TÜRKİYE BİLİMSEL VE TEKNOLOJİK ARAŞTIRMA KURUMU
BİLİM İNSANI DESTEK PROGRAMLARI BAŞKANLIĞI

30. ULUSAL BİLİM OLİMPİYATLARI - 2022
BİRİNCİ AŞAMA SINAVI
ORTAOKUL MATEMATİK

Soru kitapçığı türü

A

21 Mayıs 2022 Cumartesi, 09.30-12.30

ÇÖZÜMLER

1. $s(\widehat{BAC}) = 10°$ olan bir ABC üçgeninin $[AC]$ ve $[AB]$ kenarları üzerinde sırasıyla K ve L noktaları alınmıştır. $s(\widehat{ABK}) = 50°$, $s(\widehat{ACL}) = 25°$ ve $s(\widehat{BCL}) = 35°$ ise, $s(\widehat{BKL})$ kaç derecedir?

Cevap: 65°. $s(\widehat{BKC}) = s(\widehat{BAK}) + s(\widehat{ABK}) = 10° + 50° = 60°$. Dolayısıyla BKC bir eşkenar üçgendir ve $|BK| = |BC|$ bulunur. Ayrıca açılardan LBC üçgeninin ikizkenar olduğu kolayca görülür ve $|LB| = |BC|$ elde edilir. O zaman $|LB| = |BK|$ ve sonuç olarak LBK de bir ikizkenar üçgendir. O halde $s(\widehat{BKL}) = (189° - 50°)/ = 65°$.

2. $\dfrac{n^3 - 31}{n^2 - 7}$ ifadesinin bir tam sayı olmasını sağlayan n pozitif tam sayılarının toplamı kaçtır?

Cevap: 4. $n^2 - 7 | n^3 - 31 - n(n^2 - 7) = 7n - 31$. $n \geq 5$ iken $n^2 - 7$ ve $7n - 31$ sayıları pozitiftir ve $n^2 - 7 | 7n - 31$ olduğundan $n^2 - 7 \leq 7n - 31$ bulunur. O zaman $n^2 - 7n + 29 \leq 0$ ve bu radan $(n - 3)(n - 4) + 17 \leq 0$ elde edilir. Fakat $n \geq 5$ olduğundan bu mümkün değildir ve bu durumdan çözüm gelmez. $n = 1, 2, 3, 4$ durumlarından sadece $n = 1$ ve $n = 3$ şartı sağlar.

3. Bir masa üzerindeki kutuların her birinde 3 top bulunmaktadır ve her top ya kırmızı ya da beyaz renktedir. En az iki kırmızı top içeren kutu sayısı 25, en az iki beyaz top içeren kutu sayısı 36, farklı renkte toplar içeren kutu sayısı 47 ise, içerdiği tüm toplar aynı renk olan kutu sayısı kaçtır?

Cevap: 14. Tam olarak üç kırmızı top içeren kutu sayısı a, tam olarak iki kırmızı top içeren kutu sayısı b, tam olarak bir kırmızı top içeren kutu sayısı c ve kımızı top içermeyen kutu sayısı d olsun. Buna göre, $a+b = 25$, $c+d = 36$ ve $b+c = 47$ olur. Buradan $a+d = (a+b)+(c+d)-(b+c) = 25+36-47 = 14$ olur.

4. Dört kutunun her birinde 1,2,3,4,5 sayılarıyla numaralanmış beşer top bulunmaktadır. Bu yirmi toptan altı tanesi, her kutudan en az bir top ve en az bir kutudan hem 1 hem de 2 numaralı topları almak koşuluyla kaç farklı şekilde seçilebilir?

Cevap: 4350. Herhangi bir kutudan 3 top seçilmesi durumunda

$$\binom{4}{1}\cdot\binom{3}{1}\cdot\binom{5}{1}\cdot\binom{5}{1}\cdot\binom{5}{1}=1500$$

seçenek vardır. İki kutudan ikişer top alınması durumunda ise,

$$\binom{4}{2}\cdot\left(\binom{5}{2}+\binom{5}{2}-1\right)\cdot\binom{5}{1}\cdot\binom{5}{1}=2850$$

seçenek vardır. Buna göre, toplar toplam $1500+2850=4350$ şekilde seçilebilir.

