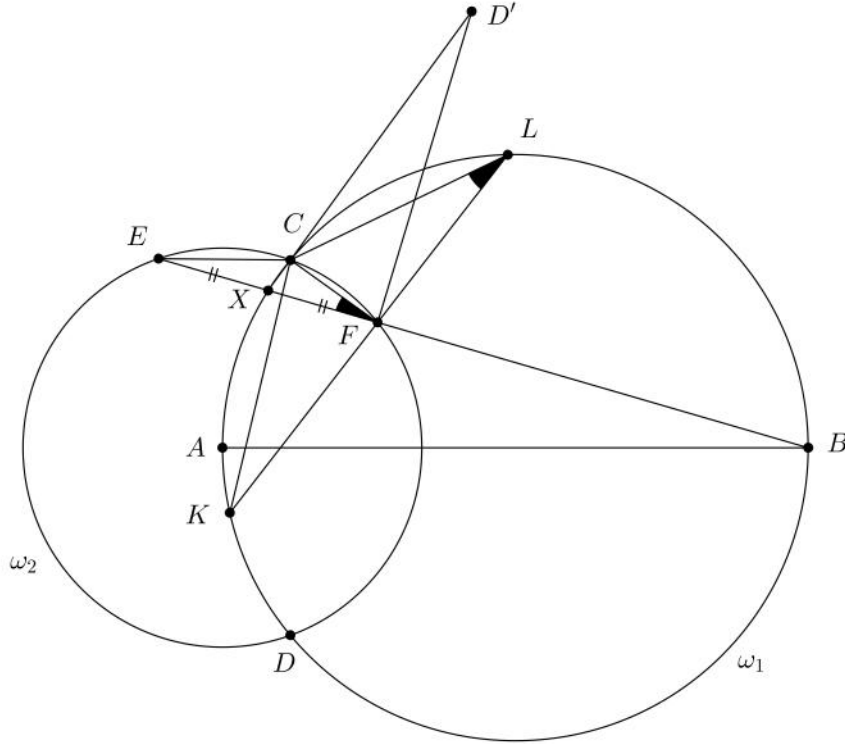


1. $[AB]$ çaplı bir ω_1 çemberi ile A merkezli bir ω_2 çemberi C ve D noktalarında kesişiyor. ω_2 çemberinin üstünde, ω_1 çemberinin dışında ve AB doğrusuna göre C ile aynı tarafta yer alan bir E noktası için, BE doğrusu ω_2 çemberini ikinci kez F noktasında kesiyor. ω_1 çemberinin üstünde ve bu çemberin C den geçen çapına göre A ile aynı tarafta olan bir K noktası $2|CK| \cdot |AC| = |CE| \cdot |AB|$ koşulunu sağlıyor. KF doğrusu ω_1 çemberini ikinci kez L noktasında kesiyor.

D noktasının BE doğrusuna göre simetrisinin, L , F ve C noktalarından geçen çemberin üstünde olduğunu kanıtlayınız.

Çözüm : D noktasının BE doğrusuna göre simetrisi D' olsun. R_1 ve R_2 sırasıyla ω_1 ve ω_2



çemberlerinin yarıçapları olsun. $2 \cdot CK \cdot AC = CE \cdot AB$ olduğu için $CK/CE = R_1/R_2$ elde ederiz. Sinüs teoreminden $2 \cdot \sin \angle CLF = CK/R_1 = CE/R_2 = 2 \cdot \sin \angle CFE$ olur ve böylece $\angle CLF = \angle CFE$ bulunur (çünkü bu iki açının toplamı 180° den küçük.) BE doğrusunun ω_1 çemberi ile ikinci kesişimi X noktası olsun. $AC = AD$ ve $[AB]$ nin ω_1 in bir çapı olmasından dolayı ω_1 in küçük BC ve BD yayları aynı uzunluktadır. Buradan da $\angle DXB = \angle CXB$ elde edilir. $\angle D'XB = \angle DXB$ olduğu için X, C, D' noktaları doğrusaldır. $\angle AXB = 90^\circ$ olduğundan $EX = FX$ olur. $\angle ACB = 90^\circ$ olduğu

