ve C_0 noktalarında kessin. $A_0B_0C_0$ üçgeninin diklik merkezi H_0 ise, O , H ve H_0 noktalarının doğrudan olduğunu gösteriniz.

2. a. $\frac{7^{p-1} - 1}{p}$ nin tam kare olmasını sağlayan tüm p asal sayılarını belirleyiniz.

b. $\frac{11^{p-1} - 1}{p}$ nin tam kare olmasını sağlayan tüm p asal sayılarını belirleyiniz.

3. $a + b + c = 1$ koşulunu sağlayan tüm a , b , c , pozitif gerçel sayıları için,

$$\frac{a^2b^2}{c^3(a^2 - ab + b^2)} + \frac{b^2c^2}{a^3(b^2 - bc + c^2)} + \frac{c^2a^2}{b^3(c^2 - ca + a^2)} \geq \frac{3}{ab + bc + ca}$$

olduğunu kanıtlayınız.

Sınav süresi 4 1/2 saattir.
Her soru 7 puan değerindedir.

Türkiye Bilimsel ve Teknolojik Araştırma Kurumu

16. Ulusal Matematik Olimpiyatı

İkinci Aşama Sınavı

İkinci Gün
30 Kasım 2008

4. \mathbb{N} negatif olmayan tam sayıların ve \mathbb{Z} de tüm tam sayıların kümesini göstermek üzere, $f : \mathbb{N} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ fonksiyonu,

i. $f(0, 0) = 1, f(0, 1) = 1,$

ii. her $k \notin \{0, 1\}$ için, $f(0, k) = 0$ ve

iii. her $n \geq 1$ ve k için, $f(n, k) = f(n - 1, k) + f(n - 1, k - 2n)$

koşullarını sağlıyorsa, $\sum_{k=0}^{\binom{2009}{2}} f(2008, k)$ toplamının değerini bulunuz.

5. Düzlemde bir Γ çemberi ve onu kesmeyen bir ℓ doğrusu verilmiş olsun. $PQ \cap RS = \{A\}$ ve $PS \cap QR = \{B\}$ olacak biçimde, Γ çemberi üstünde P, Q, R, S noktalarının bulunmasını sağlayan ve ℓ doğrusu üstünde yer alan tüm $\{A, B\}$ nokta ikilileri için, $[AB]$ yi çap alan çemberlerin kesişim kümesini belirleyiniz.

6. 2008 tane bilgisayardan oluşan bir bilgisayar ağında, herhangi iki döngü kesişmiyor. $t = 0$ anında, bir bilgisayar korsanı bu ağdaki bir bilgisayarı ele geçiriyor ve $t = 1$ anında da, ağ yöneticisi, ele geçirilmemiş bir bilgisayara koruyucu bir program yüklüyor. Her k pozitif tam sayısı için, $t = 2k$ anında, korsan, varsa, o ana kadar ele geçirdiği bilgisayarlardan birine doğrudan bağlı olan ve koruyucu program yüklenmemiş olan bir bilgisayarı daha ele geçirebiliyor; $t = 2k + 1$ anında da, ağ yöneticisi, varsa, o ana kadar koruyucu program yüklenmiş bilgisayarlardan birine doğrudan bağlı olan ve korsanın ele geçirmemiş olduğu bir bilgisayara daha koruyucu programı yükleyebiliyor. Bilgisayar ağı ne şekilde düzenlenmiş olursa olsun, korsanın en çok kaç tane bilgisayarı ele geçirmeyi garantileyebileceğini belirleyiniz.

[$m \geq 3$ olmak üzere, B_1 ve B_m bilgisayarları ve, her $2 \leq i \leq m$ için, B_{i-1} ve B_i bilgisayarları doğrudan bağlıysa, m elemanlı $\{B_1, B_2, \dots, B_m\}$ kümesine bir *döngü* diyoruz.]

Sınav süresi 4 1/2 saattir.
Her soru 7 puan değerindedir.