

18. Ulusal Matematik Olimpiyatı

İkinci Aşama Sınavı

27-28 Kasım 2010

Çözümler

1. Bir ülkede başkente doğrudan karayolu ile bağlı kentlerin sayısı 2010 dur. Başkent dışındaki her kent 2010 dan az sayıda kente doğrudan karayolu ile bağlı olup, aynı sayıda kente doğrudan bağlı olan herhangi iki kent için bu sayı çifttir. Başkenti doğrudan çeşitli kentlere bağlayan yollardan k tanesi kapatılarak bakıma alınacaktır. Bu ülkedeki karayolu ağı nasıl oluşturulmuş olursa olsun, bunun aralarında karayolu ulaşımı mümkün olan herhangi iki kent arasındaki ulaşımın hâlâ mümkün olacağı biçimde yapılmasını olanaklı kılan en büyük k sayısını belirleyiniz.

Çözüm: Cevap: 503.

Soruyu çizge kavramı kullanarak yeniden formüle edelim: 2010 dan fazla köşeli bir G çizgesinde bir v_0 köşesinin derecesi 2010 olup, diğer köşelerin dereceleri 2010 dan küçüktür. Dereceleri eşit olan herhangi iki köşenin dereceleri çift sayıdır. Bu koşulları sağlayan her çizgede v_0 köşesinin k kenarı, bağlantılı olan herhangi iki köşe bağlantılı kalacak şekilde silinebiliyorsa, k nın alabileceği en büyük değeri belirleyiniz.

Genelliği bozmadan G çizgesini bağlantılı olduğunu varsayabiliriz. v köşesinin G çizgesindeki derecesi $\deg_G v$ olarak ifade ediliyor. G çizgesinden v_0 köşesinin silinmesi ile elde edilen çizge G' olsun. C çizgesi G' nin bir bağlantılı bileşeni olmak üzere, C nin G çizgesinde v_0 ile ortak kenar paylaşan bir v' köşesini alalım. $\deg_G v'$ bir çift sayı ise C çizgesindeki dereceler toplamı çift olduğundan bir $v'' \neq v'$, $v'' \in C$ köşesi için de $\deg_G v''$ bir çift sayı olmak zorundadır. Dolayısıyla v_0 köşesinin herhangi bir C bileşeninde bağlı olduğu çift dereceli köşe sayısı tek sayı olamaz. v_0 bir C bileşenindeki çift dereceli köşelere birkaç kenar ile bağlhyrsa bu kenarların biri dışındakiler bağlantı niteliği bozulmadan silinabilir. Diğer taraftan G çizgesinde tek derecelerin alabileceği değer sayısı 1005 tir. Dereceleri tek olan köşe sayısı çift olduğundan en fazla 1004 köşenin derecesi tek olabilir. Buna göre, v_0 dan çıkan en az $(2010 - 1004)/2 = 503$ kenar bağlantı niteliği bozulmadan silinabilir.

Şimdi $k \leq 503$ olduğunu gösteren bir örnek verelim. G çizgesinin köşeleri v_i , $(0 \leq i \leq 2010)$, ve w_{ij} , $(1 < i \leq 1004, 1 \leq j \leq 2i - 2)$, kenarları $\{v_0, v_i\}$, $(1 \leq i \leq 2010)$, $\{v_i, w_{ij}\}$, $(1 < i \leq 1004, 1 \leq j \leq 2i - 2)$, $\{v_{2m-1}, v_{2m}\}$, $(503 \leq m \leq 1005)$ ve $\{w_{i,2m-1}, w_{i,2m}\}$, $(1 < i \leq 1004, 1 \leq m \leq i - 1)$ olursa koşullar sağlanır ve $k = 503$ olur.

2. P , ABC üçgeninin iç bölgesinde yer alan, A köşesine ait kenarortay üstünde olmayan ve $m(\widehat{CAP}) = m(\widehat{BCP})$ koşulunu sağlayan bir nokta olsun. $BP \cap CA = \{B'\}$ ve $CP \cap AB = \{C'\}$ olmak üzere; AP doğrusu ile ABC üçgeninin çevrel çemberi ikinci kez Q noktasında, $B'Q$ ve CC' doğruları R noktasında ve $B'Q$ doğrusu ile P den AC doğrusuna paralel çizilen doğru da S noktasında kesişiyor. $B'C'$ ve QB doğruları AB doğrusunun C den farklı yanında yer alan bir T noktasında kesişsin. $m(\widehat{BAT}) = m(\widehat{BB'Q})$ olması için, $|SQ| = |RB'|$ olmasının gerek ve yeter koşul olduğunu kanıtlayınız.

olduğunu kanıtlayınız.

