

19. Ulusal Matematik Olimpiyatı

İkinci Aşama Sınavı

3-4 Aralık 2011

Çözümler

---

---

1.  $n \geq 2$  ve  $E = \{1, 2, \dots, n\}$  olsun.  $A_1, A_2, \dots, A_k$ ;  $E$  nin altkümeleri olmak üzere, her  $1 \leq i < j \leq k$  için,  $A_i \cap A_j, A'_i \cap A_j, A_i \cap A'_j$  ve  $A'_i \cap A'_j$  kümelerinden tam olarak bir tanesi boş ise,  $k$  nin alabileceği en büyük değeri belirleyiniz.

[  $A, E$  nin bir altkümesi ise,  $E$  nin  $A$  ya ait olmayan elemanlarının kümesini  $A'$  ile gösteriyoruz. ]

**Çözüm:** Cevap:  $2n - 3$ .

İlk önce  $k = 2n - 3$  için bir örnek verelim:  $\{1\}, \{2\}, \dots, \{n\}, \{1, 2\}, \{1, 2, 3\}, \dots, \{1, 2, 3, \dots, n - 2\}$ . alt kümelerinin koşulları sağladığı açıktır.

Şimdi  $n$  üzerinden tümevarımla  $E = \{1, 2, \dots, n\}$  için  $k \leq 2n - 3$  olduğunu gösterelim.

$n = 2$  ve  $n = 3$  için  $k \leq 2n - 3$  olduğu açıktır.

$n \geq 4$  olsun ve  $n - 1$  için  $k \leq 2n - 5$  olduğunu varsayalım.  $n$  için koşulları sağlayan en büyük küme koleksiyonlarından biri  $M$  olsun. Yukarıdaki örnek nedeniyle  $|M| \geq 2n - 3$ . Açıkça  $\emptyset$  ve  $E$  kümeleri  $M$  nin elemanı olamazlar. Bir  $1 \leq i \leq n$  için  $\{i\}$  ve  $\{i\}'$  kümeleri  $M$  nin elemanı değilse bunların birini  $M$  ye ekleyip  $M$  nin eleman sayısını artırarak çelişkiye varırız. Diğer taraftan  $\{i\}$  ve  $\{i\}'$  aynı anda  $M$  nin elemanı olamazlar. Sonuç olarak her  $1 \leq i \leq n$  için  $\{i\}$  ve  $\{i\}'$  kümelerinin tam olarak biri  $M$  nin elemanıdır. Herhangi bir  $X \in M$  elemanını  $X'$  ile değiştirebiliriz. Dolayısıyla her  $1 \leq i \leq n$  için  $|A_i| \leq \frac{n}{2}$  olduğunu varsayabiliriz.

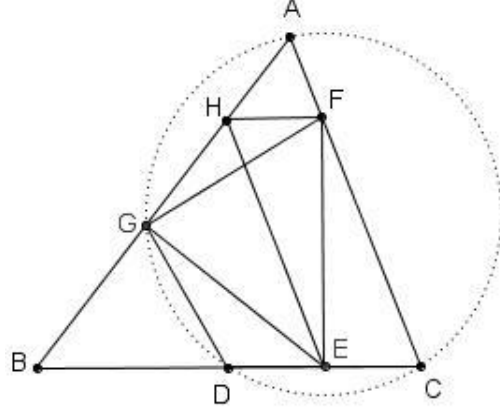
$|M| \geq 2n - 3 > n$  olduğundan  $|A| \geq 2$  ve  $|B| \geq 2$  olmak üzere her  $B \in M$  için  $|A| \leq |B|$  koşullarını sağlayan bir  $A \in M$  kümesi bulunuyor. Genelliği bozmadan  $1, 2 \in A$  olsun.  $\{1\}, \{2\}$  ve  $A$  dışında bir  $B \in M$  kümesi alalım.  $A \cap B = \emptyset$  ise,  $1, 2 \notin B$ .  $A \cap B' = \emptyset$  ise,  $A \subset B$  ve  $1, 2 \in B$ .  $A' \cap B = \emptyset$  ise,  $B \subset A$  ve  $A$  nın tanımına göre  $|B| = 1$ . O zaman,  $1, 2 \notin B$ .  $A' \cap B' = \emptyset$  ise,  $A \cup B = E$ . O zaman  $n$  tek ise,  $|A|, |B| \leq \frac{n-1}{2}$  ve dolayısıyla  $|A \cup B| \leq n - 1$ .  $n$  çift ise,  $|A| = |B| = \frac{n}{2}$  ve dolayısıyla  $B = A'$  ve  $A \cap B = \emptyset$ .