5. Bir dışbükey çokgenin iç açılarından üçünün ölçüleri toplamı 390° olup diğer iç açılarının her birinin derece cinsinden ölçüsü aynı bir tam sayıya eşittir. Buna göre bu çokgenin kenar sayısının alabileceği en büyük değer ile en küçük değerin toplamı kaçtır?

Cevap: 218 Çokgen n kenarlı ve birbirine eşit olan açılardan birinin ölçüsü α derece olsun. O zaman $(n-3)\alpha+390=(n-2)180$ olur ve buradan $\alpha=180-210/(n-3)$ bulunur. O halde $n-3|210$ elde edilir. $n-3=1$ ise, $n=4$ ve $\alpha=-30$ olur ve çelişki elde edilir. $n-3=2$, yani $n=5$ durumu n'nin en küçük olduğu durum, $n-3=210$ yani $n=213$ durumu ise n'nin en büyük olduğu durumdur.

6. Kaç n pozitif tam sayısı için $2n$ sayısının tam olarak n tane pozitif tam sayı böleni vardır?

Cevap: 2. n'nin 1 veya 2 olmadığı kolayca görülür. $n\geq 3$ olsun. $1,2,\ldots,2n$ sayılarından n tanesi $2n$'nin böleni olmalı. $n+1,n+2,\ldots,2n-1$ sayılarından hiçbiri $2n$ sayısının bir böleni değildir. O halde $n-1$ veya $n-2$ sayılarından en az biri $2n$'nin bölenidir. $n-1|2n$ ise, $n-1|2n-2(n-1)=2$ elde edilir ve buradan da $n=3$ gelir. Ancak $n=3$ şartı sağlamaz. $n-2|2n$ ise, $n-2|2n-2(n-2)=4$ bulunur ve buradan da $n=3,4$ veya 6 elde edilir. $n=4$ ve $n=6$ şartı sağlar.

7. Boyları aynı kalınlıkları farklı olan dik silindir şeklindeki iki mum aynı anda yakılıyor. Bu iki mumun birim zamanda eriyen miktarları aynıdır. Mumlar yakıldıktan 5 saat sonra mumların boyları oranının $\dfrac{22}{21}$ olduğu ölçülüyor.

Bu ölçümden 10 saat sonra ise mumların boyları oranı $\dfrac{16}{13}$ olduğuna göre, başlangıçtan itibaren kaç saat sonra mumların boyları oranı 7 olur?

Cevap: 30. Mumların başlangıçtaki boyları l, başlangıçtan 5 saat sonraki boyları $22k$ ve $21k$, başlangıçtan 15 saat sonraki boyları $16m$ ve $15m$ olsun.

$$\frac{l-22k}{l-16m} = \frac{l-21k}{l-13m} = \frac{5}{15}$$

elde ederiz. Bu oranlardan $\dfrac{5}{15} = \dfrac{(l-21k)-(l-22k)}{(l-13m)-(l-16m)} = \dfrac{k}{3m}$ olup $k = m$ elde ederiz. Dolayısıyla $l - 16k = 3 \cdot (l - 22k)$ ve $l = 25k$ olur. 5 saat içerisinde $25k$ den $22k$ ye geldiğine göre kalın olan mumun boyu saatte $\dfrac{3k}{5}$ azalmaktadır. Benzer şekilde ince olan mumun boyu saatte $\dfrac{4k}{5}$ azalır. Boyları oranı x saat sonra 7 oluyorsa, $25k - \dfrac{3kx}{5} = 7 \cdot \left(25k - \dfrac{4kx}{5}\right)$ ve $x = 30$ bulunur.

8. Bir küpün altı yüzünün her birinde birbirinden farklı iki basamaklı pozitif tam sayılar yazılmıştır. Ortak kenara sahip herhangi iki yüzdeki sayıların farkı en az 2 ise, bu altı sayının toplamı en az kaç olabilir?

Cevap: 81. Küpün yüzlerine yazılan sayıların içinde üç ardışık sayı bulunamaz. Demek ki 10,11,12 sayılarının en az biri, 13,14,15 sayılarının en az biri ve 16,17,18 sayılarının en az biri küpün herhangi bir yüzüne yazılmamıştır. Buna göre, bu altı sayının toplamı en az $10 + 11 + 13 + 14 + 16 + 17 = 81$ olmalıdır. (10,11), (13,14) ve (16,17) sayılarını karşı yüzlere yazarsak koşullar sağlanmış olur.

