

20. Ulusal Matematik Olimpiyatı

İkinci Aşama Sınavı

24-25 Kasım 2012

Çözümler

1. Her n pozitif tam sayısı için $P(n!) = |P(n)|!$ koşulunu sağlayan tüm tam sayı katsayılı $P(x)$ polinomlarını bulunuz.

Çözüm: Cevap: $P(x) = 1$, $P(x) = 2$ ve $P(x) = x$.

Öncelikle, $P(x)$ ve $Q(x)$ polinomlar olmak üzere, $P(x) = Q(x)$ eşitliği sonsuz çoklukta x için sağlanıyorsa, her x için $P(x) = Q(x)$ olduğunu hatırlayalım.

$n = 1, 2$ için $P(1) = |P(1)|!$ ve $P(2) = |P(2)|!$ olur ve böylece $P(1), P(2) \in \{1, 2\}$ elde edilir.

Durum 1: $P(2) = 1$. Her n pozitif tam sayısı için $P(n!) > 0$ sağlanır. O halde, m herhangi bir pozitif tam sayı ve $n = m!$ olmak üzere, $P(n!) = P(n)!$ elde edilir. Bezout teoreminden $n! - 2|P(n!) - P(2) = P(n)! - 1$ olur. $m \geq 2$ iken $n! - 2$ çifttir ve dolayısıyla $P(n)! - 1$ de çifttir. O zaman $P(n)!$ tektir ve dolayısıyla $P(n) \in \{0, 1\}$ elde edilir. O halde $P(x) = c$ eşitliğini sağlayan sonsuz çoklukta x sayısının bulunduğu $c \in \{0, 1\}$ vardır. Demek ki $P(x)$ sabit bir polinomdur. $P(2) = 1$ olduğundan her x için $P(x) = 1$ olur.

Durum 2: $P(2) = 2$ ve $P(1) = 1$. Bezout teoreminden $5 = 3! - 1|P(3!) - P(1) = |P(3)|! - 1$ ve $4 = 3! - 2|P(3!) - P(2) = |P(3)|! - 2$ elde edilir. Buradan da $|P(3)| = 3$ olması gerektiği görülür. O zaman $P(6) = P(3!) = |P(3)|! = 6$ olur. Benzer şekilde $P(6!) = 6!$, $P((6!)!) = (6!)!$,... elde edilir. Sonuç olarak $P(x) = x$ eşitliği sonsuz çoklukta x için sağlanır. Dolayısıyla her x için $P(x) = x$ olur.

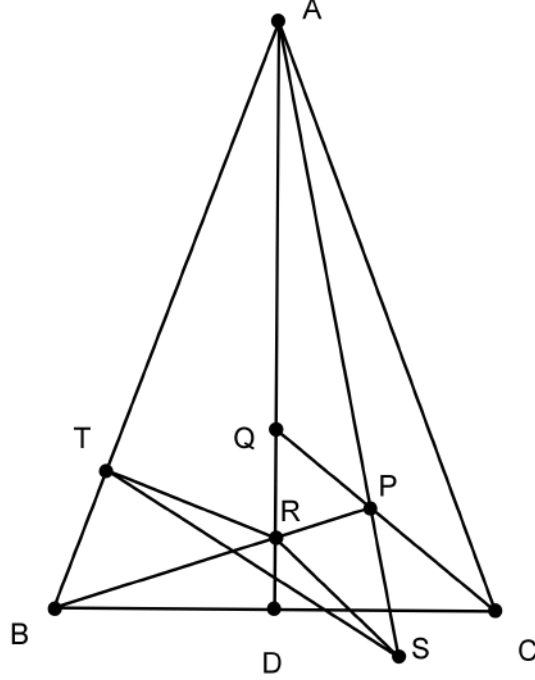
Durum 3: $P(2) = 2$ ve $P(1) = 2$. Yine Bezout teoreminden $5 = 3! - 1|P(3!) - P(1) = |P(3)|! - 2$ bulunur. O zaman $|P(3)| = 2$ olmalı ve böylece $P(6) = P(3!) = |P(3)|! = 2$ elde edilir. Benzer biçimde $P(6!) = 2$, $P((6!)!) = 2$,... elde edilir. Sonuç olarak $P(x) = 2$ eşitliği sonsuz çoklukta x için sağlanır ve dolayısıyla her x için $P(x) = 2$ olur.