Sonuç olarak  $\{1\}$  ve  $\{2\}$  dışındaki tüm  $B \in M$  kümeleri için  $\{1, 2\} \subset B$  veya  $\{1, 2\} \cap B = \emptyset$ . O zaman  $\{1\}$  ve  $\{2\}$  kümelerini  $M$  den çıkarıp  $M$  deki her kümede 1 leri atarsak  $n - 1$  elemanlı  $S = \{2, 3, \dots, n\}$  için koşulları sağlayan ve  $|M| - 2$  kümeden oluşan bir koleksiyon elde ederiz.. Tümevarım varsayımına göre  $|M| - 2 \leq 2n - 5$  ve böylece  $|M| \leq 2n - 3$  bulunur. Aynı zamanda  $|M| \geq 2n - 3$  olduğundan  $|M| = 2n - 3$  olur ve ispat tamamlanır.

2.  $D$ ,  $ABC$  üçgeninin  $[BC]$  kenarı üstünde köşelerden farklı bir nokta ve  $E$ ,  $[CD]$  nin orta noktası olsun.  $E$  den  $BC$  doğrusuna çizilen dikme  $[AC]$  kenarını  $|AF| \cdot |BC| = |AC| \cdot |EC|$  koşulunu sağlayan

bir  $F$  noktasında kesiyor.  $ADC$  üçgeninin çevrel çemberi de,  $[AB]$  kenarını  $A$  dan farklı bir  $G$  noktasında kesiyor.  $AGF$  üçgeninin çevrel çemberine  $F$  noktasından çizilen teğetin  $BGE$  üçgeninin çevrel çemberine de teğet olduğunu kanıtlayınız.

**Çözüm:**



$EF$  doğrusunun  $AGF$  ve  $BGE$  üçgenlerinin çevrel çemberlerinin her ikisine teğet olduğunu gösterelim. Bunun için  $\angle GBE = \angle GEF$  ve  $\angle GAF = \angle GFE$  olduğunu göstermemiz yeterli olacaktır.

$F$  noktasından geçen ve  $BC$  ye paralel olan doğru ile  $AB$  doğrusunun kesişim noktası  $H$  olsun. O zaman  $AHF \sim ABC$  ve  $\frac{AF}{AC} = \frac{HF}{BC}$  olur. Diğer taraftan  $\frac{|AF|}{|AC|} = \frac{|EC|}{|BC|}$  olduğu için  $|HF| = |EC| = |ED|$  bulunur ve sonuç olarak  $HFCE$  nin bir paralelkenar ve  $HFDE$  nin bir dikdörtgen olduğu görülüyor.

$ACDG$  bir kirişler dörtgenidir.  $FC \parallel HE$  olduğu için  $\angle BGD = \angle ACB = \angle HED$ . Sonuç olarak  $H, E, D, G$  noktaları çemberdedir ve  $H, G, D, E, F$  noktaları  $[HE]$  çaplı bir çember üzerindedir. O zaman  $\angle BGE = 90^\circ$  ve  $\angle GBE = 90^\circ - \angle GED = \angle GEF$ . Son olarak  $AGDC$  ve  $GFED$  kirişler dörtgeni oldukları için  $\angle BAC = 180^\circ - \angle GDE = \angle GFE$  olur. İspat tamamlanmıştır.