9. Dışbükey bir $ABCDE$ beşgeninin köşeleri bir çember üzerinde yer almaktadır. $AC \cap BD = \{F\}$, $BE \cap AD = \{K\}$, $CE \cap AD = \{L\}$ olmak üzere, $|AB| = |BK|$, $|CD| = |CL|$, $|EK| = |EL|$ ve $s(\widehat{BFC}) = 60°$ ise, $s(\widehat{AED})$ kaç derecedir?

Cevap: 140°. Verilen ikizkenar üçgenler kullanılarak, çemberde açıdan $s(\widehat{ABE}) = s(\widehat{ECD}) = s(\widehat{BEC})$ ve $s(\widehat{ADB}) = s(\widehat{CAD})$ olduğu kolaylıkla görülür. $s(\widehat{BEC}) = x$, $s(\widehat{ADB}) = y$ dersek, çember yaylarından $6x + 4y = 360°$ olur. Diğer taraftan, çemberde açıdan $s(\widehat{BFC}) = (4x + 2x)/2 = 3x$ olup, $x = 20°$ bulunur. Dolayısıyla, $y = 60°$

elde ederiz, buradan $s(\widehat{AED}) = x + 2y = 140^\circ$ bulunur.

10. a ve b pozitif tam sayılarının en küçük ortak katları ile en büyük ortak bölenlerinin farkı 13 ise, $a + b$ kaç farklı değer alabilir?

Cevap: 3. En büyük ortak bölen d olsun. $a = da_1, b = db_1$ olacak şekilde aralarında asal a_1, b_1 tam sayıları vardır. Bu durumda en küçük ortak kat da_1b_1 olur. $d(a_1b_1 - 1) = 13$ olmalıdır. d sayısı 13'ü böldüğünden $d = 1$ veya $d = 13$ olur. İlk durumda ebob 1, ekok 14 olup tüm çözümler $(a, b) = (1, 14), (14, 1), (2, 7), (7, 2)$ olur. İkinci durumda ebob 13, ekok 26 olup tüm çözümler $(a, b) = (13, 26), (26, 13)$ olur. Sonuç olarak $a + b$ sayısı $9, 15, 39$ değerlerini alabilir.

11. $|x + y| < 5$ şartını sağlayan x ve y gerçel sayıları için $x^2 + y$ ifadesinin alabileceği en küçük tam sayı değer kaçtır?

Cevap: -5. $x + y > -5$ olduğundan $y > -x - 5$ ve $x^2 + y > x^2 - x - 5$ elde ederiz. $x^2 - x - 5 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{21}{4} \geq -\frac{21}{4}$ olduğundan $x^2 - x - 5$ in alabileceği en küçük tam sayı değeri -5 tir. Eşitliği veren bir örnek: $x = \frac{1}{2},\ y = -\frac{21}{4}$.

12. $1, 2, \ldots, 303$ sayıları bir çember etrafına dizilimiştir. Yan yana olup toplamları 7 ile tam bölünen sayı ikililerinin sayısı en fazla kaç olabilir?

Cevap: 299. $i = 0, 1, ..., 6$ olmak üzere, $S(i)$ bu sayıların 7 modunda i ye eşit olanlarının kümesi olsun. Buna göre, $|S(0)| = 43$, $|S(1)| = 44$, $|S(2)| = 44$, $|S(3)| = 43$, $|S(4)| = 43$, $|S(5)| = 43$, $|S(6)| = 43$ olur. Ardışık yerleştirilmiş sayılardan oluşan bir grupta herhangi iki komşu sayının toplamı 7 ile bölünüyorsa ve bu grup genişletilemiyorsa bu gruba iyi grup diyelim. İyi grup sayısı k ise, yan yana olup toplamları 7 ile tam bölünen sayı ikililerinin sayısı $303 - k$ olacaktır. k sayısının en az 4 olacağı açıktır. Buna göre, 7 ile tam bölünen sayı ikililerinin sayısı en fazla 299 olabilir.

