TÜRKİYE BİLİMSEL VE TEKNOLOJİK ARAŞTIRMA KURUMU
30. Ulusal Ortaokul Matematik Olimpiyatı
İkinci Aşama Sınavı

21 Aralık 2022

ÇÖZÜMLER

1. x, y, z pozitif gerçel sayılar olmak üzere $x \leq 1$ dir.

$$xy + y + 2z \geq 4\sqrt{xyz}$$

olduğunu gösteriniz.

Çözüm: AGO eşitsizliğinden

$$xy + y + 2z = xy + y + z + z \geq 4\sqrt[4]{xy^2z^2}$$

elde edilir. $0 < x \leq 1$ olduğu için $x \geq x^2$ dir ve $\sqrt[4]{xy^2z^2} \geq \sqrt[4]{x^2y^2z^2} = \sqrt{xyz}$ sağlanır ve böylelikle $xy + y + 2z \geq 4\sqrt{xyz}$ eşitsizliği elde edilir.

2. 101 öğrencinin bulunduğu bir okulda her öğrencinin diğer öğrenciler arasında en az bir arkadaşı vardır. Her $1 < n < 101$ tam sayısı için bu okuldan n öğrencinin öyle seçilebileceğini gösteriniz ki seçilen her öğrencinin seçilen diğer öğrenciler arasında en az bir arkadaşı olsun.

Çözüm: İlk önce her çift n sayısı için n öğrencinin seçilebileceğini gösterelim. $n = 2$ için iki arkadaştan oluşan herhangi iki kişi seçebiliriz. $n = 2l$ için n öğrenciden oluşan ve koşulları sağlayan A_{2l} öğrenci grubunun seçilebileceğini varsayalım. Okuldaki tüm öğrenciler kümesi S olsun. $S - A_{2l}$ kümesinde iki arkadaş varsa bu iki öğrenciyi A_{2l} ye ekleyerek A_{2l+2} yi elde ederiz. Bu işlem A_n ye kadar devam ederse A_n seçilmiş olacaktır. Aksi takdirde bir $2m < n$ sayısı için $S - A_{2m}$ deki öğrencilerin herhangi ikisi aralarında arkadaş olmayacaktır. 101 öğrenciden herhangi birinin en az bir arkadaşı olduğuna göre, bu durumda $S - A_{2m}$ deki herhangi bir öğrencinin A_{2m} de arkadaşı vardır ve $S - A_{2m}$ den herhangi $n - 2m$ öğrenciyi seçip A_{2m} ye ekleyerek A_n yi elde ederiz.

n nın tek olduğu durumda ilk adımda 3 öğrenciden oluşan A_3 grubunu seçmemiz ve n çift durumdaki gibi devam etmemiz yeterli olacaktır. Bunun için en az iki arkadaşı bulunan bir öğrenciyi ve onun iki arkadaşını seçebiliriz. Böyle bir öğrenci yoksa her öğrencinin sadece bir arkadaşı var ve okuldaki 101 öğrenci birbirinden ayrık arkadaş ikililerine parçalanıyor, çelişki.

3. m, n, a, k pozitif tam sayılar ve $k > 1$ olmak üzere

$$5^m + 63n + 49 = a^k$$

eşitliği sağlanıyor. k nin alabileceği en küçük değer nedir?

Çözüm: Cevap: 5. m çiftse $a^k \equiv 2 \pmod 3$, m tekse $a^k \in \{3,5,6\} \pmod 7$ olur. O halde a^k tam kare değildir, yani k çift olamaz.

Farzedelim ki k sayısı 3 ün tam katıdır. O zaman $a^k \in \{0,1,6\} \pmod 7$ ve eşitlikten $5^m \in \{0,1,6\} \pmod 7$ elde edilir. Buradan m nin 3 ün katı olduğu görülür. Bu durumda $5^m \in \{1,8\} \pmod 9$ gelir ve eşitlikten $a^k \in \{3,5\} \pmod 9$ bulunur. Ancak k 3 ün katı olduğu için $a^k \in \{0,1,8\} \pmod 9$ dur, çelişki. Demek ki k 3 ile bölünemez. Dolayısıyla $k \geq 5$ tir.

Öte yandan $(m,n,a,k) = (1,3,3,5)$ çözümü vardır, yani k nin en küçük değeri 5 tir.

4. Bir $ABCD$ paralelkenarında, ABC nin çevrel çemberinin A yı içermeyen BC yayı üzerinde bir P noktası ve AC doğru parçasının C tarafındaki uzantısı üzerinde bir Q noktası $\angle PBC = \angle CDQ$ olacak biçimde alınıyor. APQ nun çevrel çemberinin AB doğrusuna teğet olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $\angle APB = \angle ACB = \angle QAD$ ve $\angle ABP = \angle QDA$ olduğundan $APB \sim QAD$ olur. O halde $AP/AQ = PB/AD = BP/BC$ olur, ve $\angle PBC = \angle PAQ$ olduğundan $BPC \sim APQ$ olur. O halde $\angle APQ = \angle BPC = \angle BAQ$ olur, yani (APQ) çemberi ile AB doğrusu teğettir.