**3.**  $xyz = 1$  koşulunu sağlayan tüm  $x, y, z$  pozitif gerçel sayıları için,

$$\frac{1}{x + y^{20} + z^{11}} + \frac{1}{y + z^{20} + x^{11}} + \frac{1}{z + x^{20} + y^{11}} \leq 1$$

olduğunu gösteriniz.

**Çözüm:** Tüm  $a, b, c$  pozitif gerçel sayıları için Cauchy-Schwarz eşitsizliğinden

$$\frac{1}{a + b^{20} + c^{11}} \leq \frac{a^{13} + b^{-6} + c^3}{(a^7 + b^7 + c^7)^2}$$

elde edilir. Bu eşitsizliği  $(a, b, c) = (x, y, z), (y, z, x)$  ve  $(z, x, y)$  için yazıp taraf tarafa toplarsak, ispatı tamamlamamız için

$$x^{13} + y^{13} + z^{13} + x^{-6} + y^{-6} + z^{-6} + x^3 + y^3 + z^3 \leq x^{14} + y^{14} + z^{14} + 2(x^7 y^7 + y^7 z^7 + z^7 x^7) \quad (1)$$

olduğunu göstermenin yeterli olduğunu görürüz.

$xyz = 1$  olduğundan

$$x^{13} + y^{13} + z^{13} = \sum_{cyc} x^{13\frac{1}{3}} y^{\frac{1}{3}} z^{\frac{1}{3}}, \quad x^{-6} + y^{-6} + z^{-6} = \sum_{cyc} x^{6\frac{2}{3}} y^{6\frac{2}{3}} z^{\frac{2}{3}} \quad \text{ve} \quad x^3 + y^3 + z^3 = \sum_{cyc} x^{6\frac{2}{3}} y^{3\frac{2}{3}} z^{3\frac{2}{3}}$$

olur.  $(13\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}) \prec (14, 0, 0)$ ,  $(6\frac{2}{3}, 6\frac{2}{3}, \frac{2}{3}) \prec (7, 7, 0)$  ve  $(6\frac{2}{3}, 3\frac{2}{3}, 3\frac{2}{3}) \prec (7, 7, 0)$  olduğu için Muirhead eşitsizliğinden

$$\sum_{cyc} x^{13\frac{1}{3}} y^{\frac{1}{3}} z^{\frac{1}{3}} \leq \sum_{cyc} x^{14} y^0 z^0, \quad \sum_{cyc} x^{6\frac{2}{3}} y^{6\frac{2}{3}} z^{\frac{2}{3}} \leq \sum_{cyc} x^7 y^7 z^0 \quad \text{ve} \quad \sum_{cyc} x^{6\frac{2}{3}} y^{3\frac{2}{3}} z^{3\frac{2}{3}} \leq \sum_{cyc} x^7 y^7 z^0$$

elde edilir. Bu üç eşitsizlik taraf tarafa toplanırsa (1)'deki eşitsizlik bulunur ve ispat tamamlanır.

**4.**  $a_1 = 5$  ve  $n \geq 1$  için,  $a_{n+1} = a_n^3 - 2a_n^2 + 2$  olsun.  $p \equiv 3 \pmod{4}$  koşulunu sağlayan bir  $p$  asal sayısı  $a_{2011} + 1$  sayısını bölüyorsa,  $p = 3$  olduğunu kanıtlayınız.