Şimdi 299 için bir örnek verelim. İlk grup 7 ile bölünen 43 sayıdan, ikinci grup dönüşümlü olarak $S(1)$ ve $S(6)$ kümelerinin elemanlarından, üçüncü grup dönüşümlü olarak $S(2)$ ve $S(5)$ kümelerinin elemanlarından ve dördüncü grup dönüşümlü olarak $S(3)$ ve $S(4)$ kümelerinin elemanlarından oluşursa toplamları 7 ile tam bölünen sayı ikililerinin sayısı 299 olur.

13. Bir ABC üçgeninde I noktası iç açıortayların kesişim noktasıdır. I noktasından geçip AB doğrusuna paralel olan doğru $[BC]$ kenarını D noktasında, I noktasından geçip AC doğrusuna paralel olan doğru ise $[BC]$ kenarını E noktasında kesmektedir. $|ID| = |IE| = 12$ ve $|DE| = 16$ ise, ABC üçgeninin çevresi nedir?

Cevap: 100. Açılardan BDI ve CEI üçgenlerinin ikizkenar oldukları kolayca görülür. Buradan $|BC| = 12 + 12 + 16 = 40$ bulunur. Açılardan ABC ve IDE üçgenlerinin benzer oldukları görülür ve benzerlik oranı $|BC|/|DE| = 40/16 = 5/2$'dir. O halde ABC üçgeninin çevresine x dersek $x/(12 + 12 + 16) = 5/2$ ve buradan da $x = 100$ elde edilir.

14. $2^n - 1$ sayısının 385 ile tam bölünmesini sağlayan en küçük n pozitif tam sayısının rakamları toplamı kaçtır?

Cevap: 6. $385 = 5 \cdot 7 \cdot 11$. 2'nin kuvvetlerinin $\pmod 5$, $\pmod 7$ ve $\pmod{11}$'deki değerleri incelendiğinde $5|2^n - 1 \iff 4|n$, $7|2^n - 1 \iff 3|n$ ve $11|2^n - 1 \iff 10|n$ olduğu görülür. O halde $385|2^n - 1$ ancak ve ancak $\text{okek}(4, 3, 10)|n$ yani $60|n$ bulunur. Demek ki şartı sağlayan en küçük pozitif tam sayı 60'tır.

15. 30 birim uzunluğundaki $[A, B]$ aralığının A noktasından B noktasına doğru sabit hızla giden bir X böceği ile B noktasından A noktasına doğru sabit hızla giden bir Y böceği aynı anda harekete başlıyor. Bir t gerçel sayısı için X ve Y böcekleri arasındaki mesafe iki kere t birim oluyor. Mesafenin ilk kez t birim olduğu anda X böceği B noktasından 15 birim uzaklıkta, ikinci kez t birim olduğu anda ise Y böceği B noktasından 10 birim uzaklıkta olduğuna göre, t kaçtır?

Cevap: 10. X ve Y böceklerinin hızları sırasıyla x ve y olsun. Başlangıçtan aralarındaki mesafenin ilk kez t olduğu zamana kadar geçen süre $(30 - 15)/x = (15 - t)/y$'dir. Başlangıçtan aralarındaki mesafenin ikinci kez t olduğu zamana kadar geçen süre $10/y = (20 + t)/x$'dir. Bu iki denklemden $x/y = 15/(15 - t) = (20 + t)/10$ ve buradan da $t^2 + 5t - 150 = 0$ bulunur. Demek ki $(t - 10)(t + 15) = 0$. t pozitif olacağından, $t = 10$ elde edilir.

16. Bir masa üzerinde birinde m diğerinde n bilye bulunan iki öbek bulunmaktadır. Aslı ve Zehra sırayla hamle yaparak bir oyun oynuyorlar. Oyuna Aslı başlıyor ve sırası gelen oyuncu masa üzerinde en az iki bilye içeren bir öbeği hiçbiri boş olmayan iki öbeğe ayırıyor. Hamle yapamayan oyuncu oyunu kaybediyor. Oyun $(m,n) = (10,11), (10,13), (11,12), (11,21)$ ve $(27,30)$ ikilileri için birer kez oynanırsa, Aslı bu oyunların kaçını kazanmayı garantileyebilir?

Cevap: 4. Oyunun sonunda birer bilyeden oluşan $m+n$ öbek oluşacaktır ve bu duruma gelmek için toplam $m+n-2$ hamle yapılacaktır. Buna göre, oyuncuların hamlelerindan bağımsız olarak her zaman $m+n-2$ tek ise oyunu Aslı, çift ise Zehra kazanıyor.

