Türkiye Bilimsel ve Teknolojik Araştırma Kurumu

20. Ulusal Ortaokul Matematik Olimpiyatı

İkinci Aşama Sınavı

5 Aralık 2015

Çözümler

1. Sabit olmayan her $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ fonksiyonu için $f(x+y) < f(xy)$ olacak şekilde x, y gerçel sayılarının bulunabileceğini gösteriniz.

Çözüm : Tüm $x, y \in \mathbb{R}$ sayıları için $f(x+y) \geq f(xy)$ olduğunu varsayalım. $a^2 \geq 4b$ koşulunu sağlayan tüm a, b gerçel sayı ikilisi için, $t^2 - at + b$ polinomunun iki gerçel kökü vardır. Buna göre, $a^2 \geq 4b$ koşulunu sağlayan her a, b gerçel sayı ikilisi için $a = x + y$ ve $b = xy$ olacak şekilde x, y gerçel sayıları bulunur. Sonuç olarak $f(a) \geq f(b)$ elde edilir.

Herhangi bir c gerçel sayısı için $f(x+y) \geq f(xy)$ eşitsizliğinde $x = 1$ ve $y = c - 1$ yazarsak $f(c) \geq f(c-1)$ olur. $f(c) \geq f(c-1) \geq \ldots \geq f(c-n)$ olduğundan her n pozitif tam sayısı için $f(c) \geq f(c-n)$ elde edilir. f fonksiyonu sabit olmadığına göre, $f(a) < f(b)$ olacak şekilde a, b vardır. n sayısını yeterince büyük alırsak, $(a-n)^2 > 4b$ olur. Bu durumda $f(a) \geq f(a-n) \geq f(b) > f(a)$ çelişkisi elde edilir.

2. Bir sergide her biri tam olarak k renk kullanılarak çizilmiş 100 tablo bulunmaktadır. Bu tablolardan herhangi 20 sinde ortak bir renk bulunup tabloların tamamında ortak bir renk bulunmuyorsa, k nın alabileceği en küçük değer nedir?

Çözüm : Cevap: 20.

İlk önce $k = 20$ için bir örnek vereceğiz. Renkler $1, 2, \ldots, 21$ olsun. $i = 1, 2, \ldots 21$ olmak üzere, P_i tablosu $1, 2, \ldots, i-1, i+1, \ldots, 21$ renkleriyle çizilirse bu tabloların her biri tam olarak 20 renk bulundurmuş olur. $i = 22, \ldots, 100$ olmak üzere, P_i tablosu P_1 tablosu gibi $2, 3, \ldots, 21$ renkleriyle çizilmiş olsun. Bu durumda herhangi 20 tabloda ortak bir renk bulunup 100 tablonun tamamında ortak bir renk bulunmayacaktır.

Şimdi $k \geq 20$ olduğunu gösterelim. $c_1, \ldots, c_k$ renkleriyle çizilmiş bir A tablosu alalım. Tabloların tamamında ortak bir renk bulunmadığına göre, her $1 \leq i \leq k$ için c_i rengini bulundurmayan bir A_i tablosu vardır. Buna göre, $A, A_1, A_2, \ldots, A_k$ tablolarının bir ortak rengi yoktur ve herhangi 20 tablonun bir ortak rengi bulunduğundan $k + 1 \geq 21$ elde edilir. Dolayısıyla $k \geq 20$ bulunur.

3. p bir asal, n ise bir pozitif tam sayı olmak üzere,

$$p^3 - 2p^2 + p + 1 = 3^n$$

eşitliğini sağlayan tüm (p, n) ikililerini bulunuz.

Çözüm : Cevap: $(p, n) = (2, 1)$ ve $(5, 4)$.

$p = 2$ ise $n = 1$ olur. $p \geq 3$ olsun. $p^3 - 2p^2 + p + 1 \equiv p - 2p^2 + p + 1 \equiv 2p(1-p) + 1 \equiv 1 \pmod 4$ olduğundan $3^n \equiv 1 \pmod 4$ ve buradan da n nin çift olduğu görülür. $n = 2m$ olsun . O zaman $p^3 - 2p^2 + p + 1 = 3^{2m}$ ve