Çözüm: $x^4 + 3 - (x + 1)^2 = (x - 1)^2(x^2 + 2x + 2) \geq 0$ olduğuna göre, $x^4 + 3 \geq (x + 1)^2$. Buna göre, her n pozitif tam sayısı ve $a_1 a_2 \cdots a_n = 1$ koşulunu sağlayan tüm a_1, a_2, \dots, a_n pozitif gerçel sayıları için,

$$\sum_{i=1}^n \frac{a_i}{a_i + 1} \leq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i}$$

eşitsizliğini kanıtlamak yeterli olacaktır.

$f(a_1, a_2, \dots, a_k) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k \frac{1}{a_i} - \sum_{i=1}^k \frac{a_i}{1 + a_i}$ olsun. $a_1 a_2 \cdots a_k = 1$ koşulunu sağlayan tüm a_1, a_2, \dots, a_k pozitif gerçel sayıları için k üzerinden tümevarımla $f_k(a_1, a_2, \dots, a_k) \geq 0$ eşitsizliğini kanıtlayacağız.

$k = 1$ ise $a_1 = 1$ ve $f_1(a_1) = 0$.

$k > 1$ ve $a_1 a_2 \cdots a_k = 1$ olsun. Genelliği bozmadan $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_k$ kabul edelim.

$$f_k(a_1, a_2, \dots, a_k) - f_{k-1}(a_1 a_k, a_2, \dots, a_{k-1}) = \frac{1}{2a_1} - \frac{a_1}{1 + a_1} + \frac{1}{2a_k} - \frac{a_k}{1 + a_k} - \left(\frac{1}{2a_1 a_k} - \frac{a_1 a_k}{1 + a_1 a_k} \right) \geq 0 \quad (1)$$

olduğunu gösterelim. Ortak payda kullanırsak (1)

$$(1 - a_1)(a_k - 1)(2a_1^2 a_k^2 + a_1^2 a_k + a_1 a_k^2 + a_1 a_k + a_1 + a_k + 1) \geq 0$$

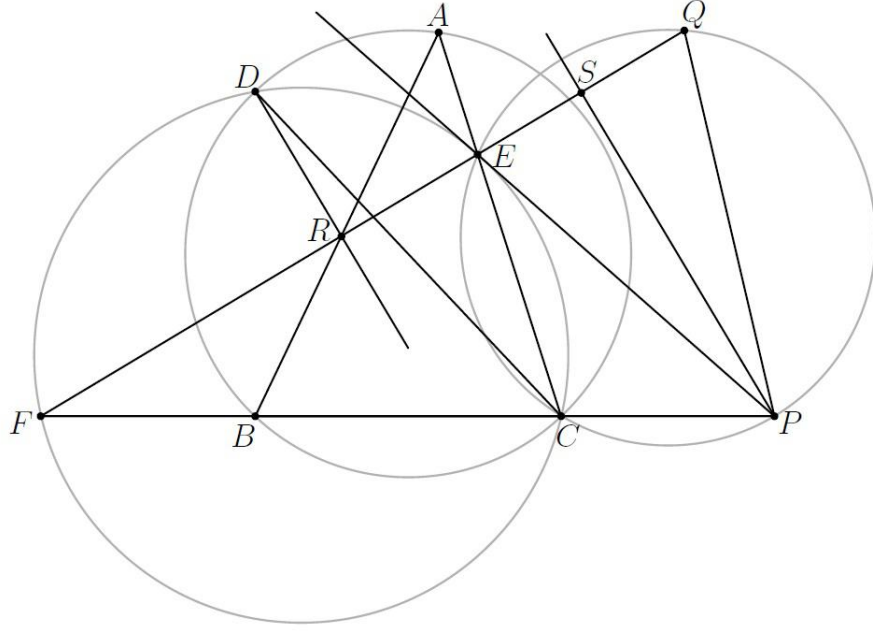
şeklinde yazılabilir. Son eşitsizlik de $0 < a_1 \leq 1 \leq a_k$ olduğundan doğrudur. Son olarak (1) ve tümevarım varsayımından

$$f_k(a_1, a_2, \dots, a_k) \geq f_{k-1}(a_1 a_k, a_2, \dots, a_{k-1}) \geq 0$$

olur. Çözüm tamamlanmıştır.