17. $AD \parallel BC$ ve $|AD| > |BC|$ olan bir $ABCD$ yamuğunda B noktasından geçen ve CD doğrusuna paralel olan doğru AD doğrusunu E noktasında kesiyor. $\widehat{CBE}$ ile $\widehat{DAC}$ açılarının iç açıortayları $[CE]$ yi sırasıyla F ve G noktalarında kesiyor. AC ile BE doğrularının kesişimi H olmak üzere $|CH| = 2$ ve $|CF| = |GE|$ ise, $|EH|$ nedir?

Cevap: 2. $BCDE$ dörtgeni bir paralelkenardır. CBF ve DEG üçgenleri eştir. Buna göre DG doğrusu $\widehat{CDA}$'nın açıortayıdır. Sonuç olarak G noktası ACD üçgeninde iç açıortayların kesişim noktasıdır. O zaman $s(\widehat{ACG}) = s(\widehat{DCG})$ olur. Ayrıca $s(\widehat{HEC}) = s(\widehat{ECD})$ olduğundan EHC üçgeni ikizkenardır ve $|EH| = |HC| = 2$ elde edilir.

18. $m^4 - 25^n = 6560$ eşitliğini sağlayan kaç (m,n) tam sayı ikilisi vardır?

Cevap: 2. 25^n tam sayı olmalı. O halde $n \geq 0$. $n \geq 1$ ise, $5|m^4$ yani $5|m$ olur. O zaman da $25|m^4 - 25^n$ bulunur ancak 25 sayısı 6560'ı bölmez. Demek ki bu durumda çözüm gelmez. $n = 0$ ise, $m^4 = 6561 = 9^4$ olduğundan $m = \pm 9$ bulunur. Tüm çözümler $(9,0)$ ve $(-9,0)$'dır.

19. c bir gerçel sayı olmak üzere,

$$\begin{aligned} x + 3y + 9z &= 1 \\ x + 4y + 16z &= 1 \\ x + 5y + cz &= 1 \end{aligned}$$

denklem sistemini sağlayan sonsuz çoklukta (x, y, z) gerçel sayı üçlüsü varsa, c aşağıdakilerden hangisi olabilir?

Cevap: 23. İlk iki denklemi $x + 3y = 1 - 9z$ ve $x + 4y = 1 - 16z$ şeklinde yazarsak, $x = 12z + 1$ ve $y = -7z$ olduğu kolaylıkla görülür. Üçüncü denklemde yerine koyduğumuzda $(c - 23)z = 0$ olur. $c \neq 23$ olursa, denklemin tek çözümü $(1, 0, 0)$ olup, $c = 23$ ise her z değeri için $(12z + 1, -7z, z)$ çözüm olur.

20. 91 özdeş top bir sıraya dizilmiş 13 farklı kutuya, kutuların birinde 1, birinde 2, birinde $3, \ldots,$ birinde 13 top olacak biçimde dağıtılacaktır. Bu dağılım, herhangi üç ardışık kutudaki top sayılarının toplamı 3 ile tam bölünecek şekilde kaç farklı biçimde yapılabilir?

Cevap: 138240. Sorudaki koşula göre, aralarında tam olarak iki kutu bulunan herhangi iki kutudaki topların sayısı $\pmod 3$'te denk olamlıdır. 1,2,...,13 sayılarını $\pmod 3$'te denk olan üç gruba ayırırsak gruplar $S_1 = \{1, 4, 7, 10, 13\}$, $S_2 = \{2, 5, 8, 11\}$ ve $S_3 = \{3, 6, 9, 12\}$ olur. Kutuları soldan sağ doğru numaralandıralım. 4 elemanlı tek grup S_1 olduğuna göre, 1., 4., 7., 10. ve 13. kutularaki top sayıları herhangi bir sırayla S_1 grubundaki sayılar olacaktır. 2., 5., 8. ve 11. kutulardaki top sayıları herhangi bir sırayla hem S_2 hem de S_3 grubundaki sayılar olabilir. Sonuç olarak toplam yerleştirme sayısı $5! \cdot 2 \cdot 4! \cdot 4! = 138240$ olur.

