

31. Ulusal Bilim Olimpiyatları
Ortaokul Matematik İkinci Aşama Sınavı

20 Aralık 2023

1. Masa üzerinde $1, 2, \dots, n$ sayılarıyla numaralandırılmış n tane boş kırmızı ve $1, 2, \dots, n$ sayılarıyla numaralandırılmış n tane boş beyaz kutu bulunuyor. Her işlemde renkleri farklı olan iki kutuya birer top yerleştiriliyor. Birkaç işlemden sonra numaraları aynı olan herhangi kırmızı ve beyaz kutu ikilisi için, ya kırmızı kutuda beyaz kutudan 6 fazla ya da beyaz kutuda kırmızı kutudan 16 fazla top varsa, n sayısının alabileceği tüm değerleri bulunuz.

2. Bir $ABCD$ kirişler dörtgeninde BAD ve CAD üçgenlerinin iç teğet çember merkezleri sırasıyla I ve J olsun. I noktasından geçen ve BD doğrusuna dik olan doğru ile J noktasından geçen ve AC doğrusuna dik olan doğrunun kesişim noktası K olsun. $|KI| = |KJ|$ olduğunu gösteriniz.

3. m ve n aralarında asal pozitif tam sayılar olmak üzere,

$$\frac{n^4 + m}{m^2 + n^2} \text{ ve } \frac{n^4 - m}{m^2 - n^2}$$

sayılarının aynı anda tam sayı olamayacağını gösteriniz.

4. x_1, x_2, \dots, x_{31} gerçel sayılar olmak üzere,

$$\sum_{i,j=1,2,\dots,31, i \neq j} [x_i x_j] - 30 \left(\sum_{i=1,2,\dots,31} [x_i^2] \right)$$

ifadesinin alabileceği en büyük değeri belirleyiniz.

Not. Bir x gerçel sayısı için, $[x]$ ile x sayısından küçük olmayan en küçük tam sayı, $\lfloor x \rfloor$ ile x sayısını aşmayan en büyük tam sayı gösteriliyor: $[2.7] = 3$, $\lfloor 2.7 \rfloor = 2$ ve $[4] = \lfloor 4 \rfloor = 4$.