için ise BC doğrusunun ω_2 çemberine teğet olduğu görülür ve buradan da $\angle FCB = \angle BEC$ bulunur. Diğer taraftan, $\angle DCF = \angle DEF$ olduğu için $\angle DEC = \angle DCB = \angle CXB = \angle DXB$ bulunur ve böylece $\angle ECX = \angle DEX$ ve $\angle CEX = \angle EDX$ elde edilir. Sonuç olarak, ECX ve DEX üçgenleri benzerdir ve $XC \cdot XD' = XC \cdot XD = EX^2 = FX^2$ olur. $\angle CLF = \angle CFE$ olduğundan XF doğrusu CLF üçgeninin çevrel çemberine teğettir. $XC \cdot XD' = FX^2$ olduğundan dolayı da D' noktasının bu çember üzerinde olduğu görülür ve ispat tamamlanır.

2. m pozitif bir tam sayı olsun.

a. $1 + km^3$ sayısının bir tam küp olmasını ve $1 + kn^3$ sayılarının hiçbir $n < m$ pozitif tam sayısı için bir tam küp olmamasını sağlayan sonsuz çoklukta k pozitif tam sayısı bulunduğunu kanıtlayınız.

b. $p \equiv 2 \pmod{3}$ koşulunu sağlayan bir p asal sayısı ve bir r pozitif tam sayısı için, $m = p^r$ ise, **(a)** kısmındaki koşulu sağlayan tüm k pozitif tam sayılarını bulunuz.

Çözüm : **a.** $m = 1$ durumunda her i pozitif tam sayısı için $k = i^3 - 1$ sayısı koşulları sağlıyor. Şimdi $m > 1$ durumunda her i pozitif tam sayısı için $k = i^3m^6 + 3i^2m^3 + 3i$ sayısının koşulları sağladığını gösterelim. $1 + km^3$ bir tam küptür:

$$1 + km^3 = 1 + (i^3m^6 + 3i^2m^3 + 3i)m^3 = i^3m^9 + 3i^2m^6 + 3im^3 + 1 = (im^3 + 1)^3.$$

Her $1 \leq n < m$ sayısı için

$$1 + kn^3 = 1 + i^3m^6n^3 + 3i^2m^3n^3 + 3in^3 \quad (1)$$

İspatı tamamlamak için

$$(im^2n)^3 < 1 + kn^3 < (im^2n + 1)^3$$

olduğunu gösterelim. İlk eşitsizlik (1) den geliyor. $n < m$ olduğuna göre, $(n - m)(im^3n + n + m) < 0$. Buna göre, $im^3n^2 + n^2 < im^4l + m^2$. Her iki tarafı $3in$ ile çarpıp taraflara $1 + i^3m^6n^3$ eklersek ikinci eşitsizlik elde edilir.

b. $m = p^r$ ve $1 + kp^{3r} = t^3$ olsun. O zaman $kp^{3r} = (t - 1)(t^2 + t + 1)$ olur. $obeb(t - 1, t^2 + t + 1) = d$ olsun. $obeb(t - 1, t^2 + t + 1) = obeb(t - 1, 2t + 1) = obeb(t - 1, 3) = d$ olduğuna göre, $d \mid 3$ olur. $p \neq 3$ olduğuna göre, $p^{3r} \mid t^2 + t + 1$ ya da $p^{3r} \mid t - 1$.

Durum 1: $p^{3r} \mid t^2 + t + 1$. $t^2 + t + 1 = p^{3r}j$ olsun. $t^2 + t + 1$ tek olduğuna göre, $p \neq 2$. İkinci dereceli $t^2 + t + 1 - p^{3r}j = 0$ denkleminin diskriminantı $1 - 4(1 - p^{3r}j) = 4p^{3r}j - 3$ bir tam kare olmak zorundadır: $4p^{3r}j - 3 = z^2$. -3 sayısı $p \equiv 2 \pmod{3}$ şeklindeki tek asal sayılar için kare kalan olmalıdır, çelişki.