21. Bir Γ çemberi üzerinde alınan A ve B noktalarından çembere çizilen teğetlerin kesişim noktası C dir. AB doğrusuna B noktasında dik olan doğru AC doğrusunu D noktasında, AB doğrusuna A noktasında dik olan doğru Γ çemberini ikinci kez E noktasında kesiyor. $|AE| = 1$ ve $|BD| = 2$ ise, $|EC|$ nedir?

Cevap: $\dfrac{3}{\sqrt{2}}$. Öncelikle teğet-kiriş açıdan $s(\widehat{AEB}) = s(\widehat{BAD})$ dir. Soruda verilen $s(\widehat{EAB}) = s(\widehat{ABD}) = 90^\circ$ eşitliğinden EAB ve ABD üçgenleri benzer olup, $|AB| = \sqrt{2}$ bulunur. Teğetlikten $|AC| = |CB|$ ve $s(\widehat{ABD}) = 90^\circ$ olduğundan $|CD| = |AC| = |CB|$ bulunur. Buradan, ABD üçgeninde Pisagor teoreminden $|AD| = \sqrt{6}$ olup, $|BC| = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$ elde ederiz. Diğer taraftan, $|BC| = |CD|$ eşitliği ile EAB ve ABD üçgenlerinin benzerliği kullanılarak

$$s(\widehat{EBA}) = s(\widehat{BDA}) = s(\widehat{BDC}) = s(\widehat{DBC})$$

elde edilir ve buradan $s(\widehat{EBC}) = s(\widehat{ABD}) = 90°$ olur. Sonuç olarak, Pisagor teoreminden

$$|EC|^2 = |EB|^2 + |BC|^2 = |AE|^2 + |AB|^2 + |BC|^2 = \frac{9}{2}$$

elde ederiz ve dolayısıyla $|EC| = \dfrac{3}{\sqrt{2}}$ olur.

22. İki basamaklı kaç n pozitif tam sayısı için $7x^2 + 2y^2 = 3^n$ eşitliğini sağlayan (x, y) pozitif tam sayı ikilisi bulunur?

Cevap: 45. n sayısı çiftse $x = y = 3^{n/2-1}$ eşitliği sağlar. n tekse, eşitliği (mod 8)'de inceleyelim. $x^2, y^2 \equiv 0, 1, 4 \pmod 8$ olduğundan $7x^2 + 2y^2$'nin (mod 8)'de alabileceği değerler $0, 1, 2, 4, 6$ ve 7'dir. Ancak n tek olduğundan $3^n \equiv 3 \pmod 8$'dir. Sonuç olarak n tek iken çözüm yoktur. O halde şartı sağlayanlar iki basamaklı çift sayılardır.

23. $(x + 2)(y + 3) = 24$ eşitliğini sağlayan x ve y pozitif gerçel sayıları için xy çarpımının alabileceği en büyük değer nedir?

Cevap: 6. AGO eşitsizliğinden $x + 2 \geq 2\sqrt{2x}$ ve $y + 3 \geq 2\sqrt{3y}$ dir. Bu iki eşitsizliği taraf tarafa çarparsak $24 = (x + 2)(y + 3) \geq 4\sqrt{6xy}$ elde ederiz. Buradan da $xy \leq 6$ olur. Eşitlik $x = 2$, $y = 3$ iken sağlanır.

24. Başlangıçta 6 öğrencide farklı sayılarda kalemler bulunmaktadır. Bu öğrencilerden her biri, kendi kalemlerinin tamamını diğer beş öğrencinin tamamı veya bir kısmı arasında paylaştırarak bu beş öğrencide eşit sayıda kalem bulunmasını sağlayabiliyor. Buna göre, bu 6 öğrencinin toplam kalem sayısı en az kaç olabilir?

Cevap: 75. En az kalemi olan öğrenci diğer öğrencilere farklı sayıda kalem dağıtmak zorundadır. Buna göre, onun kalem sayısı en az 0+1+2+3+4=10 olmak zorundadır. O zaman toplam kalem sayısı en az 10+11+12+13+14+15=75 olacaktır. Eğer öğrencilerdeki kalem sayıları 10,11,12,13,14 ve 15 ise de, açıkça görüleceği üzere herhangi bir öğrenci kendi kalemlerini paylaştırarak diğer beş öğrencinin her birinde 15 kalem olmasını sağlayabilir.

