Türkiye Bilimsel ve Teknolojik Araştırma Kurumu

23. Ulusal Ortaokul Matematik Olimpiyatı
İkinci Aşama Sınavı

24 Kasım 2018

Çözümler

1. n bir pozitif tam sayı olmak üzere, n nin pozitif bölenlerinin sayısını $s(n)$ ile gösterelim.

$$k = s(a) = s(b) = s(2a + 3b)$$

olacak şekilde a ve b pozitif tam sayılarının bulunmasını sağlayan tüm k pozitif tam sayılarını bulunuz.

Çözüm: Cevap: Tüm pozitif çift sayılar.

$m \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere $k = 2m$ için örnek: $a = 2 \cdot 5^{m-1}$ ve $b = 3 \cdot 5^{m-1}$ alındığında $s(a) = s(b) = 2m$ ve $s(2a + 3b) = s(13 \cdot 5^{m-1}) = 2m$ eşitlikleri sağlanır.

Farzedelim ki bir $m \in \mathbb{Z}^+$ için $k = 2m + 1$ şartı sağlasın. O halde $2m + 1 = s(a) = s(b) = s(2a + 3b)$ olacak şekilde a ve b pozitif tam sayıları bulunur. Pozitif bölen sayısı bir tek sayı olan sayılar yalnızca tamkarelerdir. Bundan dolayı $a = x^2, b = y^2$ ve $2a + 3b = z^2$ olacak şekilde x, y, z pozitif tam sayıları vardır. O zaman

$$2x^2 + 3y^2 = z^2$$

eşitliği elde edilir. x, y, z sayılarının en büyük ortak böleni d olsun. Başka bir deyişle $\text{ebob}(x, y, z) = d$. O halde $x = dx_1, y = dy_1, z = dz_1$ ve $\text{ebob}(x_1, y_1, z_1) = 1$ olacak biçimde x_1, y_1, z_1 pozitif tam sayıları vardır. Yukarıdaki eşitlikte $x = dx_1, y = dy_1, z = dz_1$ yazılıp d^2 ile sadeleştirme yapıldığında

$$2x_1^2 + 3y_1^2 = z_1^2$$

olduğu görülür. Bu eşitlik (mod 3)'te incelendiğinde $2x_1^2 \equiv z_1^2 \pmod 3$ elde edilir. Bir tamkare (mod 3)'te 0 veya 1'e denk olduğundan $x_1 \equiv z_1 \equiv 0 \pmod 3$ olduğu görülür. O halde x_1 ve z_1 sayıları 3 ile tam bölünür ve dolayısıyla x_1^2 ve z_1^2 sayıları 9 ile tam bölünür. O zaman $3y_1^2$ de 9 ile bölünür ve bu da y_1 sayısının 3 ile bölündüğünü gösterir. Sonuç olarak x_1, y_1, z_1 sayılarının her biri 3 ile tam bölünür. Ancak bu üç sayı üçlü olarak aralarında asaldı. Çelişki. Demek ki şartı sağlayan k tek sayısı yoktur.

2. $n \times n$ bir satranç tahtasının bazı birim karelerine birer kale yerleştirilmiştir. Bu kalelerden birbirini tehdit etmeyen herhangi ikisi için bu ikisinin de tehdit ettiği boş bir birim kare bulunduğuna göre, tahtada en çok kaç kale bulunabilir?

Not: Bir kale kendisiyle aynı satırda veya sütunda bulunan ve aralarındaki tüm birim karelerin boş olduğu birim kareleri tehdit etmektedir.

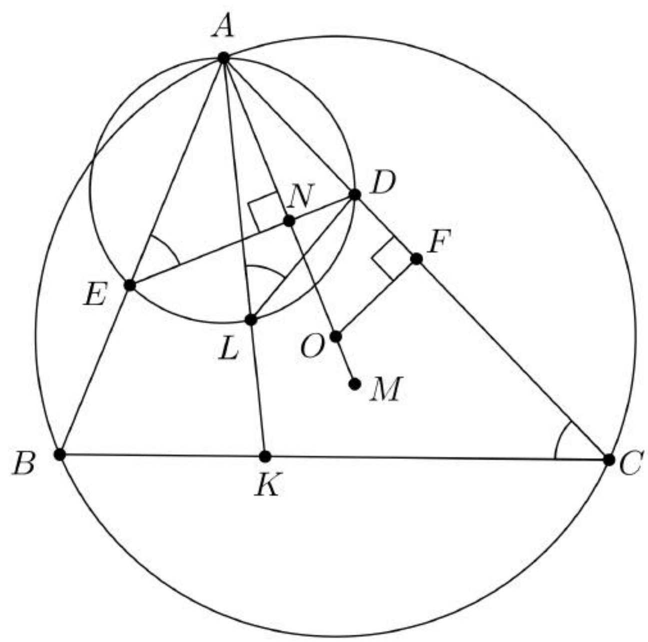
Çözüm: Cevap: $\lfloor \frac{3n}{2} \rfloor$.