**Çözüm:** Her  $n \geq 1$  sayısı için  $a_{n+1} - 2 = a_n^2(a_n - 2)$ . Bunu kullanarak  $n$  üzerinden tümevarımla tüm  $n \geq 1$  değerleri için  $a_{n+1} - 2 = 3a_n^2 a_{n-1}^2 \cdots a_1^2$  olduğu kolayca elde edilir. Sonuç olarak

$$a_{2011} + 1 = 3(a_{2010}^2 a_{2009}^2 \cdots a_1^2 + 1) = 3([a_{2010} a_{2009} \cdots a_1]^2 + 1)$$

olur.  $p \equiv 3 \pmod{4}$  asal sayısı  $a_{2011} + 1$  sayısının bir asal böleni olsun.  $(a_{2010} a_{2009} \cdots a_1)^2 + 1$  sayısının her  $q$  asal böleni için  $q \equiv 1 \pmod{4}$  ya da  $q = 2$  olduğu biliniyor. Sonuç olarak  $p|3$  ve dolayısıyla  $p = 3$ .

**5.**  $M$  ve  $N$  düzlemde yer alan düzgün dışbükey çokgensel bölgeler olmak üzere, uç noktalarından biri  $M$  ye, diğeri de  $N$  ye ait olan doğru parçalarının orta noktalarından oluşan kümeyi  $K(M, N)$  ile gösterelim.  $K(M, N)$  nin de düzgün dışbükey çokgensel bir bölge olmasını sağlayan tüm  $(M, N)$  ikililerini belirleyiniz.

**Çözüm:** Cevap:  $K = K(M, N)$  bir düzgün çokgendir ancak ve ancak

- $N$  çokgeni  $M$  çekgenine homotetiktir veya
- $M$  nin kenar sayısı  $m$  olmak üzere  $N$  çokgeni,  $M$  çokgeninin merkezi etrafında  $180/m$  döndürülüp ötelenmesiyle elde edilmiştir.

Çözüm boyunca bir dışbükey çokgenin  $XY$  kenarı dediğimizde  $Y$  noktası, çokgenin çevresi üzerinde saat yönünün tersinde  $X$ 'ten sonragelen ilk köşe olacaktır.

$AB$ ,  $M$  çokgeninin bir kenarı olsun. O zaman şu koşulları sağlayan tam olarak bir tane  $\ell$  doğrusu vardır:

- $\ell \cap N$ ,  $N$  nin ya bir  $A'B'$  kenarıdır (durum 1) ya da bir  $C$  köşesidir (durum 2).
- $AB$  doğrusunun oluşturduğu ve  $M$  yi içeren kapalı yarı-düzlem ile  $\ell$  nin oluşturduğu ve  $N$  yi içeren kapalı yarı-düzlemin kesişimleri boş değildir.

$e(AB)$  ile, durum 1 halinde  $ABB'A'$  yamuğunun orta tabanını, durum 2 halinde  $ABC$  üçgeninin  $AB$  ye paralel olan orta kenarını gösterelim.  $h(AB)$  ile,  $e(AB)$ 'yi içeren doğrunun oluşturduğu ve yukarıdaki yarı-düzlemler ile kesişimi boş olmayan kapalı yarı-düzlemi gösterelim.  $M$  ve  $N$  çokgenlerinin rolleri değiştiğinde de aynı notasyonlar kullanılacaktır.

$M$  ve  $N$  çokgenlerinin tüm  $AB$  kenarları için tanımlanan bütün  $h(AB)$  yarı-düzlemlerinin kesişimi  $K_1$  olsun.  $K_1$  bir dışbükey çokgendir ve bu çokgenin çevresi  $M$  ve  $N$  çokgenlerinin tüm  $AB$  kenarları için tanımlanan  $e(AB)$  doğru parçalarının bileşimidir.  $M$  veya  $N$ 'nin herhangi bir  $AB$  kenarı için  $h(AB)$  yarı-düzlemi  $K$  yi içerdiğinden dolayı  $K_1$   $K$  yi içerir. Aslında  $K_1 = K$  dir: Bir  $X \in K_1$  için ara değer teoreminden dolayı  $Y$  ve  $Z$  noktaları  $K_1$  in çevresinde olmak üzere  $X$  in  $[YZ]$  doğru parçasının orta noktası olduğu  $Y$  ve  $Z$  noktaları vardır.  $M$  nin çevresinde  $D$  ve  $E$ ,  $N$  nin çevresinde  $D'$  ve  $E'$  noktaları vardır öyle ki  $[DD']$  ve  $[EE']$  doğru parçalarının orta noktaları sırasıyla  $Y$  ve  $Z$  dir.  $[DE]$  ve  $[D'E']$  doğru parçalarının orta noktaları sırasıyla  $F$  ve  $F'$  olsun. O zaman  $F$   $M$  nin,  $F'$  de  $N$  nin içindedir. aynı zamanda  $X$   $[FF']$  doğru parçasının orta noktasıdır. Böylelikle  $K_1 = K$  elde edilir.