Durum 2: $p^{3r} \mid t - 1$. $t - 1 = p^{3r}j$ olsun. O zaman $1 + kp^{3r} = (p^{3r}j + 1)^3$ ve buradan da $k = p^{6r}j^3 + 3p^{3r}j^2 + 3j$ elde ediliyor.

Son olarak (a) şıkkının çözümünde olduğu gibi $1 \leq l < p^r$ durumunda

$$(jp^{2r}l)^3 < 1 + kp^{3r} < (jp^{3r}l + 1)^3$$

eşitsizlikleri elde edilir. Sonuç olarak, koşulu sağlayan tüm k sayıları $k = p^{6r}j^3 + 3p^{3r}j^2 + 3j$ şeklinde oluyor.

3. n hava yolu şirketinin ve 100 kentin bulunduğu bir ülkedeki kentlerden bazıları arasında karşılıklı olarak toplam 2013 uçak seferi yapılıyor. Bu seferleri kullanarak bu kentlerden herhangi birinden bir diğerine gitmek olanaklı olup, birinden diğerine doğrudan veya tek aktarma ile gidilemeyen en az iki kent bulunmaktadır. Bu ülkedeki herhangi iki kent arasında tek bir şirketin uçuşlarını kullanarak gitmek mümkünse, n nin alabileceği en büyük değeri belirleyiniz.

Çözüm : Cevap $n = 1915$.

Soruyu çizge teorisi kavramlarını kullanarak yeniden formüle edelim: Köşe sayısı 100 ve kenar sayısı 2013 olan bağlantılı bir G çizgesinde birinden diğerine olan uzaklık en az üç olan en az iki köşe bulunuyor. Çizgenin kenarları n renge, herhangi bir köşeden herhangi başka bir köşeye aynı renge boyalı kenarlarla ulaşılabilecek şekilde boyanabiliyorsa, n en fazla kaç olabilir?

İlk önce $n = 1915$ için bir örnek verelim. Çizgenin tüm köşelerini birleştiren bir ağacın tüm kenarlarını aynı renge ve kalan kenarların hepsini birbirinden farklı renklere boyanırsa sorudaki koşullar sağlanır ve toplam renk sayısı $n = 2013 - 99 + 1 = 1915$ olur.

Şimdi renk sayısının daha fazla olamayacağını gösterelim. En çok renk bulunduran bir boyama alalım. Bu boyamada

1. *Aynı renkli kenarlar bağlantılı bir ağaç oluşturuyorlar:* Tek renkli bir döngü varsa, bu döngünün bir kenarı yeni bir renge boyanarak toplam renk sayısı artırılabilir. Birbiriyle bağlantılı olmayan aynı renkli iki ağaç varsa bu ağaçların biri yeni bir renge boyanarak toplam renk sayısı artırılabilir.

2. *İki ağacın ortak köşe sayısı en fazla iki olabilir:* Ortak köşe sayısı ikiden fazla ise, bu ağaçların birleşimi en az iki döngü içerecektir. Bu durumda önce bu iki ağacı ayna renge boyayıp, daha sonra her döngüde birbirinden farklı birer kenarı yeni bir renge boyayarak toplam renk sayısı artırılabilir.

3. *Genelliği bozmadan iki ortak köşe paylaşan iki ağacın kesişim noktalarının bu ağaçların uç noktaları olduklarını varsayabiliriz.* Aksi takdirde önce bu iki ağacı ayna renge boyayıp, daha sonra bu iki ağacın birleşimindeki döngüdeki bir kenarı yeni bir renge boyayarak toplam renk sayısını değiştirmemiş oluruz.