2. ABC , $|AB| = |AC|$ koşulunu sağlayan bir ikizkenar üçgen ve D , A ya ait yüksekliğin ayağı olmak üzere, ADC üçgeninin iç bölgesindeki bir P noktası $m(\widehat{APB}) > 90^\circ$ ve $m(\widehat{PBD}) + m(\widehat{PAD}) = m(\widehat{PCB})$ koşullarını sağlıyor. $CP \cap AD = \{Q\}$ ve $BP \cap AD = \{R\}$ olsun. $[AB]$ üstünde yer alan bir T noktası ile $[AP]$ üstünde ve $[AP]$ dışında yer alan bir S noktası, $m(\widehat{TRB}) = m(\widehat{DQC})$ ve $m(\widehat{PSR}) = 2m(\widehat{PAR})$ koşullarını sağlıyorsa, $|TR| = |RS|$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $\angle PAR = \angle QBR$ olduğu kolayca görülür. $\angle PAR = \alpha$, $\angle PBC = \beta$ ve $\angle BAD = \theta$ olsun. P noktası ve ABC üçgeni için Ceva teoreminin trigonometrik versiyonu uygulanırsa

$$\frac{\sin(\theta + \alpha)}{\sin(\theta - \alpha)} \cdot \frac{\cos(\alpha + \beta + \theta)}{\sin(\alpha + \beta)} \cdot \frac{\sin \beta}{\cos(\beta + \theta)} = 1 \quad (1)$$

elde edilir.



$2 \cos(\alpha + \beta + \theta) \sin \beta = \sin(\alpha + 2\beta + \theta) - \sin(\alpha + \theta)$ ve $2 \sin(\alpha + \beta) \cos(\beta + \theta) = \sin(\alpha + 2\beta + \theta) - \sin(\theta - \alpha)$ olduğu için (1) eşitliği

$$\frac{\sin(\theta + \alpha)}{\sin(\theta - \alpha)} \cdot \frac{\sin(\alpha + 2\beta + \theta) - \sin(\alpha + \theta)}{\sin(\alpha + 2\beta + \theta) - \sin(\theta - \alpha)} = 1,$$

olarak yazılabilir. Buradan $(\sin(\theta + \alpha) - \sin(\theta - \alpha)) \sin(\alpha + 2\beta + \theta) = \sin^2(\theta + \alpha) - \sin^2(\theta - \alpha)$ ve sonuç olarak

$$\sin(\alpha + 2\beta + \theta) = \sin(\theta + \alpha) + \sin(\theta - \alpha) = 2 \sin \theta \cos \alpha \quad (2)$$

elde edilir. Öte yandan, R noktası ve ATS üçgeni için Ceva teoreminin trigonometrik versiyonu uygulanırsa

$$\frac{\sin(\alpha + 2\beta + \theta)}{\sin \theta} \cdot \frac{\sin \alpha}{\sin(2\alpha)} \cdot \frac{\sin \angle RST}{\sin \angle RTS} = 1 \quad (3)$$

bulunur. $\sin(2\alpha) = 2 \cos \alpha \sin \alpha$ ve $\sin(\alpha + 2\beta + \theta) = 2 \sin \theta \cos \alpha$ kullanılarak (3) eşitliği

$$\frac{2 \sin \theta \cos \alpha}{\sin \theta} \cdot \frac{1}{2 \cos \alpha} \cdot \frac{\sin \angle RST}{\sin \angle RTS} = 1$$

olarak yazılabilir ve sonuç olarak $\sin \angle RST = \sin \angle RTS$ olur. $\angle RST$ ve $\angle RTS$ bir üçgenin iki iç açısı olduklarından bu iki açı eşittir ve ispat tamamlanır.

3. Tüm x, y gerçel sayıları için,

i. $f(f(x^2) + y + f(y)) = x^2 + 2f(y)$ ve

ii. $x \leq y \implies f(x) \leq f(y)$

koşullarını sağlayan bütün $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ fonksiyonlarını belirleyiniz.