Bir sütunun üzerinde ikiden fazla kale bulunamaz. Aksi takdirde bu sütunun üzerinde bulunan en üstteki ve en alttaki kale ikilisi sorudaki koşulları sağlamaz. Her birinin üzerinde 2 kale bulunan iki sütun alalım. Birinci sütunun üzerindeki kaleler a_1 ve a_2, ikinci sütunun üzerindeki kaleler b_1 ve b_2 olsun (a_1'in a_2'nin ve b_1'in b_2'nin üstünde bulunduğunu varsayalım). Bu dört kaleden herhangi ikisinin aynı satırda bulunamayacağını gösterelim. a_1 ve b_1 aynı satırda olsun. Genelliği bozmadan a_2'nin bulunduğu satırın b_2'nin bulunduğu satırın üstünde olmadığını varsayalım. O zaman a_2 ve b_1 kale ikilisi sorudaki koşulları sağlamaz. a_1 ve b_2 aynı satırda olsun. O zaman a_2 ve b_1 kale ikilisi sorudaki koşulları sağlamaz. Simetriden dolayı a_2 ve b_2'nin aynı satırda bulunduğu ve a_2 ile b_1'in aynı satırda bulunduğu durumlar benzerdir. İspat tamamlanmıştır. Demek ki güvercin yuvası prensibine göre üzerinde 2 kale bulunan kale sayısı $\lfloor\frac{n}{2}\rfloor$'den fazla olamaz. Sonuç olarak kalan sütunlarda birer kale bulunsa bile satranç tahtası üzerinde toplamda en fazla $2\lfloor\frac{n}{2}\rfloor + n - \lfloor\frac{n}{2}\rfloor = \lfloor\frac{3n}{2}\rfloor$ kale olabilir.

Şimdi $\lfloor\frac{3n}{2}\rfloor$ için bir örnek verelim. En alt satırın numarası 1 olmak üzere, satırları $1, 2, \dots, n$ sayılarıyla numarandıralım. En sol sütunun numarası 1 olmak üzere, sütunları $1, 2, \dots, n$ sayılarıyla numarandıralım. i. sütunda ve j. satırda bulunan birim kale (i, j) olsun. $n = 2k$ ve $n = 2k+1$ durumlarında n kaleyi $1 \le i \le n$ olmak üzere, $(i, n+1-i)$ birim karelerine, k kaleyi ise $1 \le i \le k$ olmak üzere, (i, i) birim karelerine yerleştirirsek sorudaki koşullar sağlanır.

3. Çevrel çember merkezi O olan dar açılı bir ABC üçgeninde AO doğrusuna dik olan bir doğru $[AC]$ ve $[AB]$ kenarlarını, sırasıyla D ve E noktalarında kesiyor. $[BC]$ kenarı üzerinde AO nun BC yi kestiği noktadan farklı bir K noktası alınıyor. AK doğrusu ADE üçgeninin çevrel çemberini A dan farklı bir L noktasında kesiyor. A noktasının DE doğrusuna göre simetriği M olmak üzere K, L, M, O noktalarının çemberdeş olduğunu gösteriniz.

Çözüm: AM ile DE doğruları N de kesişsin. O noktasından AC kenarına inen dikmenin ayağı F



olsun. $AO \perp DE$ ve $\angle BAO = 90^\circ - \angle ACB$ olduğundan $\angle ALD = \angle AED = \angle ACB$ ve buradan da K, C, D, L noktaları çemberdeş olur. Çemberde kuvvetten

$$AL \cdot AK = AD \cdot AC \tag{1}$$

elde ederiz. F noktası $[AC]$ nin orta noktası ve N noktası da $[AM]$ nin orta noktası olduğundan

$$AC = 2AF \quad \text{ve} \quad AM = 2AN \tag{2}$$

dir. Öte yandan $\angle DNO = \angle OFD = 90°$ olduğundan D, N, O, F noktaları da çemberdeş olur. Çemberde kuvvetten

$$AN \cdot AO = AD \cdot AF \tag{3}$$

olur. (1), (2) ve (3) kullanılarak

$$AL \cdot AK = AD \cdot AC = 2AF \cdot AD = 2AN \cdot AO = AM \cdot AO$$

olacağından K, L, M, O noktaları çemberdeş olur ve ispat biter.

4. Tüm x, y, z pozitif gerçel sayıları için

$$\frac{x^3y + y^3z + z^3x}{x + y + z} + \frac{4c}{xyz} \geq 2c + 2$$

eşitsizliğini sağlayan tüm c pozitif gerçel sayılarını bulunuz.

Çözüm: Cevap: $c = 1$.

$x = y = z = \sqrt[6]{4c}$ alırsak

$$\frac{x^3y + y^3z + z^3x}{x + y + z} + \frac{4c}{xyz} = 4\sqrt{c} \geq 2c + 2$$

ve buradan da $(\sqrt{c} - 1)^2 \leq 0$ elde ederiz. Yani $c = 1$ dışında çözüm yoktur. Şimdi ise $c = 1$ için eşitsizliğin her zaman sağlanacağını gösterelim. AGO eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} x^3y + \frac{4}{xy} &\geq 4x \\ y^3z + \frac{4}{yz} &\geq 4y \\ z^3x + \frac{4}{zx} &\geq 4z \end{aligned}$$

elde ederiz. Bu üç eşitsizliği taraf tarafa toplarsak

$$x^3y + y^3z + z^3x + \frac{4(x + y + z)}{xyz} \geq 4(x + y + z)$$

ve buradan da

$$\frac{x^3y + y^3z + z^3x}{x + y + z} + \frac{4}{xyz} \geq 4$$

olur. Böylece ispat biter.