4. A ve B noktaları $[CD]$ çaplı çemberin üstünde ve CD doğrusunun farklı yanlarında bulunuyor. C ve D noktalarından geçen bir Γ çemberi $[AC]$ yi uçlarından farklı bir E noktasında, BC yi de F noktasında kesiyor. E noktasında Γ çemberine teğet olan doğru ile BC doğrusunun kesiştiği nokta P olmak üzere; Q noktası, $|QP| = |EP|$ koşulunu sağlayan ve CEP üçgeninin çevrel çemberi üstünde yer alan E den farklı bir nokta olsun. $AB \cap EF = \{R\}$ ve $[EQ]$ nun orta noktası S ise, DR ve PS doğrularının paralel olduğunu gösteriniz.

Çözüm: D noktası ve FCE üçgeninin Simson doğrusu AB olduğu için DR doğrusu EF doğrusuna diktir. X , PE ışını üzerinde E nin ötesinde bir nokta olmak üzere $\angle QEP = \angle EQP = \angle ECF = \angle XEF$ dir. O halde Q , E , F noktaları doğrusaldır. PS ve EQ doğruları birbirine dik olduğu için DR ve PS doğrularının paralel olduğunu görürüz.



5. $0 \leq a, b < 2010^{18}$ tam sayılar olmak üzere, $P(x) = ax^2 + bx$ biçimindeki polinomların kümesini \mathcal{S} ile gösterelim. \mathcal{S} ye ait kaç P polinomunun, tüm $0 \leq n < 2010^{18}$ tam sayıları için $Q(P(n)) \equiv n \pmod{2010^{18}}$ bağıntısını sağlayan ve \mathcal{S} ye ait olan bir Q polinomunun bulunmasını olanaklı kıldığını belirleyiniz.

Çözüm: $P(x) = ax^2 + bx$ için $Q(x) = cx^2 + dx$ polinomu bulunur ancak ve ancak $2^8 1005^9 \mid a$ ve $(2010, b) = 1$ olduğunu göstereceğiz. Böylece cevap

$$2 \cdot 2010^9 \cdot 2010^{18} \left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{3}\right) \left(1 - \frac{1}{5}\right) \left(1 - \frac{1}{67}\right) = 2^5 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 2010^{26}$$

olur.

Her n için $Q(P(n)) \equiv n \pmod{2010^{18}}$ olduğunu varsayalım. O zaman $n \mapsto P(n) \pmod{2010^{18}}$ de birebirdir ve Çinli kalan teoremini kullanarak her $p \in \{2, 3, 5, 67\}$ için $n \mapsto P(n) \pmod{p^{18}}$ de birebir olduğu sonucuna varırız.

$p \in \{2, 3, 5, 67\}$ olsun. $p \mid b$ ise, $P(p^{17}) \equiv P(0) \pmod{p^{18}}$ olur ve çelişki elde ederiz. Demek ki $p \nmid b$. $p \nmid a$ olursa $P(-a^{-1}b) \equiv P(0) \pmod{p^{18}}$ çelişkisi gelir. O halde $p \mid a$. Sonuç olarak $2010 \mid a$ ve $(2010, b) = 1$ gelir. Ayrıca, $(b(a^2 - b^2))^{-1} \pmod{2010^{18}}$ vardır.

$$\begin{aligned} \begin{cases} Q(P(1)) \equiv 1 & \implies c(a+b)^2 + d(a+b) \equiv 1 \\ Q(P(-1)) \equiv -1 & \implies c(a-b)^2 + d(a-b) \equiv -1 \end{cases} \\ \implies \begin{cases} 2b(a^2 - b^2)c \equiv 2a & \pmod{2010^{18}} \\ 2b(a^2 - b^2)d \equiv -2(a^2 + b^2) & \pmod{2010^{18}} \end{cases} \end{aligned}$$

olduğundan, ε 0 veya 1 olmak üzere

$$\begin{aligned} c &\equiv (b(a^2 - b^2))^{-1}a + \varepsilon \frac{2010^{18}}{2} \pmod{2010^{18}} \\ d &\equiv -(b(a^2 - b^2))^{-1}(a^2 + b^2) + \varepsilon \frac{2010^{18}}{2} \pmod{2010^{18}} \end{aligned}$$

elde ederiz. Böylelikle

$$Q(P(x)) - x \equiv -(b(a^2 - b^2))^{-1}a^2x(x-1)(x+1)(ax+2b) + \underbrace{\varepsilon \frac{2010^{18}}{2}x(x-1)}_{\equiv 0} \pmod{2010^{18}}$$

elde edilir. Burada $x = 2$ alırsak $2010^{18} \mid 2^2 \cdot 3 \cdot a^2$ buluruz ve böylece $2^8 1005^9 \mid a$ gelir.