Çözüm: Cevap: $f(x) = x$.

f fonksiyonunun birebir olduğunu gösterelim. (i) de $y = 0$ yazarak her x için $f(f(x^2) + f(0)) = x^2 + 2f(0)$ elde edilir, bir diğer deyişle her negatif olmayan a değeri için

$$f(f(a) + f(0)) = a + 2f(0) \quad (1)$$

olur. Buradan negatif olmayan gerçel sayılar üzerinde f fonksiyonunun birebir olduğu gelir. y_1 ve y_2 iki gerçel sayı olsun. (i) de y sayısını sabitlersek f fonksiyonunun üstten sınırlı olmadığı görülüyor. $f(y_1) = f(y_2)$ olursa $f(f(x^2) + y_1 + f(y_1)) = f(f(x^2) + y_2 + f(y_2))$. Yeterince büyük x değeri için $f(x^2) + y_1 + f(y_1)$ ve $f(x^2) + y_2 + f(y_2)$ pozitif olacaktır. Buna göre, $y_1 = y_2$ olur.

$f(0) = 0$ olduğunu gösterelim. $f(0) \leq 0$ ise $a = -2f(0)$ için $f(f(-2f(0)) + f(0)) = 0$ olur. Demek ki bir c sayısı için $f(c) = 0$. (i) de $x = 0$ ve $y = c$ yazarsak $f(f(0) + c) = 0$ gelir. f birebir olduğundan $f(0) + c = c$ ve $f(0) = 0$ gelir. $f(0) \geq 0$ ise (i) de $x = y = 0$ yazarsak $f(2f(0)) = 2f(0)$ gelir. Şimdi $a = 3f(0) = f(0) + f(2f(0))$ alalım. (1) e göre $f(a) = f(f(0) + f(2f(0))) = 2f(0) + 2f(0) = 4f(0)$ olur. Her iki tarafa önce $f(0)$ ekleyip daha sonra f fonksiyonunu uygularsak $f(f(a) + f(0)) = f(5f(0)) = 3f(0) + 2f(0) = 5f(0)$ gelir. (i) de $x = 0$ ve $y = 2f(0)$ yazarsak $f(5f(0)) = 4f(0)$ olur. Sonuç olarak $f(5f(0))$ sayısı $5f(0)$ ve $4f(0)$ değerlerine eşittir ve bu da $f(0) = 0$ olduğunu gösteriyor.

Şimdi (1) den $a \geq 0$ için $f(f(a)) = a$ ve tüm gerçel y değerleri için $f(y + f(y)) = 2f(y)$ gelir. $y = f(a)$ yazarsak $f(f(a) + a) = 2f(f(a)) = 2a$, $y = a$ yazarsak $f(a + f(a)) = 2f(a)$ gelir. Demek ki tüm $a \geq 0$ değerleri için $f(a) = a$. Demek ki (i) koşulu $f(x^2 + y + f(y)) = x^2 + 2f(y)$ oluyor. Her y_0 için $x_0^2 + y_0 + f(y_0) > 0$ olacak şekilde bir x_0 vardır. O halde $f(x_0^2 + y_0 + f(y_0)) = x_0^2 + y_0 + f(y_0) = x_0^2 + 2f(y_0)$ olur ve buradan da $f(y_0) = y_0$ gelir.

$f(x) = x$ fonksiyonu bariz şekilde koşulları sağlıyor.

4. Tüm x, y, z pozitif gerçel sayıları için,

$$\frac{x(2x - y)}{y(2z + x)} + \frac{y(2y - z)}{z(2x + y)} + \frac{z(2z - x)}{x(2y + z)} \geq 1$$

olduğunu kanıtlayınız.

Çözüm: Eşitsizliğin ilk terimi $\frac{x(2x - y)}{y(2z + x)} = \frac{2(x^2 + yz)}{y(2z + x)} - 1$ şeklinde yazılabilir. Kalan iki terimi de benzer şekilde yazarsak ispatlanması gereken eşitsizlik

$$f(x, y, z) = \frac{x^2 + yz}{y(2z + x)} + \frac{y^2 + zx}{z(2x + y)} + \frac{z^2 + xy}{x(2y + z)} \geq 2$$

olur. a_1, a_2, a_3 pozitif gerçel sayılar olmak üzere Cauchy-Schwarz eşitsizliğinden

$$\frac{x^2}{a_1} + \frac{y^2}{a_2} + \frac{z^2}{a_3} \geq \frac{(x + y + z)^2}{a_1 + a_2 + a_3} \quad (1)$$

elde edilir.

