Türkiye Bilimsel ve Teknolojik Araştırma Kurumu

31. Ulusal Ortaokul Matematik Olimpiyatı
İkinci Aşama Sınavı

20 Aralık 2023

Çözümler

1. Masa üzerinde $1, 2, \ldots, n$ sayılarıyla numaralandırılmış n tane boş kırmızı ve $1, 2, \ldots, n$ sayılarıyla numaralandırılmış n tane boş beyaz kutu bulunuyor. Her işlemde renkleri farklı olan iki kutuya birer top yerleştiriliyor. Birkaç işlemden sonra numaraları aynı olan herhangi kırmızı ve beyaz kutu ikilisi için, ya kırmızı kutuda beyaz kutudan 6 fazla ya da beyaz kutuda kırmızı kutudan 16 fazla top varsa, n sayısının alabileceği tüm değerleri bulunuz.

Çözüm: Cevap: k bir pozitif tam sayı olmak üzere, $n = 11k$.

Aynı numaralı ve farklı renkli n kutu çiftinden m tanesinde kırmızı kutuda daha fazla top olsun. Buna göre, kırmızı kutulardaki top sayı ile beyaz kutulardaki top sayısının farkı $6m - 16(n - m)$ olur. Diğer taraftan, her işlemde farklı renkli iki kutuya birer top yerleştirildiği için bu sayı 0 dır. Sonuç olarak $11m = 8n$ elde edilir. Demek ki n sayısı 11 sayısının bir katı olmak zorundadır. Şimdi de $n = 11$ için bir örnek verelim. $i = 1, 2 \ldots, 8$ ve $j = 9, 10, 11$ olmak üzere her (i, j) ikilisi için i numaralı kırmızı ve j numaralı beyaz kutu ikilisine ikişer kez işlem yaparsak bu 48 işlem sonucunda koşullar sağlanmış olur. k bir pozitif tam sayı olmak üzere, her $n = 11k$ sayısı için kutuları numaralarına göre 11-li gruplara ayırıp her gruba yukarıdaki 48 işlemi yaparsak koşullar sağlanmış olur.

2. Bir $ABCD$ kirişler dörtgeninde BAD ve CAD üçgenlerinin iç teğet çember merkezleri sırasıyla I ve J olsun. I noktasından geçen ve BD doğrusuna dik olan doğru ile J noktasından geçen ve AC doğrusuna dik olan doğrunun kesişim noktası K olsun. $|KI| = |KJ|$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm: Çevrel çemberdeki B, C noktalarını içermeyen AD yayının orta noktası E olsun. $EA = ED = EI = EJ$ olduğu bilindiğinden A, I, J, D noktaları çemberdeştir. Buradan, $\angle JIK = \angle DIK - \angle DIJ = \angle DIK - \angle DAJ = 90 - \frac{\angle ADB}{2} - \frac{\angle DAC}{2}$ bulunur. $\angle IJK$ de benzer şekilde hesaplandığında aynı değer elde edilir ve $|KI| = |KJ|$ bulunur.

3. m ve n aralarında asal pozitif tam sayılar olmak üzere,

$$\frac{n^4 + m}{m^2 + n^2} \text{ ve } \frac{n^4 - m}{m^2 - n^2}$$

sayılarının aynı anda tam sayı olamayacağını gösteriniz.

Çözüm: İki sayının da aynı anda tam sayı olduğunu varsayalım. İki sayıyı toplayınca

$$\frac{2n^2m(n^2m - 1)}{(m^2 + n^2)(m^2 - n^2)}$$

elde edilir ve bu da bir tam sayı olmalıdır. m ve n aralarında asal oldukları için obeb$(n^2m, m^2+n^2) =$ obeb$(n^2m, m^2-n^2) = 1$ olur. Buradan da

$$(m^2+n^2)(m^2-n^2)|2(n^2m-1)$$

elde edilir. m ve n sayılarının ikisi de en az 1'dir ve ikisi birden 1 olamaz. O halde n^2m-1 pozitiftir ve $|(m^2+n^2)(m^2-n^2)| \leq 2(n^2m-1) < 2n^2m$ bulunur. $m^2+n^2 > n^2$ olduğu için $|m^2-n^2| < 2m$ olması gerekir. Bu ifadeyi mutlak değerden çıkarınca