Diğer yönde, $2^8 1005^9 \mid a$ ve $(2010, b) = 1$ ise, c ve d yi yukarıdaki gibi tanımlayabiliriz. Her n için $2 \mid n(n-1)$ ve $2 \mid an + 2b$ olduğundan $Q(P(n)) \equiv n \pmod{2010^{18}}$ sonucu çıkar ve ispat tamamlanır.

6. K , düzlemdeki dışbükey bir 2010-genin kenar ve köşegenlerinin kümesi olsun. A , K nin bir altkümesi olmak üzere; A ya ait her doğru parçası çifti kesişiyorsa, A ya *kesişimli küme* diyelim. İki kesişimli kümenin birleşiminin en çok kaç elemana sahip olabileceğini belirleyiniz.

Çözüm: Cevap: 4019.

$n \geq 5$ olmak üzere n -gen için cevabın $2n - 1$ olduğunu göstereceğiz.

A , eleman sayısı en az n olan bir kesişimli küme olsun. A nın köşe sayısı doğru parçası sayısından fazla olmadığı için A da bir döngü vardır. PQ ve QR bu döngüdeki iki doğru parçası olsun. Bu döngüdeki XP ve RY hariç her doğru parçası PQ ve QR doğru parçalarını iç kısımlarında keser. O zaman bu döngüde tek sayıda doğru parçası bulunur ve döngüdeki hiçbir köşe $\angle PQR$ açısının iç bölgesinde yer almaz. O halde öyle k pozitif tam sayısı ve çokgen üzerinde sırasıyla $P_1, P_2, \dots, P_{2k+1}$ olarak yer alan köşeler vardır ki bu döngü $P_i P_{i+k}, P_i P_{i+k+1}$ doğru parçalarından oluşur ($1 \leq i \leq 2k+1$ ve indisler mod n de alınıyor) Bu kümeyi A^\star ile gösterelim. A kesişimli bir küme olduğu için A nın diğer doğru parçaları sadece, X çokgenin $\angle P_{i+k+1} P_i P_{i+k}$ açısının iç bölgesinde kalan bir köşesi olmak üzere, XP_i formunda olabilir. $|A| \geq n$ olduğundan bu tarz tüm doğru parçaları A ya ait olmalı. Bu doğru parçalarının kümesini $A^\mathbb{C}$ ile gösterelim. O zaman A eleman sayısı en az n olan bir kesişimli küme ise, $|A| = n$ ve $A = A_{(P_1, P_2, \dots, P_{2k+1})} = A^\star \sqcup A^\mathbb{C}$ olmak zorundadır.

A ve B $|A| = n = |B|$ olan kesişimli kümeler ise, A ve B nin ayrık olamayacağını göstereceğiz. Ayrık olduklarını varsayalım. $Q_1 Q_2, Q_2 Q_3, \dots, Q_{m-1} Q_m, Q_m Q_1$ bir döngü olsun öyle ki $Q_i Q_{i+1}$ doğru parçası i tekken A ya i çiftken B ye aittir ($Q_{m+1} = Q_1$). Çokgenin her bir köşesi A daki ve B deki doğru parçalarından en az birer tanesinin uç noktası olduğu için böyle bir döngü vardır. A ve B kesişimli kümeler olduklarından her $Q_i Q_{i+1}$ doğru parçası i tekse $Q_1 Q_2$ ile, i çiftse $Q_2 Q_3$ ile kesişir. O zaman her çift i için Q_i , $Q_1 Q_2$ üzerinde veya onun Q_3 e göre diğer tarafında yer alır. Benzer biçimde her tek i için Q_i , $Q_2 Q_3$ üzerinde veya onun Q_1 e göre diğer tarafında yer alır. Özel olarak, m tektir ve Q_1 A^\star ya ait bir köşedir. O halde Q_3 köşesi $Q_m Q_1$ üzerinde veya onun Q_2 ye göre diğer tarafında yer alır; Q_{m-1} köşesi ise $Q_1 Q_2$ üzerinde veya onun Q_m ye göre diğer tarafında yer alır. XQ_1 , B ye ait bir doğru parçası olsun. XQ_1 B ye ait hem $Q_2 Q_3$ ile hem de $Q_{m-1} Q_m$ ile kesiştiğinden X köşesi çokgen üzerinde Q_2 ve Q_m arasında yer almalı. Fakat XQ_1 aynı zamanda $A^\mathbb{C}$ a da aittir ve böylece A ya aittir. Buradan da çelişki elde ederiz.

Son olarak, eğer P, Q, R, S, T çokgen üzerinde ard arda yer alan köşeler ise, $A_{(P, Q, R)} \cup A_{(R, S, T)}$ kümesi $2n - 1$ doğru parçasından oluşur.