Türkiye Bilimsel ve Teknolojik Araştırma Kurumu

20. Ulusal Ortaokul Matematik Olimpiyatı
İkinci Aşama Sınavı

16 Aralık 2017

Çözümler

1. $3^a + 3^b + 3^c$ sayısını tam kare yapan tüm (a, b, c) pozitif tam sayı üçlülerini bulunuz.

Çözüm : $3^a + 3^b + 3^c = m^2$ olsun. m bir tek sayı olmalıdır ve buna göre $m^2 \equiv 1 \pmod 8$ olur. Her k pozitif tam sayısı için $3^k \equiv 1$ ya da $3^k \equiv 3 \pmod 8$. Buna göre, $3^a \equiv 3^b \equiv 3^c \equiv 3 \pmod 8$ olmak zorundadır ve buradan da a, b ve c tek sayılar oluyor. $a \leq b \leq c$ kabul edersek $3^a(3^{b-a} + 3^{c-a} + 1) = m^2$ olur. a bir tek sayı olduğuna göre, $3^{b-a} + 3^{c-a} + 1 \equiv 0 \pmod 3$. Demek ki $a = b = c$ ve çözümler k bir pozitif tam sayı olmak üzere $(a, b, c) = (2k-1, 2k-1, 2k-1)$ şeklindedir.

2. 2017 öğrencisi olan bir okuldaki satranç şenliği süresince herhangi iki öğrenci kendi aralarında en fazla bir satranç maçı yapıyor. Şenlik sonunda, aralarında maç yapmış olan herhangi iki öğrenciden en az birinin en fazla 22 maç yapmış olduğu görülüyor. Etkinlik boyunca yapılan maç sayısı en fazla kaç olabilir?

Çözüm : Cevap: $43890 = 1995 \cdot 22$.

Okuldaki öğrencileri 1995 ve 22 öğrenciden oluşan iki gruba ayıralım. Tüm maçlar sadece farklı gruplarda olan öğrenciler arasında yapılırsa koşullar sağlanır ve toplam maç sayiısı $1995 \cdot 22$ olur. Şimdi toplam maç sayısının daha fazla olamayacağını gösterelim. En az 23 maç yapan öğrencilere *aktif* öğrenci diyelim. Aktif olmayan öğrenci sayısı en fazla 1995 olursa, toplam maç sayısı en fazla $1995 \cdot 22$ olur. Şimdi k bir pozitif tam sayı olmak üzere, aktif olmayan öğrenci sayısı $1995 + k$ ve aktif olan öğrenci sayısı da $22 - k$ olduğunu varsayalım. Koşullara göre, her maçı yapan iki öğrenciden en az biri aktif öğrenci değildir. Aktif olmayan iki öğrenci tarafından yapılan toplam maç sayısı T_1, aktif ve aktif olmayan iki öğrenci tarafından yapılan toplam maç sayısı ise T_2 olsun. O zaman $T_2 \leq (22-k)(1995+k)$ ve her maça en az bir aktif olmayan öğrenci katıldığı için $2T_1 + T_2 \leq (1995 + k) \cdot 22$ olacaktır. Sonuç olarak toplam maç sayısı

$$T_1 + T_2 = \frac{1}{2} \cdot (2T_1 + T_2 + T_2) \leq \frac{(1995 + k) \cdot 22 + (22 - k)(1995 + k)}{2} = 1995 \cdot 22 - \frac{k^2 + 1951k}{2} \leq 1995 \cdot 22$$

olacaktır.

3. Köşegenleri E noktasında kesişen dışbükey bir $ABCD$ dörtgeninde

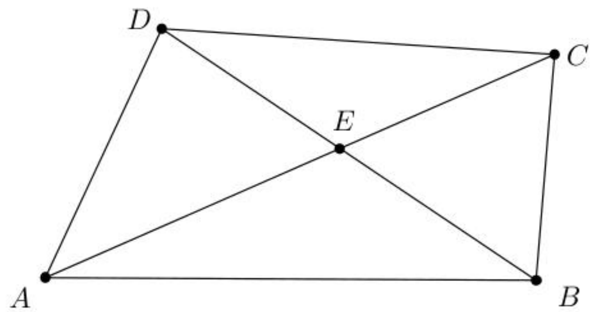
$$\frac{|AB|}{|CD|} = \frac{|BC|}{|AD|} = \sqrt{\frac{|BE|}{|DE|}}$$

eşitliği sağlanıyor. $ABCD$ nin paralelkenar veya kirişler dörtgeni olduğunu gösteriniz.

Çözüm : ABD ve BCD üçgenlerinde Stewart teoremi kullanılarak

$$\frac{AB^2 \cdot ED + AD^2 \cdot BE}{BD} - BE \cdot ED = AE^2$$
$$\frac{BC^2 \cdot ED + CD^2 \cdot BE}{BD} - BE \cdot ED = EC^2$$

elde edilir.



Verilen

$$AB^2 \cdot ED = CD^2 \cdot BE \quad \text{ve} \quad AD^2 \cdot BE = BC^2 \cdot ED$$

eşitliklerinden $AE = EC$ buluruz. İlk eşitliği kullanarak

$$\frac{BE}{BD}(AD^2 + CD^2) = AE^2 + BE \cdot ED$$

elde ederiz. ADC üçgeninde kenarortay teoreminden

$$AD^2 + CD^2 = 2(AE^2 + ED^2)$$

olduğunu görürüz ve böylece

$$\left(2 \cdot \frac{BE}{BD} - 1\right) AE^2 = BE \cdot ED - 2 \cdot ED^2 \cdot \frac{BE}{BD}$$

olur. Son eşitlik

$$(AE^2 - BE \cdot ED)\left(\frac{BE - ED}{BD}\right) = 0$$

eşitliğine denktir. Sonuç olarak $AE^2 = BE \cdot ED$ veya $BE = ED$'dir. İlk durumda $ABCD$ bir kirişler dörtgenidir, ikinci durumda ise bir paralelkenardır.

4. $a > b > 1$ gerçel sayıları

$$(ab + 1)^2 + (a + b)^2 \leq 2(a + b)(a^2 - ab + b^2 + 1)$$

eşitsizliğini sağlıyorsa, $\dfrac{\sqrt{a-b}}{b-1}$ ifadesinin alabileceği en küçük değer nedir?

Çözüm : Cevap: $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Sorudaki eşitsizliği kullanarak

$$\begin{aligned} 0 &\geq (ab+1)^2 + (a+b)^2 - 2(a+b)(a^2 - ab + b^2 + 1) \\ &= a^2b^2 + 4ab + 1 - 2a^3 - 2b^3 + a^2 + b^2 - 2a - 2b \\ &= (a^2 - 2b + 1)(b^2 - 2a + 1) \end{aligned}$$

elde edilir. $a > b$ olduğuna göre, $a^2 - 2b + 1 > b^2 - 2b + 1 = (b-1)^2 \geq 0$ olur. Demek ki yukarıdaki eşitsizlikte $b^2 - 2a + 1 \leq 0$ olmak zorundadır. Buna göre, $(b-1)^2 \leq 2(a-b)$ ve

$$\frac{\sqrt{a-b}}{b-1} \geq \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

olur. Eşitlik durumu $(a, b) = (5/2, 2)$ ise sağlanıyor.