$$g(x, y, z) = \frac{x^2}{y(2z + x)} + \frac{y^2}{z(2x + y)} + \frac{z^2}{x(2y + z)}$$

olsun. $a_1 = y(2z + x)$, $a_2 = z(2x + y)$ ve $a_3 = x(2y + z)$ alırsak (1) den

$$g(x, y, z) \geq \frac{(x + y + z)^2}{3(xy + yz + zx)}$$

elde edilir.

$$h(x, y, z) = \frac{x}{2x + y} + \frac{y}{2y + z} + \frac{z}{2z + x}$$

olsun. Benzer şekilde $a_1 = x(2x + y)$, $a_2 = y(2y + z)$ ve $a_3 = z(2z + x)$ alırsak (1) den

$$\begin{aligned} h(x, y, z) &= \frac{x}{2x + y} + \frac{y}{2y + z} + \frac{z}{2z + x} \\ &= \frac{x^2}{x(2x + y)} + \frac{y^2}{y(2y + z)} + \frac{z^2}{z(2z + x)} \geq \frac{(x + y + z)^2}{2(x^2 + y^2 + z^2) + xy + yz + zx} \end{aligned}$$

elde edilir. Sonuç olarak,

$$\begin{aligned} f = g + h &\geq (x + y + z)^2 \left(\frac{1}{3(xy + yz + zx)} + \frac{1}{2(x^2 + y^2 + z^2) + xy + yz + zx} \right) \\ &= \frac{2(x + y + z)^4}{3(xy + yz + zx)(2(x^2 + y^2 + z^2) + xy + yz + zx)} \\ &= \frac{2(x + y + z)^4}{3(xy + yz + zx)(2(x + y + z)^2 - 3(xy + yz + zx))} \\ &\geq \frac{2(x + y + z)^4}{\left(\frac{3(xy + yz + zx) + 2(x + y + z)^2 - 3(xy + yz + zx)}{2} \right)^2} = 2 \end{aligned}$$

olur (son eşitsizlik AG ortalama eşitsizliğidir) ve ispat tamamlanır.

5. $x_i \in \{1, 2, \dots, 20\}$, $(1 \leq i \leq 2012)$, biçimindeki tüm $(x_1, x_2, \dots, x_{2012})$ 2012-lilerinden oluşan kümeyi P ile gösterelim.

Bir $S \subset P$ altkümesi, her $(x_1, x_2, \dots, x_{2012}) \in S$ için,

$$y_i \leq x_i \quad (1 \leq i \leq 2012) \implies (y_1, y_2, \dots, y_{2012}) \in S$$

koşulunu sağlıyorsa, S ye *alçalan küme*;

$$x_i \leq y_i \quad (1 \leq i \leq 2012) \implies (y_1, y_2, \dots, y_{2012}) \in S$$

koşulunu sağlıyorsa da, S ye *yükselen küme* diyelim.

A ve B boş olmayan bir alçalan ve bir yükselen küme olmak üzere, $|A \cap B|/(|A| \cdot |B|)$ nin alabileceği en büyük değeri belirleyiniz.

Çözüm: Cevap: $\frac{1}{20^{2012}}$.

n bir pozitif tam sayı olmak üzere, $x_i \in \{1, 2, \dots, 20\}$, $(1 \leq i \leq n)$, şeklindeki tüm (x_1, x_2, \dots, x_n) n-lilerinden oluşan kümeyi P_n ile gösterelim. $A_n \subset P_n$ ve $B_n \subset P_n$ sırasıyla boş olmayan alçalan ve

yükselen küme olmak üzere, $f(A_n, B_n) = |A_n \cap B_n| / (|A_n| \cdot |B_n|)$ ifadesinin alabileceği en büyük değerin $\frac{1}{20^n}$ olduğunu gösterelim. $A_n = B_n = P_n$ ise $f(A_n, B_n) = \frac{1}{20^n}$ olur. n üzerine tümevarımla

$$f(A_n, B_n) \leq \frac{1}{20^n} \quad (1)$$

olduğunu göstereceğiz ve ispat tamamlanmış olacak.

