

Türkiye Bilimsel ve Teknolojik Araştırma Kurumu

17. Ulusal Matematik Olimpiyatı

İkinci Aşama Sınavı

İkinci Gün

6 Aralık 2009

4. Dar açılı bir ABC üçgenin diklik merkezi H ve, A , B , C köşelerine ait yüksekliklerinin ayakları da, sırasıyla A_1 , B_1 , C_1 dir. K , $[AB]$ çaplı çemberin küçük AB_1 yayı üstünde yer alan ve $m(\widehat{HKB}) = m(\widehat{C_1KB})$ koşulunu sağlayan bir nokta ve $[KB] \cap [CC_1] = \{L\}$ olmak üzere; C merkezli ve $[CL]$ yarıçaplı çember $[AA_1]$ i M noktasında kesiyor. B merkezli ve $[BM]$ yarıçaplı çemberin CC_1 doğrusunu kestiği noktalar P ve Q ise, A , K , P ve Q noktalarının çemberdeş olduğunu kanıtlayınız.

5. Tüm a , b , c , pozitif gerçel sayıları için,

$$\frac{(b+c)(a^4-b^2c^2)}{ab+2bc+ca} + \frac{(c+a)(b^4-c^2a^2)}{bc+2ca+ab} + \frac{(a+b)(c^4-a^2b^2)}{ca+2ab+bc} \geq 0$$

olduğunu gösteriniz.

6. $1 < k_1 < k_2 < \dots < k_n$ ve a_1, a_2, \dots, a_n tam sayılar olmak üzere; her N tam sayısı için, $k_i \mid N - a_i$ olacak biçimde en az bir $1 \leq i \leq n$ bulunuyorsa, n nin alabileceği en küçük değeri belirleyiniz.

Sınav süresi 4 1/2 saattir.
Her soru 7 puan değerindedir.

Türkiye Bilimsel ve Teknolojik Araştırma Kurumu

17. Ulusal Matematik Olimpiyatı

İkinci Aşama Sınavı

Birinci Gün

5 Aralık 2009

1. $p^3 - 4p + 9$ un tam kare olmasını sağlayan tüm p asal sayılarını bulunuz.

2. Γ , ABC üçgeninin çevrel çemberi; D ve E de, sırasıyla $[AB]$ ve $[AC]$ kenarları üstünde köşelerden farklı noktalar olsun. A' , \widehat{BAC} nin açıortayının Γ yı ikinci kez kestiği nokta; P ve Q da, sırasıyla $A'D$ ve $A'E$ doğrularının Γ yı ikinci kez kestiği noktalar olsun. R ve S , sırasıyla APD ve AQE üçgenlerinin çevrel çemberlerinin AA' doğrusunu ikinci kez kestikleri noktalar ise; DS ve ER doğrularının, Γ ya A da teğet olan doğru üstünde bir noktada kesiştiğini gösteriniz.

3. Bir beldenin Elektrik İşleri görevlisi Ahmet, k gün boyunca her gün, ya seçtiği bir direk ile yine kendisinin seçtiği istediği sayıda direk arasına birer tel bağlıyor, ya da en çok 17 direk ikilisi seçip her ikiliye ait direkler arasına birer tel bağlıyor. Beldenin Boya İşleri görevlisi Berna da, beldede kaç direk olursa olsun ve Ahmet telleri nasıl bağlarsa bağlasın, beldedeki tüm direklerin en çok 2009 renk kullanarak ve aralarına tel bağlanmış herhangi iki direk aynı renkte olmayacak biçimde boyanabileceğini iddia ediyor. k nin, Berna'nın iddiasının doğru olmasını sağlayan en büyük değerini belirleyiniz.

*Sınav süresi 4 1/2 saattir.
Her soru 7 puan değerindedir.*