25. Köşegenleri E noktasında dik kesişen bir $ABCD$ kirişler dörtgeninde B noktasından AD doğrusuna inilen dikmenin ayağı F olsun. $|BE| = 4$, $|ED| = 21$ ve $|FD| = 15$ ise, $|CD|$ nedir?

Cevap: $15\sqrt{2}$. Öncelikle $|FD| < |ED|$ olduğun için F noktası $[AD]$ üzerindedir. A, B, E, F çemberselliği kullanılarak, kuvvetten $|FD|(|FD| + |AF|) = |ED|(|ED| + |EB|)$ olup, $|AF| = 20$ bulunur. Buradan, AED üçgeninde Pisagor teoreminden $|AE| = 28$ elde ederiz. $ABCD$ kirişler dörtgeninde kuvvetten $|AE||EC| = |BE||ED|$ olup, $|EC| = 3$ bulunur. Son olarak, ECD üçgeninde Pisagor teoreminden $|CD| = 15\sqrt{2}$ olur.

26. Ondalık yazılımı en az iki tane 5 ve toplam iki farklı rakam içeren dört basamaklı tam olarak bir tane asal sayı vardır. Bu asal sayının 41 ile bölümünden kalan kaçtır?

Cevap: 22. En az 3 tane 5 olursa son basamak 5 olamayacağından sayı $555a$ formatında olmalıdır. a çift olursa sayı da çift olur. $3 \mid a$ olursa sayı da 3 ile bölünür. $a = 5$ olursa sayı 5 ile bölünür. $a = 1$ olursa sayı 7 ile bölünür. Yani bu durumda $a = 7$ olabilir. Tam olarak iki tane 5 olursa sayı $55aa, 5a5a, 5aa5, a55a, a5a5, aa55$ formatlarından biri şeklindedir. $55aa, 5aa5, a55a, aa55$ sayıları 11 ile, $5a5a, a5a5$ sayıları da 101 ile bölünür ve bu durumda asal sayı bulunamaz. Buna göre, şartları sağlayan sayı sadece 5557'dir. Bu sayının 41 ile bölümünden kalan 22'dir.

27. Her biri $1, 2, 3$ ten birine eşit olan 10 tane sayı verilmiştir. Bu sayıların en az yarısı 3 ise, bu sayıların küpleri toplamının bu sayıların toplamına oranı en az kaç olabilir?

Cevap: 7. a tane 1, b tane 2, c tane 3 olsun. Küpler toplamı $a + 8b + 27c$, sayıların toplamı $a+2b+3c$ dir. $a+8b+27c-7(a+2b+3c) = 6c-6a-6b = 12c - 60 \geq 0$ olduğundan oran en az 7 dir. Eşitlik $c = 5$ iken sağlanır.

28. Bir düzgün 132-genin 30 köşesi kırmızı, kalan 102 köşesi ise mavi renge boyanmıştır. Her ikisi mavi olan komşu köşe ikilisi sayısı, her ikisi kırmızı olan komşu köşe ikilisi sayısının 4 katı ise, farklı renkli komşu köşe ikilisi sayısı kaçtır?

Cevap: 12. Aynı renkli ardışık köşelerden oluşan bir grubun saat yönünde ve saat yönünün tersindeki ilk köşelerin her ikisi bu gruptaki köşelerden farklı renkteyse bu gruba dizi diyelim. Kırmızı renkli köşelerden oluşan toplam dizi sayısı k ise, mavi renkli köşelerden oluşan toplam dizi sayısı da k olacaktır. Sonuç olarak kırmızı ikili sayısı $30 - k$, mavi ikili sayısı ise $102 - k$ olacaktır. Buna göre $4(30 - k) = (102 - k)$ ve buradan da $k = 6$ olur. Buna göre, farklı renkli komşu köşe ikilisi sayısı da $2 \cdot 6 = 12$ olur.

29. Dışbükey bir $ABCD$ dörtgeninin köşegenleri dik kesişmektedir. K ve L noktaları, sırasıyla $[AB]$ ve $[CD]$ kenarları üzerinde $|AK| = 2|KB|$ ve $|CL| = 2|LD|$ olacak şekilde alınıyor. $|AC| = 48$ ve $|BD| = 45$ ise, $|KL|$ nedir?