Şimdi aralarındaki uzaklık en az 3 olan herhangi u ve v köşelerini alalım. u ve v köşelerini birleştiren ve aynı renkli kenarlardan oluşan ağacın köşeler kümesi X , $X - \{u, v\} = Y$ olsun. u köşesinin komşu köşeleri A , G çizgesinin u, v ve A dışındaki köşeler kümesi B olsun. u köşesi, $B - Y$ deki her köşeye aynı renkli kenarlardan oluşan bir ağaçla birleşmek zorundadır. Bu ağaçlar T_1, \dots, T_p olsun. Bu ağaçlardan herhangi ikisi u noktasında kesişiyorlar. 3. özelliğe göre bu ağaçların herhangi ikisinin u dışında kesişme noktası bulunmuyor. Buna göre, $k = 1, \dots, p$ olmak üzere, her T_k ile A nın bir köşesi birebir eşleştirilebilir. Sonuç olarak T_1, \dots, T_p ağaçlarının birleşimi u dışında en az $|B| - |Y \cap B| + p$ tane köşe içeriyor. v köşesi, $A - Y$ deki her köşeye aynı renkli kenarlardan oluşan bir ağaçla birleşmek zorundadır. Bu ağaçlar S_1, \dots, S_q olsun. Benzer şekilde, bu ağaçların birleşimi v dışında en az $|A| - |Y \cap A| + q$ tane köşe içeriyor. Aynı renkli kenarlardan oluşan $1 + d$ köşeli bir ağaç $d - 1$ renk kaybına neden oluyor. Buna göre, toplam renk kaybı en az

$$|B| - |Y \cap B| + p - p + |A| - |Y \cap A| + q - q + |Y| - 2$$

olacaktır. $|Y \cap B| + |Y \cap A| = |Y| - 2$ olduğuna göre, toplam renk kaybı en az $|A| + |B| = 98$ oluyor. Sonuç olarak renk sayısı en fazla $2013 - 98 = 1915$ olabiliyor.

4. $2^n + n = m!$ eşitliğini sağlayan tüm (m, n) pozitif tam sayı ikililerini belirleyiniz.

Çözüm : Cevap: Sadece $(3, 2)$.

$m = 1$ durumunda çözüm olmadığına göre, $m!$ bir çift sayıdır. Buna göre, n de bir çift sayı olmak zorundadır. $t \geq 1$ bir tam sayı ve s bir pozitif tek tam sayı olmak üzere, $n = 2^t \cdot s$ olsun. $t = 1$ durumunda tek çözüm $n = 2$ ve $m = 3$ olur. $t \geq 2$ durumunda

$$m! = 2^n + n = 2^{2^t \cdot s} + 2^t \cdot s \geq 2^{2^t} + 2^t$$

elde edilir. t üzerinden tümevarımla

$$2^{2^t} + 2^t > (2t - 1)! \quad (1)$$

olduğunu gösterelim. $t = 2, 3$ ise eşitsizlik sağlanıyor. Eşitsizliğin $t = k$ için sağlandığını varsayalım. Eşitsizliğin $k + 1$ için de sağlandığını göstermek için

$$\frac{2^{2^{k+1}} + 2^{k+1}}{2^{2^k} + 2^k} \geq 2k(2k + 1) \quad (2)$$

eşitsizliğini kanıtlamamız yeterli olacaktır. Her n pozitif tam sayısı için $2^{2n-2} \geq n \cdot 2^{n-2}$ olduğuna göre, $2^{2n-2} \geq n(2^{n-2} - 1)$. Bu da

$$\frac{2^{2n} + 2n}{2^n + n} \geq 2^{n-1}$$

eşitsizliğine denktir. Son eşitsizlikte $n = 2^k$ alırsak

$$\frac{2^{2^{k+1}} + 2^{k+1}}{2^{2^k} + 2^k} \geq 2^{2^k-1}$$

elde ederiz. (2) eşitsizliğinin ispatını tamamlamak için her $k \geq 3$ için

$$2^{2^k-1} \geq 2k(2k + 1) \quad (3)$$

göstermemiz yeterli olacaktır. $2^7 > 42$ ve $2^{15} > 72$ olduğuna göre, (3) eşitsizliği $k = 3, 4$ için sağlanıyor. $k \geq 5$ durumunda $2^{2^k-1} \geq 2^{4k} = 2^{2k} \cdot 2^{2k} \geq 2k(2k + 1)$ olur. (1) eşitsizliğinin ispatı tamamlandı.