$n = 1$ olsun. $|A_1 \cap B_1| = 0$ ise eşitsizlik bariz şekilde sağlanıyor. $|A_n \cap B_n| = c > 0$ ise tanımlara göre, $a + b + c = 20$ olacak şekilde negatif olmayan a, b tam sayıları için $A_1 = \{1, 2, \dots, a + c\}$ ve $B_1 = \{20 - b - c + 1, \dots, 20\}$ olacaktır. O zaman $|A_1| = a + c$, $|B_1| = b + c$ ve $f(A_1, B_1) = \frac{c}{(a+c)(b+c)} = \frac{c}{a+b+c+ab} = \frac{1}{20+ab/c} \leq \frac{1}{20}$ olur.

(1) eşitsizliğinin $n - 1$ için doğru olduğunu varsayalım. A_n kümesinin $(x_1, x_2, \dots, x_n = i)$ şeklindeki tüm elemanlarından oluşan alt kümesi $A_n^-(i)$ olsun. $A_n^-(i)$ kümesini,

$$(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) \in A_n^-(i) \text{ ancak ve ancak } (x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n = i) \in A_n(i)$$

olacak şekilde tanımlayalım. Benzer şekilde $B_n(i)$ ve $B_n^-(i)$ kümeleri tanımlanıyor. Buna göre,

$$A_n = \cup_{i=1}^{20} A_n(i), |A_n| = \sum_{i=1}^{20} |A_n^-(i)| \text{ ve } A_1 \subset A_2 \subset \dots \subset A_{20}$$

ve benzer şekilde

$$B_n = \cup_{i=1}^{20} B_n(i), |B_n| = \sum_{i=1}^{20} |B_n^-(i)| \text{ ve } B_1 \supset B_2 \supset \dots \supset B_{20}$$

olur. Tümevarım varsayımına göre,

$$|A_n \cap B_n| = \sum_{i=1}^{20} |A_n^-(i) \cap B_n^-(i)| \leq \frac{1}{20^{n-1}} \sum_{i=1}^{20} |A_n^-(i)| \cdot |B_n^-(i)| \quad (2)$$

olur. Chebyshev yeniden düzenleme eşitsizliğinden

$$\sum_{i=1}^{20} |A_n^-(i)| \cdot |B_n^-(i)| \leq \frac{1}{20} \left(\sum_{i=1}^{20} |A_i| \right) \left(\sum_{i=1}^{20} |B_i| \right) = \frac{1}{20} |A_n| \cdot |B_n| \quad (3)$$

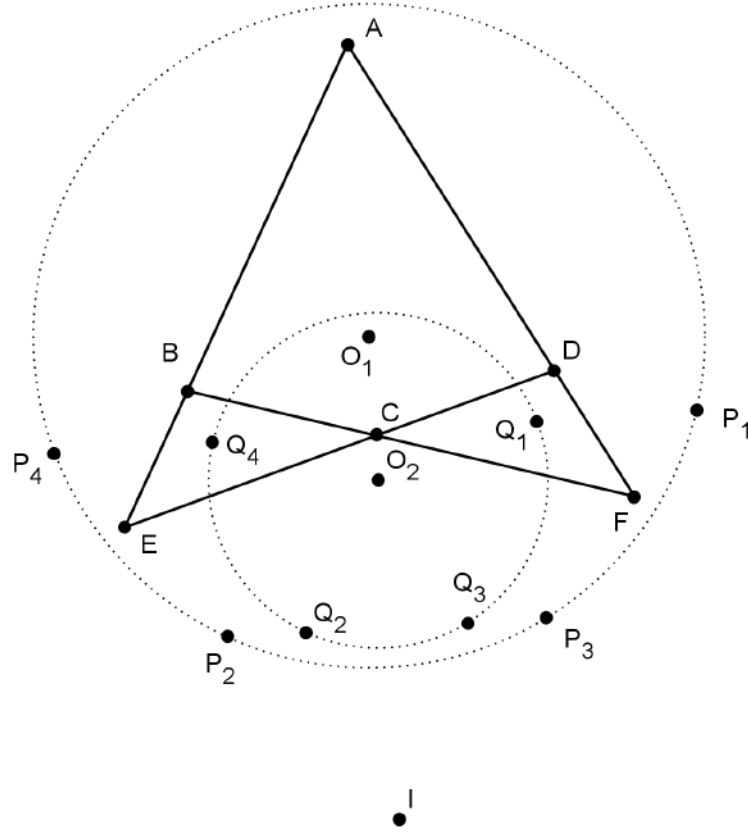
gelir. Son olarak (1) eşitsizliği (2) ve (3) eşitsizliklerinden elde ediliyor.