$K$  nin bir kenarına, durum 1 halinde  $t$ -tip ve durum 2 halinde  $M$ -tip diyelim.  $N$ -tip kenar da benzer şekilde tanımlanıyor.  $M$  ve  $N$  çokgenlerinin bir kenar uzunlukları sırasıyla  $d_M$  ve  $d_N$  olsun. O halde  $M$ -tip bir kenarın,  $N$ -tip bir kenarın ve  $t$ -tip bir kenarın uzunluğu sırasıyla  $d_M/2$ ,  $d_N/2$  ve  $(d_M + d_N)/2$  dir.

$K$  nin düzgün bir çokgen olduğunu varsayalım.  $K$  nin tüm kenar uzunlukları aynı olduğu için,  $K$  nin aynı anda  $M$ -tip ve  $t$ -tip kenarları veya aynı anda  $N$ -tip ve  $t$ -tip kenarları olamaz. Tüm kenarları  $t$ -tip ise,  $M$  ve  $N$  nin kenarları ikiyeşerli birbirine paraleldir ve  $M$  ile  $N$  düzgün çokgen olduklarından dolayı bu da  $M$  ve  $N$  nin homotetik olduğunu gösterir. Bu durumda da sorudaki şartların sağlandığı açıktır.

Geriye  $K$  nin hem  $M$ -tip hem de  $N$ -tip kenar içerdiği durum kalıyor (Bu durumda  $K$  nin hiç  $t$ -tip kenarı olmadığını hatırlayalım). O zaman  $d_M = d_N$ . Ardışık olup farklı tipte olan iki kenar seçelim:  $AB$  ve  $BC$   $K$  nin sırasıyla  $M$ -tip ve  $N$ -tip kenarları olsun. O zaman  $AB = e(A_1B_1)$   $A_1B_1B_2$  nin bir orta kenarıdır ve  $BC = e(B_2C_2)$   $B_2C_2B_1$  nin bir orta kenarıdır öyle ki  $A_1B_1$   $M$  nin bir kenarıdır ve  $B_2C_2$   $N$  nin bir kenarıdır.  $M$  nin  $B_1$  köşesindeki diğer kenarı  $B_1C_1$ ,  $N$  nin  $B_2$  köşesindeki diğer kenarı  $A_2B_2$  olsun.

$AB//A_1B_1$  ve  $BC//B_2C_2$  olduğu için  $\angle ABC$  hem  $\angle A_1B_1C_1$  den hem de  $\angle A_2B_2C_2$  den büyüktür. Diğer taraftan,  $K$  nin ardışık iki  $M$ -tip kenarının arasındaki açı  $M$  nin bir iç açısına eşittir ve ardışık iki  $N$ -tip kenarının arasındaki açı  $N$  nin bir iç açısına eşittir. O halde  $K$  düzgün çokgen olduğu için  $K$  nin ardışık iki aynı tip kenarı olamaz. Böylece  $M$ -tip kenarların ve  $N$ -tip kenarların sırayla yer aldıkları ve eşit sayıda bulundukları görülür.  $M$ -tip kenarlar ile  $M$  nin kenarları arasında birebir bir eşleme ve  $N$ -tip kenarlar ile  $N$  nin kenarları arasında da birebir bir eşleme bulunduğundan  $N$  nin bir  $m$ -gen ve  $K$  nin ise bir  $2m$ -gen olduğu sonucuna varılır.

