TÜRKİYE BİLİMSEL VE TEKNOLOJİK ARAŞTIRMA KURUMU
BİLİM İNSANI DESTEK PROGRAMLARI BAŞKANLIĞI

31. ULUSAL BİLİM OLİMPİYATLARI - 2023
BİRİNCİ AŞAMA SINAVI
MATEMATİK

Soru Kitapçığı Türü

A

25 Haziran 2023 Pazar, 09.30-12.30

ÇÖZÜMLER

1. $s(\widehat{B}) = 90°$ olan bir ABC üçgeninde $[AB]$ kenarının orta noktası M olmak üzere, M den AC ye çizilen dikmenin BC ile kesişimi N olsun. $|BN| = 8$ ve $|CN| = 17$ ise, $|MN|$ kaçtır?

a) 10 b) 13 c) 15 d) 17 e) Hiçbiri

Cevap: 10. $|AM| = |BM| = x$ dersek, $BMN \sim BCA$ kullanılarak $\dfrac{|BC|}{2x} = \dfrac{x}{|BN|}$ olup, $2x^2 = 9 \cdot 8$ ve dolayısıyla $x = 6$ bulunur. BMN üçgeninde Pisagor teoreminden $|MN| = 10$ bulunur.

2. $3^{p^2+p+1} + 7^{p^2+p+1}$ sayısının p ile bölünmesini sağlayan kaç tane p asal sayısı vardır?

a) 2 b) 3 c) 4 d) 5 e) 6

Cevap: 3. $p \neq 3, 7$ olduğu bariz, p modunda bakarsak kuvvetlerin ikisi de $p-1$ modunda 3 olduğu için Fermat teoreminden $p|3^3 + 7^3 = 370 = 2 \cdot 5 \cdot 37$ gelir. p'nin alabileceği değerler yalnızca bu üçü olabilir.

3. x bir gerçel sayı olmak üzere, $4^x + 7^x + 8^x + 10^x + 14^x + 15^x = 17^x + 19^x$ denklemini sağlayan kaç tane x sayısı vardır?

a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) Sonsuz çoklukta

Cevap: 1. Her tarafı 17^x ile bölersek, denklem $\left(\frac{4}{17}\right)^x + \left(\frac{7}{17}\right)^x + \left(\frac{8}{17}\right)^x + \left(\frac{10}{17}\right)^x + \left(\frac{14}{17}\right)^x + \left(\frac{15}{17}\right)^x = 1 + \left(\frac{19}{17}\right)^x$ haline gelir. Sol taraf x'in azalan bir fonksiyonu ve sağ taraf da x'in artan bir fonksiyonu olduğu için, bu iki fonksiyon en fazla bir noktada kesişebilir. $x = 0$ durumunda da sol taraf daha büyük, x çok büyükken de sağ taraf daha büyük olduğu için ara değer teoreminden dolayı ortadaki bir değerde bir kök bulunmak zorundadır.

4. 31 kişiden oluşan bir sınıfta, 4 öğrenci içeren her grubun içinde kendisi dışındaki diğer 3 öğrenciyle arkadaş olan en az bir öğrenci bulunuyor. Buna göre bu sınıfta kendisi dışındaki tüm öğrencilerle arkadaş olan öğrenci sayısı en az kaç olabilir?

a) 26 b) 27 c) 28 d) 29 e) 30

Cevap: 28. Bu sınıfta kendisi dışındaki tüm öğrencilerle arkadaş olan öğrenci sayısı N olsun. Sınıfta herkes arkadaşsa $N = 31$ olur. A ve B öğrencileri arkadaş olmasın. Kalan 29 öğrenciden arkadaş olmayan C ve D bulunuyorsa, A, B, C, D dörtlüsü koşulu sağlamaz. O halde kalan 29 kişiden herhangi ikisi arkadaştır. Hem A hem de B kalan 29 öğrencinin hepsi ile arkadaşsa $N = 29$ olur. Genelliği bozmadan A bir $C \neq B$ öğrencisi ile arkadaş olmasın. Bu durumda A, B, C dışındaki her D öğrencisi herkesle arkadaş olmak zorundadır. Sonuç olarak cevap 28 olur.

5. $m(\widehat{B}) > m(\widehat{C})$ olan bir ABC üçgeninde A köşesine ait iç açıortay ve dış açıortay uzunlukları birbirine eşit ise, $2 \cdot \widehat{A} + 3 \cdot \widehat{B} + \widehat{C}$ kaç derecedir?

a) 360° b) 420° c) 540° d) 630° e) Hiçbiri

Cevap: 450°. İçaçıortay ve dışaçıortay birbirlerine dik oldukları için, BC doğrusu ile oluşturdukları üçgenin diğer açıları 45° olmalıdır, bu durumda $m(\widehat{B}) > m(\widehat{C})$ kullanarak, $\widehat{C} + \dfrac{\widehat{A}}{2} = 45°$ ve dolayısıyla $\widehat{C} = \alpha$ dersek, $\widehat{A} = 90 - 2\alpha$ ve $\widehat{B} = 90 + \alpha$ bulunur. Dolayısıyla, $2 \cdot \widehat{A} + 3 \cdot \widehat{B} + \widehat{C} = 2(90 - 2\alpha) + 3(90° + \alpha) + \alpha = 450°$ olur.