$$(p-1)^2 = \frac{1}{p}(3^m - 1)(3^m + 1)$$

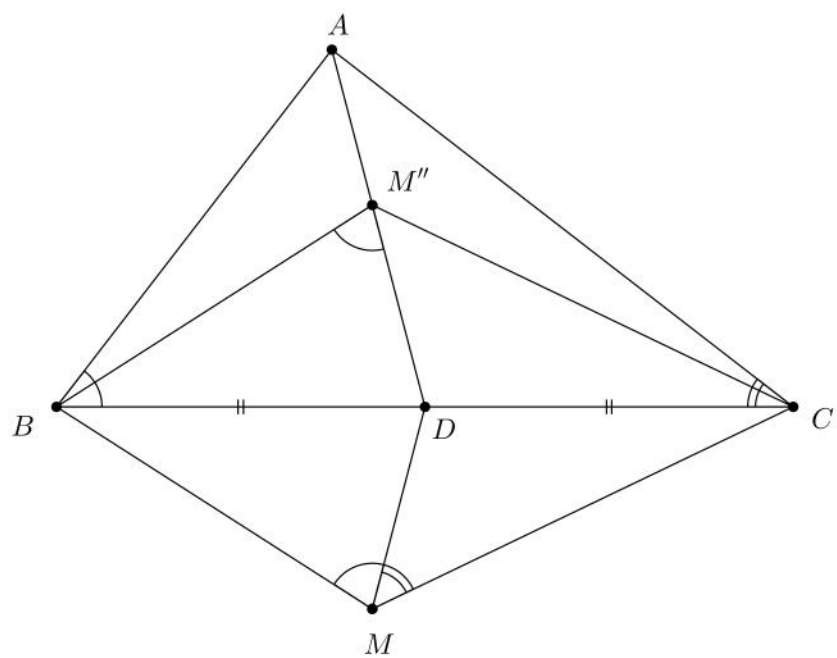
olur. $ebob(3^m - 1, 3^m + 1) = 2$ olduğuna göre iki durum vardır. Durum 1: $p \mid 3^m - 1$ ve $p \nmid 3^m + 1$. Durum 2: $p \nmid 3^m - 1$ ve $p \mid 3^m + 1$. Durum 1 de $(p-1)^2 = \frac{3^m - 1}{p}(3^m + 1)$. Buna göre, $\frac{3^m - 1}{p} = 2a^2$ ve $3^m + 1 = 2b^2$. Fakat $3^m + 1 = 2b^2$ olursa, $1 \equiv 2b^2 \pmod 3$ ve $b^2 \equiv -1 \pmod 3$ çelişkisi gelir. Durum 2 de $(p-1)^2 = (3^m - 1)\frac{3^m + 1}{p}$. Buna göre, $3^m - 1 = 2a^2$ ve $\frac{3^m + 1}{p} = 2b^2$. (mod 4) de bakarsak m tek ise a tek ve b çift oluyor. O zaman $3^m + 1 = 2pb^2$ ve buradan da $4 \equiv 0 \pmod 8$ çelişkisi elde edilir. $m = 2k$ ise

$$(3^k - 1)(3^k + 1) = 2a^2$$

olur. Yine iki durum vardır: Durum 2a: $3^k - 1 = c^2, 3^k + 1 = 2d^2$ ve Durum 2b: $3^k - 1 = 2c^2, 3^k + 1 = d^2$. Durum 2a: $-1 = c^2 \pmod 3$ çelişkisi gelir. Durum 2b: $3^k = (d-1)(d+1)$. $(d+1) - (d-1) = 2$ olduğundan $d = 2$ ve $k = 1$. Sonuç olarak $m = 2$ ve $p \mid 10$ olur. Buradan $p = 5$ ve $n = 4$ gelir.

4. Bir ABC üçgeninde [BC] kenarının orta noktası D olsun. D den geçip AB ye B noktasında teğet olan çember ile D den geçip AC ye C noktasında teğet olan çember D den farklı bir M noktasında kesişiyorlar. M nin BC göre yansıması olan M' noktasının AD doğrusu üzerinde bulunduğunu gösteriniz.

Çözüm :



B ve C noktalarındaki teğetlik koşulundan $\angle ABD = \angle BMD$ ve $\angle ACD = \angle CMD$. AD doğrusu üzerindeki M'' noktasını $\angle BM''D = \angle ABD$ olacak şekilde tanımlayalım.

$\angle BAD = \angle BAM'' = \angle BM''D - \angle ABM'' = \angle ABD - \angle ABM'' = \angle M''BD$ olduğundan $BM''D$ ve ABD üçgenleri benzer oluyor. Buna göre $BD^2 = DM'' \cdot DA$ olur. $BD = CD$ olduğundan $CD^2 = DM'' \cdot DA$ gelir. O zaman $CM''D$ ve ACD üçgenleri de benzer olur ve sonuç olarak $\angle CAD = \angle M''CD$, $\angle CM''D = \angle ACD = \angle CMD$ olur.

$\angle BM'D = \angle BMD = \angle BM''D$ olduğuna göre, M'' noktası $M'BD$ üçgeninin çevrel çemberi üzerindedir. Benzer şekilde, $\angle CM'D = \angle CMD = \angle CM''D$ olduğuna göre, M'' noktası $M'CD$ üçgeninin çevrel çemberi üzerindedir. Diğer taraftan bu çemberler M' ve D noktalarında kesişiyorlar. D noktası BC doğrusu üzerinde iken M'' noktası BC doğrusu üzerinde değildir. Buna göre, M' ve M'' aynı nokatadır ve ispat tamamlanmıştır.