Cevap: 34. $[BC]$ kenarı üzerinde bir M noktasını $|CM| = 2|MB|$ olacak biçimde alalım. Bu durumda MK doğrusu AC doğrusuna, LM doğrusu da BD doğrusuna paraleldir ve dolayısıyla $LM \perp MK$ olur. Benzerlikten $|KM|/|AC| = 1/3$ ve $|LM|/|BD| = 2/3$ elde edilir ve buradan da $|KM| = 16$ ve $|LM| = 30$ bulunur. O zaman KLM üçgeninde Pisagor teoreminden $|KL| = 34$ elde edilir.

30. $7^{2n+1} - 4 \cdot 7^n + 9$ ifadesinin bir tam kare olmasını sağlayan kaç n pozitif tam sayısı vardır?

Cevap: 1. $7^{2n+1} - 4 \cdot 7^n + 9 = m^2$ ve $m > 0$ olsun. O zaman $7^n(7^{n+1} - 4) = m^2 - 9 = (m-3)(m+3)$. $(m+3) - (m-3) = 6$ olduğundan $m - 3$ ve $m + 3$'ten tam olarak biri 7 ile bölünür.

$7|m - 3$ olsun. O zaman $m - 3 = 7^n k$ olacak şekilde k pozitif tam sayısı vardır ve $m + 3 = (7^{n+1} - 4)/k = 7^n k + 6$ elde edilir. Buradan $7^n(7 - k^2) = 6k + 4$ bulunur. Sağ taraf pozitif olduğundan, sol tarafa bakarak $k = 1$ veya $k = 2$ olabileceği görülür. Ancak her iki durumda da n tam sayı olmaz ve bu durumdan çözüm gelmez.

$7|m+3$ olsun. O zaman $m+3 = 7^n k$ olacak şekilde k pozitif tam sayısı vardır ve $m-3 = (7^{n+1}-4)/k = 7^n k-6$ elde edilir. Buradan da $7^n(k^2-7) = 6k-4$ bulunur. $k \geq 1$ olduğundan sağ taraf pozitiftir ve dolayısıyla sol tarafa bakarsak $k \geq 3$ olması gerektiği görülür. $k = 3$ için $n = 1$ ve $m = 18$ olur. $k \geq 4$ ise, $7^n(k^2 - 7) \geq 7k^2 - 49 > 7k^2 - 49 - (k - 3)(7k + 15) = 6k - 4$

olduğundan çözüm gelmez. Sonuç olarak şartları sağlayan sadece $n = 1$'dir.

31. $x^3 + y^3 = x^2 + y^2 = 1$ koşullarını sağlayan kaç (x, y) gerçel sayı ikilisi vardır?

Cevap: 2. $x+y = u, xy = v$ dersek verilen eşitliklerden $u^3 - 3uv = u^2 - 2v = 1$ elde ederiz. İkinci eşitlikten $u^3 = u + 2uv$ ve buradan da $3uv + 1 = u + 2uv$ buluruz. Buradan da $u(1 - v) = 1$ olur. $\dfrac{1}{(1-v)^2} = u^2 = 2v + 1$ eşitliğinden $2v^3 - 3v^2 = 0$ elde ederiz. $v = 0$ için $u = 1$ ve buradan da çözümler $(x, y) = (1, 0), (0, 1)$ olur. $v = \dfrac{3}{2}$ için $u(1 - v) < 0$ olduğundan gerçel çözüm gelmez.

32. Başlangıçta 1'den 30'a kadar numaralandırılmış otuz kutunun her birinde numarası kadar top bulunmaktadır. Her işlemde bir veya birkaç kutudan eşit sayıda top çıkarılıyor. En az kaç işlem sonucunda tüm kutuların boş olması sağlanabilir?

Cevap: 5. Her işlemde bir k sayısı seçip en az k top içeren her kutudan k top alacağız. k sayılarını 16,8,4,2,1 olarak seçersek 5 işlem yeterli olacaktır.

Şimdi daha az işlemin yeterli olmayacağını gösterelim. İşlem sayısı n ve bu işlemlerde kutulardan alınan top sayıları $t_1, t_2, ..., t_n$ olsun. Buna göre, 1,2,...30 sayılarının her biri $t_1, t_2, ..., t_n$ sayılarının bazılarının toplamına eşit olmak zorundadır. n elemanlı kümenin alt küme sayısı 2^n olduğuna göre, buradan $2^n \geq 30$ ya da $n \geq 5$ elde edilir.