(1) eşitsizliğinden $m! > (2t - 1)!$ ve $m \geq 2t$ elde edilir. Şimdi

$$2^n + n = 2^{2^t \cdot s} + 2^t \cdot s = 2^t(2^{2^t \cdot s - t} + s)$$

ve $2^t \cdot s \geq 2^t > t$ olduğuna göre, $2^{2^t \cdot s - t} + s$ bir tek sayıdır ve 2^t sayısı $m!$ sayısını bölen en büyük 2'nin kuvvetidir:

$$t = \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{m}{4} \right\rfloor + \dots$$

Son olarak $m \geq 2t$ olduğundan

$$t = \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{m}{4} \right\rfloor + \dots \geq t + \left\lfloor \frac{t}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{t}{4} \right\rfloor + \dots$$

ve $t \geq 2$ olduğuna göre de $t \geq t + 1$ çelişkisi elde ediliyor. Tek çözüm $(m, n) = (3, 2)$ oluyor.

5. Tüm a, b, c pozitif gerçel sayıları için,

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc \geq M(ab^2 + bc^2 + ca^2 - 3abc)$$

olmasını sağlayan en büyük M gerçel sayısını belirleyiniz.

Çözüm: Cevap: $M = \frac{3}{\sqrt[3]{4}}$.

Eşitsizlikte genelliği bozmadan $\min\{a, b, c\} = c$ alabiliriz. Bu durumda negatif olmayan x ve y sayıları için $a = c + x$, $b = c + y$ olur. Yeni c, x ve y değişkenlerinde

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (c + x)^3 + (c + y)^3 + c^3 - 3(c + x)(c + y)c = (3c + x + y)(x^2 - xy + y^2)$$

$$ab^2 + bc^2 + ca^2 - 3abc = (c + x)(c + y)^2 + (c + y)c^2 + c(c + x)^2 - 3(c + x)(c + y)c = (x^2 - xy + y^2)c + xy^2$$

olur ve eşitsizlik tüm pozitif c, x, y için

$$(3 - M)(x^2 - xy + y^2)c + x^3 + y^3 - Mxy^2 \geq 0 \quad (1)$$

şekilini alır.

$x = 1$, $y = \sqrt[3]{2}$ ve $c > 0$ olursa (1) eşitsizliğinden

$$(3 - M)(1 - \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4})c + 3 - \sqrt[3]{4}M \geq 0 \quad (2)$$

İde edilir. (2) eşitsizliğini sağlayan her M için $M \leq \frac{3}{\sqrt[3]{4}}$ olduğunu gösterelim. Aksini varsayalım:

$M > \frac{3}{\sqrt[3]{4}}$ olsun. $M > 3$ ise (2) eşitsizliği hiçbir $c > 0$ için sağlanmıyor. $M < 3$ ise (2) eşitsizliği

$$c < \frac{\sqrt[3]{4}M - 3}{(3 - M)(1 - \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4})}$$

iken sağlanmıyor. Sonuç olarak $M \leq \frac{3}{\sqrt[3]{4}}$ olur.

Şimdi $M = \frac{3}{\sqrt[3]{4}}$ için (1) eşitsizliğinin sağlandığını gösterelim. $M < 3$ olduğuna göre, $(3 - M)(x^2 - xy + y^2)c \geq 0$ ve (1) eşitsizliğinin ispatı için $x^3 + y^3 \geq Mxy^2$ eşitliğinin gösterilmesi yeterli olur. Gereken eşitsizlik de aritmetik-geometrik ortalama eşitsizliğinden geliyor:

$$x^3 + y^3 = x^3 + \frac{y^3}{2} + \frac{y^3}{2} \geq \frac{3}{\sqrt[3]{4}}xy^2 = Mxy^2.$$

İspat tamamlanmıştır.

6. Düzlemde yer alan ve aralarındaki uzaklıklar pozitif tam sayılar olan P_1, P_2, \dots, P_n noktalarından her biri için, diğer noktaların bu noktaya olan uzaklıkları azalmayacak biçimde sıralandığında oluşan dizi hep aynı ise, n nin alabileceği tüm değerleri belirleyiniz.