$$(m-1)^2-1 < n^2 < (m+1)^2-1$$

elde edilir. Bunun sağlanması için de $n^2 = m^2$ veya $n^2 = (m-1)^2$ olmalıdır. Ancak ikinci kesirde payda 0 olamayacağı için $n^2 = m^2$ durumu mümkün değildir. O halde $n^2 = (m-1)^2$, yani $n = m-1$ olmalıdır. Bu durumda da $(m^2+n^2)(m^2-n^2)$ tek olacağı için yukarıdakine ek olarak $(m^2+n^2)(m^2-n^2)|(n^2m-1)$ ve benzer şekilde

$$(m^2+n^2)(m^2-n^2) = (m^2+n^2)(2m-1) \leq (n^2m-1)$$

bulunur fakat $(m^2+n^2)(2m-1) \geq (m^2+n^2)m > n^2m$ olduğu için bu mümkün değildir, dolayısıyla bu iki ifade aynı anda bir tam sayıya eşit olamaz.

4. $x_1, x_2, \ldots, x_{31}$ gerçel sayılar olmak üzere,

$$\sum_{i,j=1,2,\ldots,31,\ i\neq j} \lceil x_ix_j \rceil - 30\left(\sum_{i=1,2,\ldots,31} \lfloor x_i^2 \rfloor\right)$$

ifadesinin alabileceği en büyük değeri belirleyiniz. *Not. Bir x gerçel sayısı için, $\lceil x \rceil$ ile x sayısından küçük olmayan en küçük tam sayı, $\lfloor x \rfloor$ ile x sayısını aşmayan en büyük tam sayı gösteriliyor: $\lceil 2.7 \rceil = 3$, $\lfloor 2.7 \rfloor = 2$ ve $\lceil 4 \rceil = \lfloor 4 \rfloor = 4$.*

Çözüm: Cevap 1170. Genel durumda, 31 sayısı yerine n için cevap $n^2 - n + \lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor$; başka bir deyişle n çift iken $\frac{5n^2-4n}{4}$, n tek iken $\frac{5n^2-4n-1}{4}$. Sayıların (yaklaşık) yarısını 0.9 ve diğer yarısını 1.2 seçince sağlıyor, örnekler çoğaltılabilir. Genel durum için soruyu çözelim.

Sorudaki ifadeyi

$$S = \sum_{i<j} \left(2\lceil x_ix_j \rceil - \lfloor x_i^2 \rfloor - \lfloor x_j^2 \rfloor\right)$$

olarak düzenleyelim. Her a, b reel sayı ikilisi için

$$2\lceil ab \rceil - \lfloor a^2 \rfloor - \lfloor b^2 \rfloor < 2ab + 2 - (a^2-1) - (b^2-1) = 4 - (a-b)^2 \leq 4$$

sağlanır ve eşitsizliğin sol tarafı tam sayı olduğundan dolayı $2\lceil ab \rceil - \lfloor a^2 \rfloor - \lfloor b^2 \rfloor \leq 3$ bulunur, $a = 1.2$ ve $b = 0.9$ gibi durumlarda ise eşitlik sağlanır . Ayrıca, eğer $\lfloor a^2 \rfloor - \lfloor b^2 \rfloor$ ifadesi çift ise, sol taraf çift bir sayı olacağı için bu durumda $2\lceil ab \rceil - \lfloor a^2 \rfloor - \lfloor b^2 \rfloor \leq 2$ elde edilir. $a = b$ ve ikisi sayı da kareleri tam sayı olmayacak şekilde alındığında ise eşitlik sağlanır.

$x_1, x_2, \ldots, x_n$ gerçel sayıları için, $\lfloor x_i^2 \rfloor$ ifadelerinden k tanesi çift, $l = n-k$ tanesi tek olsun. Bu durumda, S toplamında tüm ikililer bir kere geçtiği için, çift sayıların birlikte gruplandığı $\binom{k}{2}$ ifadenin ve tek sayıların birlikte gruplandığı $\binom{l}{2}$ ifadenin maksimum değeri 2 olacaktır. Bir çift, bir tek sayıdan oluşan kl ifadenin ise maksimum değeri 3 olacaktır. Buradan da

$$S \leq 3kl + k^2 - k + l^2 - l = (k+l)^2 + kl - k - l = n^2 - n + kl \leq n^2 - n + \lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor$$

elde edilir. Yukarıda verilen örneğin maksimum değere ulaşmamızı sağladığı da buradan kolayca görülebilir.