$B_1C_1$  ve  $B_2C_2$  doğruları arasındaki dar açı  $\theta$  olsun. O zaman  $\angle ABC = \angle A_1B_1C_1 + \theta$  olur ve buradan da  $180^\circ \cdot (2m - 2)/(2m) = 180^\circ \cdot (m - 2)/m + \theta$  bulunur. Demek ki  $\theta = 180^\circ/m$  ve bu da kalan kısmın ispatını tamamlar. Ayrıca, bu durum sağlanırken sorudaki koşulların da sağlandığı aynı eşitlik ve kenar uzunlukları arasındaki bağıntıdan kolayca görülebilir.

**6.**  $A$  ülkesindeki 2011 kent ile  $B$  ülkesindeki 2011 kent arasında karşılıklı uçak seferleri yapılıyor. İki kent arasındaki seferleri yalnızca bir hava yolu şirketi işletebiliyor ve bir kentten çıkan seferleri en çok 19 farklı hava yolu şirketi işletebiliyor. Uçuşlar hava yolu şirketleri arasında bu koşulları sağlayacak biçimde nasıl paylaşılmış olursa olsun, yalnızca bir tek hava yolu şirketinin uçuşlarını kullanarak herhangi ikisi arasında gidebileceğimiz  $k$  kent bulunuyorsa,  $k$  nin alabileceği en büyük değeri belirleyiniz.

**Çözüm:** Cevap: 212.

Soruyu çizge kavramı kullanarak yeniden formüle edelim.  $|A| = 2011$  ve  $|B| = 2011$  olmak üzere, bir  $K_{A,B}$  tam iki kısımlı (bipartite) çizgenin kenarları, her köşeye bağlı kenarlar en fazla 19 renge boyalı olacak şekilde nasıl boyanırsa boyansın,  $k$  köşeli tek renkli kenarlarla bağlantılı bir alt çizge bulunuyorsa,  $k$  sayısının alabileceği en büyük değeri belirleyiniz.

$v$  köşesine bağlı olan kenarların renklerinin kümesi  $C(v)$ ,  $v$  köşesine bağlı olan  $i$  renkli kenarların sayısı  $d_i(v)$  olsun. Aralarındaki kenar  $i$  rengine boyalı olmak üzere, her  $(u, v)$  köşe ikilisi için  $f(u, v) = d_i(u) + d_i(v)$  olsun. Cauchy-Schwarz eşitsizliğine göre,

$$\frac{1}{2} \sum_{u \in A, v \in B} f(u, v) = \sum_{u \in A, i \in C(u)} d_i^2(u) \geq \left( \sum_{u \in A, i \in C(u)} d_i(u) \right)^2 \cdot \frac{1}{2011 \cdot 19} = 2011^2 \cdot \frac{2011}{19}$$

elde edilir. O zaman  $\lceil 2 \cdot \frac{2011}{19} \rceil = 212$  olduğuna göre, güvercin yuvası prensibinden  $f(s, t) \geq 212$  olacak şekilde bir  $(s, t)$  köşe ikilisi bulunacaktır.

Son olarak  $k = 212$  olan bir örnek verelim.  $A$  ve  $B$  kümelerini 105 ve 106 elemanlı  $A_1, \dots, A_{19}$  ve  $B_1, \dots, B_{19}$  alt kümelere ayıralım ve  $A_i$  alt kümesinin her elemanı ile  $B_j$  alt kümesinin her elemanının arasındaki kenarı  $c(i, j) \equiv i + j \pmod{19}$  olmak üzere  $c(i, j)$  rengine boyayalım. Bu durumda tek renkli kenarlarla bağlantılı en büyük alt çizgenin köşe sayısı 212 olacaktır.