Çözüm : Cevap: 1, 2, 3, 4, 6.

İlk olarak P_1, P_2, \dots, P_n noktalarının çemberde olduklarını göstereceğiz. Her $i = 1, 2, \dots, n$ için P_i noktasının koordinatları (x_i, y_i) olsun. $u = (x_1 + x_2 + \dots + x_n)/n$ ve $v = (y_1 + y_2 + \dots + y_n)/n$ olmak üzere, $O = (u, v)$ olsun. O zaman

$$\begin{aligned} OP_i^2 &= (u - x_i)^2 + (v - y_i)^2 = \left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} - x_i \right)^2 + \left(\frac{y_1 + y_2 + \dots + y_n}{n} - y_i \right)^2 \\ &= u^2 + v^2 + x_i^2 + y_i^2 - \frac{2}{n} (x_i(x_1 + x_2 + \dots + x_n) + y_i(y_1 + y_2 + \dots + y_n)) \end{aligned}$$

her i için sağlanır. $P_1P_i^2 + P_2P_i^2 + \dots + P_nP_i^2$ toplamı i 'den bağımsız olduğu için

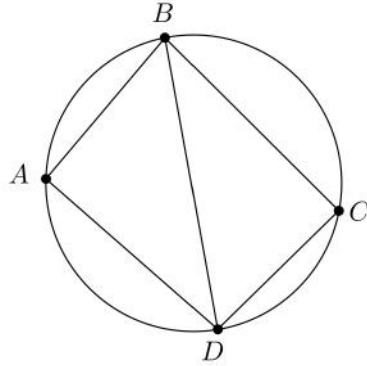
$$(x_i - x_1)^2 + (y_i - y_1)^2 + (x_i - x_2)^2 + (y_i - y_2)^2 + \dots + (x_i - x_n)^2 + (y_i - y_n)^2$$

toplamı da i 'den bağımsızdır. Dolayısıyla

$$n(x_i^2 + y_i^2) - 2x_i(x_1 + x_2 + \dots + x_n) - 2y_i(y_1 + y_2 + \dots + y_n) = n \cdot (OP_i^2 - u^2 - v^2)$$

ifadesi de i 'den bağımsızdır ve sonuç olarak OP_i^2 her i için aynı sayı gelir. $OP_1 = OP_2 = \dots = OP_n$ olduğundan P_1, P_2, \dots, P_n noktalarının O merkezli bir çember üzerinde yer aldıkları görülür.

Genelliği bozmadan P_1, P_2, \dots, P_n noktalarının bir çember etrafında saat yönünde sıralandıklarını varsayabiliriz. $P_1P_i, P_2P_i, \dots, P_nP_i$ dizisindeki en küçük sayı a , ikinci en küçük sayı ise b olsun.

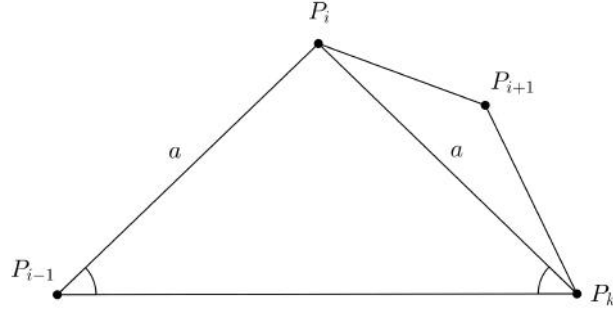


Lemma 1: Herhangi bir $ABCD$ kirişler dörtgeninde $\min\{AB, BC\} \leq BD$ sağlanır.

İspat: Aksini varsayalım, $BD < \min\{AB, BC\}$ olsun. O zaman $\angle BAD < \angle ADB$ ve $\angle BCD < \angle BDC$ olur. Dolayısıyla $\angle BAD < \angle ADB$ ve $\angle BCD < \angle BDC$ elde edilir. Sonuç olarak $180^\circ = \angle BAD + \angle BCD < \angle ADB + \angle BDC = \angle ADC$ çelişkisi gelir.