6. Sırasıyla, $[AE]$ ve $[AF]$ doğru parçaları üstünde yer alan B ve D noktaları için, ABF ve ADE üçgenlerinin A köşelerine ait dış teğet çemberleri aynıdır. Bu çemberin merkezi I , $[BF] \cap [DE] = \{C\}$ ve $IAB, IBC, ICD, IDA, IAE, IEC, ICF, IFA$ üçgenlerinin çevrel çemberlerinin merkezleri sırasıyla, $P_1, P_2, P_3, P_4, Q_1, Q_2, Q_3, Q_4$ olsun.

a. P_1, P_2, P_3, P_4 noktalarının ve Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 noktalarının çemberdeş olduğunu gösteriniz.

b. Bu çemberlerin merkezleri sırasıyla, O_1 ve O_2 olmak üzere, O_1, O_2, I noktalarının doğrudan olduğunu gösteriniz.

Çözüm:



İlk olarak P_1 ve P_3 noktalarının IF üzerinde, P_2 ve P_4 noktalarının IE üzerinde bulunduğunu gösterelim. Bu iddialardan birini göstermek yeterli, çünkü diğer üçü de benzer şekilde ispatlanabilir. $\angle BP_1I = 2\angle BAI = \angle BAF$ 'dir. $\angle AP_1B = 2\angle BIA = \angle EBF - \angle BAF = \angle AFB$ olduğundan A, F, P_1, B noktalarının çemberdeş olduklarını görürüz. Böylece $P_1 \in IF$ olur. Sonuç olarak, P_4, P_2, I doğrusaldır ve P_1, P_3, I noktaları da doğrusaldır.

Her $i = 1, 2, 3, 4$ için sorudaki P_i merkezli çemberi (P_i) ile gösterelim ve bu çemberin yarıçapı R_i olsun. (P_1) ve (P_4) çemberlerinin kuvvet eksenini AI doğrusu, (P_2) ve (P_3) çemberlerinin kuvvet eksenini CI doğrusu olduğundan

$$\frac{R_1}{R_4} = \frac{\sin \angle ABI}{\sin \angle ADI} = \frac{\sin \angle CBI}{\sin \angle CDI} = \frac{R_2}{R_3}$$

elde ederiz. Böylece P_1, P_2, P_3, P_4 noktalarının çemberdeş oldukları görülür. Benzer biçimde Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 noktaları da çemberdeştir ve (a) ispatlanmış olur.

Şimdi (b)'yi ispatlayalım. A, F, P_1, B noktalarının çemberdeş olduklarını biliyoruz. $\angle AQ_4F = 2\angle AIF = \angle ABF$ olduğundan Q_4 noktasının da bu çember üzerinde yer aldığını görürüz. Böylelikle

$$\angle AP_1Q_4 = \angle EBQ_4 = \angle EBI = \frac{\angle AP_1I}{2} = \angle AP_1P_4$$

olur ve buradan da Q_4 noktasının P_1P_4 doğrusu üzerinde olduğu anlaşılır. Benzer biçimde P_1, P_4, Q_1, Q_4 noktalarının doğrusal, P_2, P_3, Q_2, Q_3 noktalarının da doğrusal olduklarını görürüz. $P_1P_4 \cap P_2P_3 = \{G\}$, $P_1P_2 \cap P_3P_4 = \{S\}$ ve $Q_1Q_2 \cap Q_3Q_4 = \{R\}$ olsun. Brokard teoreminden dolayı I 'nin, (O_1) çemberine göre kutup doğrusunun GS , (O_2) çemberine göre kutup doğrusunun ise GR olduğu görülür. Öte yandan hem GP_1, GS, GP_3, GI dördlüsünün hem de GQ_1, GR, GQ_3, GI dördlüsünün harmonik kalem olduklarını biliyoruz. O halde, G, S, R noktaları doğrusaldır ve böylece $IO_1 \perp GS$ ve $GR \perp IO_2$ elde edilir. Buradan da $I \in O_1O_2$ olduğu gelir.