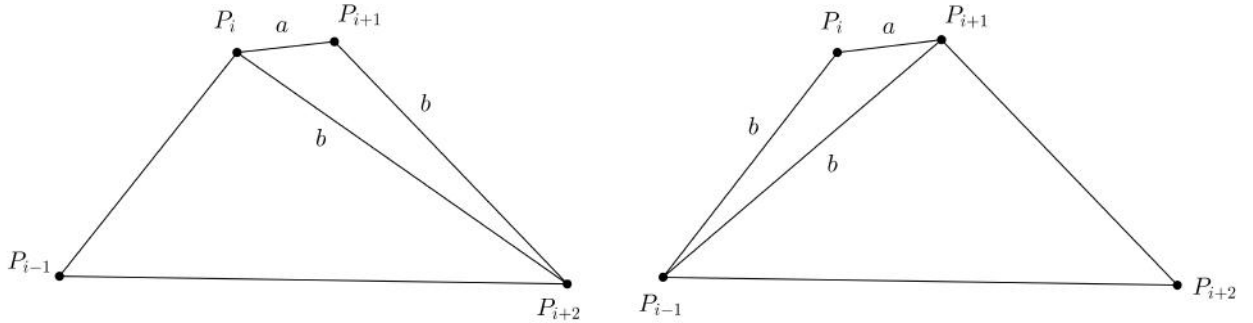
Çember üzerinde üç ardışık nokta olan P_{i-1}, P_i, P_{i+1} noktalarını ve bunlardan farklı bir P_k noktasını ele alalım. Lemma 1'den dolayı $\min\{P_{i-1}P_i, P_iP_{i+1}\} \leq P_iP_k$ olur ($P_{n+1} = P_1$). O halde her i için $\min\{P_{i-1}P_i, P_iP_{i+1}\} = a$ olur.

Durum 1: $a = b$. Bir P_i noktasını ele alalım. $P_{i-1}P_i = a$ veya $P_iP_{i+1} = a$ olduğunu biliyoruz. Genelliği bozmadan $P_{i-1}P_i = a$ kabul edelim. $b = a$ olduğu için $P_iP_k = b = a$ olacak şekilde $P_k \neq P_{i-1}$ noktası bulunur. $k = i + 1$ olduğunu göstereceğiz. Farzedelim ki $k \neq i + 1$. $P_{i-1}P_iP_{i+1}P_k$ kirişler dörtgenini ele alalım. $90^\circ > 90^\circ - \angle P_{i-1}P_iP_k/2 = \angle P_iP_{i-1}P_k = 180 - \angle P_iP_{i+1}P_k$ olduğu için $\angle P_iP_{i+1}P_k > 90^\circ$ elde



ederiz ve böylece $a = P_iP_k > P_iP_{i+1}$ bulunur. Ancak bu, a 'nın seçimiyle çelişir. O halde $k = i + 1$. O zaman her i için $P_iP_{i+1} = a$ olur ve bu da bu n noktanın bir düzgün n -gen oluşturduğunu gösterir.

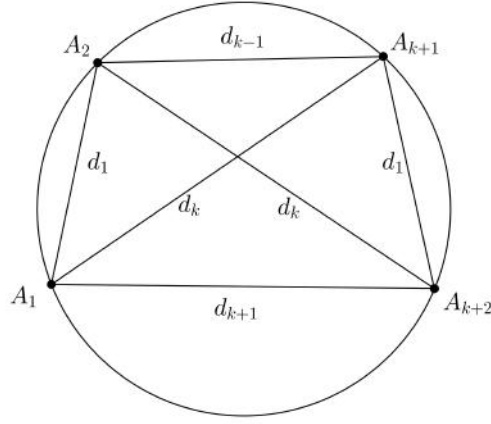
Durum 2: $a < b$. O zaman $P_{i-1}P_i$ ve P_iP_{i+1} 'den tam olarak biri a 'ya eşittir. Dolayısıyla n çifttir ve $P_1P_2 \dots P_n$ n -geninin tam olarak $n/2$ kenarı a uzunluğundadır. Ayrıca bu kenarlardan ortak köşeye sahip iki tanesi yoktur. n -genin diğer $n/2$ kenarının b uzunluğunda olduğunu göstereceğiz. $P_iP_{i+1} = a$ olmak üzere $P_{i-1}P_iP_{i+1}P_{i+2}$ dörtgenini ele alalım. Lemma 1'den dolayı $\min\{P_{i-1}P_{i+1}, P_{i+1}P_{i+2}\} = b$ ve $\min\{P_{i-1}P_i, P_iP_{i+2}\} = b$ elde ederiz. Eğer $P_iP_{i-1} = P_{i-1}P_{i+1} = b$ veya $P_iP_{i+2} = P_{i+2}P_{i+1} = b$ olsaydı $b < a$ çelişmesine varırdık. O halde $P_iP_{i-1} = P_{i+1}P_{i+2} = b$ veya $P_iP_{i+2} = P_{i-1}P_{i+1} = b$ olmalı. Her iki durumda da $P_{i-1}P_iP_{i+1}P_{i+2}$ dörtgeni ikizkenar yamuk olur. Böylece her i için $P_{i-1}P_i = P_{i+1}P_{i+2}$ bulunur ve sonuç olarak diğer $n/2$ kenarın her biri b uzunluğundadır.



Lemma 2. $n \geq 4$ ise, $A_1A_2 \dots A_n$ düzgün n -geninde aralarındaki mesafenin tam sayı olmadığı A_i ve A_j köşeleri vardır.

İspat: Farzedelim ki bir $n \geq 4$ için herhangi iki köşesi arasındaki mesafenin tam sayı olduğu bir $A_1A_2 \dots A_n$ düzgün n -geni bulunsun. Genelliği bozmadan tüm mesafelerin ortak bölenini 1 kabul edebiliriz. Her $i = 1, \dots, n$ için $d_i = A_1A_{i+1}$ olsun. $A_1A_2A_{k+1}A_{k+2}$ kirişler dörtgeninde Batlamyus teoreminden $d_k^2 = d_1^2 + d_{k-1}d_{k+1}$ elde edilir. $d_1 > 1$ ise, d_1 'in bir asal böleni p olsun. $d_2^2 = d_1^2 + d_1d_3$ olduğu için p asalı d_2 'yi de böler. $d_k^2 = d_1^2 + d_{k-1}d_{k+1}$ eşitliklerini kullanarak tümevarımla p 'nin her d_i 'yi böldüğü kolayca görülür. Fakat bu d_i 'lerin ortak bir asal böleni olmamasıyla çelişir. O halde $d_1 = 1$ olmalı. Ancak bu durumda $A_1A_2 = A_2A_3 = 1$ olur ve üçgen eşitsizliğinden $d_2 = A_1A_3 < 1 + 1 = 2$ elde edilir. d_2 pozitif tam sayı olduğu için $d_2 = 1$ olmalı. Öte yandan, $d_2^2 = d_1^2 + d_1d_3$ olduğu için $d_3 = 0$ bulunur, çelişki.

Şimdi, $a = b$ ise, düzgün bir n -genimiz var ve Lemma 2'den dolayı $n = 1, 2, 3$ olabilir. $a < b$ ise, n çift ve kenarlar sırasıyla a, b, a, b, \dots, a, b uzunluklarında. Bu sebepten ötürü çift indisli noktalar bir



düzgün $n/2$ -gen oluşturur ve dolayısıyla Lemma 2'den dolayı $n = 2, 4, 6$ olabilir.

$n = 1, 2$ durumu açık. $n = 3$ için bir kenarı 1 olan bir eşkenar üçgen şartı sağlar. $n = 4$ için kenar uzunlukları 3 ve 4 olan bir dikdörtgen koşulu sağlar. $n = 6$ için kenar uzunlukları sırasıyla 3, 5, 3, 5, 3, 5 ve köşeleri bir çember üzerinde olan bir altıgeni ele alalım. Bu durumda $P_1P_i, P_2P_i, \dots, P_6P_i$ mesafeleri her i için 0, 3, 5, 7, 7, 8 dizisini oluşturur ve şart sağlanır.