6. $(3m+4n)(4m+3n) = 3^{63}$ eşitliğini sağlayan kaç (m, n) tam sayı ikilisi vardır?

a) 44 b) 64 c) 88 d) 128 e) Hiçbiri

Cevap: 44. İki sayının toplamı 7 ile bölünmelidir, dolayısıyla bu iki sayı (mod 7)'de birbirlerinin tersi olmalıdır. $3m + 4n = a$, $4m + 3n = b$ dersek bu iki ifadeyi toplayınca $m + n = \dfrac{a+b}{7}$, $m - n = b - a$ gelir ve toplamı 7 ile bölünen her a, b ikilisi için bir m, n bulunabileceği görülür. $3^3 \equiv -1$ (mod 7) olduğu için, soldaki çarpanlar (mod 7)'de ± 1 olmak durumundadır, yani $3m + 4n = \pm 3^{3x}$, $4m + 3n = \pm 3^{3y}$ ve $x + y = 21$ olmalıdır, $x, y \geq 0$ olması gerekeceği için de bunu sağlayan da toplam 44 tane (x, y) ikilisi vardır.

7. x bir pozitif gerçel sayı olmak üzere $\lfloor x^2 \rfloor + \lfloor x \rfloor$ şeklinde yazılamayan 2023'ten küçük kaç tane pozitif tam sayı vardır?

a) 1 b) 12 c) 22 d) 44 e) 90

Cevap: 44. Bir a pozitif tam sayısı için, $x \in [a-1, a)$ ise $\lfloor x^2 \rfloor + \lfloor x \rfloor$ sayısı $[a^2 - a, a^2 + a)$ aralığında $a^2 + a - 1$ hariç tüm değerleri alabilir. 2023'ten küçük ve bu formda yazılabilen sayılar ise $a \in \{1, 2, \ldots, 44\}$ için gelecektir ve 44 tanedir.

8. Bir yuvarlak masa etrafına oturmuş 31 öğrenciden üçü, seçilen herhangi iki öğrenci arasında en az 4 öğrenci bulunması koşuluyla kaç farklı şekilde seçilebilir?

a) 1450 b) 1471 c) 1512 d) 1543 e) 1581

Cevap: 1581. Öğrencileri saat yönünde $1, 2, \ldots, 31$ sayılarıyla numaralandıralım. 1. öğrenci seçilmiş olsun. Bu durumda 2., 3., 4., 5., 28., 29., 30. ve 31. öğrenciler seçilmeyecek. 1. öğrenciden sonra saat yönünde seçilen ilk öğrenci 6. öğrenci olursa, seçilen son öğrenci için 17 seçenek, 7. öğrenci olursa, seçilen son öğrenci için 16 seçenek, . . . , 22. öğrenci olursa, seçilen son öğrenci için 1 seçenek bulunacaktır. Buna göre, toplam $17 + 16 + \cdots + 1 = 17 \cdot 9 = 153$ seçenek elde edilir. Seçilen her öğrenci üçlüsü 3 kez sayılacağına göre, cevap $\dfrac{153 \cdot 31}{3} = 1581$ olur.

9. O merkezli bir çember üzerinde alınan A ve B noktaları için $m(\widehat{AOB}) = 90^\circ$ dir. Çemberin küçük AB yayı üzerinde alınan bir C noktası ve $[OB]$ üzerinde alınan bir D noktası için $m(\widehat{ACD}) = 90^\circ$ dir. $|AC| = 30$, $|CD| = 16$ ise, $|BD|$ uzunluğu kaçtır?

a) $\sqrt{66}$ b) $2\sqrt{34}$ c) $3\sqrt{34}$ d) $2\sqrt{66}$ e) Hiçbiri

Cevap: $2\sqrt{34}$. Öncelikle ACD üçgeninde Pisagor teoreminden $|AD| = 34$ bulunur. CD doğrusunun çemberle ikinci kesişimine F dersek, $m(\widehat{ACF}) = 90^\circ$ olduğundan $[AF]$ çap olur, dolayısıyla A, O, F doğrudaştır. ADF üçgeninde $OD \perp AF$ ve $|AO| = |OF|$ olduğundan $|DF| = |AD| = 34$ olur. Buradan $|CF| = |CD| + |DF| = 50$ olup ACF ve AOD üçgenlerinde Pisagor teoreminden $|AF| = 10\sqrt{34}$, $|AO| = 5\sqrt{34}$ ve $|OD| = 3\sqrt{34}$ olup, $|BD| = |OB| - |OD| = 2\sqrt{34}$ olur.

10. $2^n + 3^n + 5^n$ sayısının 100 ile tam bölünmesini sağlayan 2023 ten küçük kaç n pozitif tam sayısı vardır?

a) 50 b) 101 c) 150 d) 202 e) 251

Cevap: 202. $2^n + 3^n + 5^n \equiv 0 \pmod{25}$ olabilmesi için $n \geq 2$ ve $(2/3)^n \equiv -1 \pmod{25}$ olması gerekir. Bu ise $2/3 \equiv 9 \pmod{25}$, $9^5 \equiv -1 \pmod{25}$ ve $\phi(25) = 20$ olduğundan 9 un 25 modundaki derecesinin 10 ve $n \equiv 5 \pmod{10}$ olduğunu gösterir. $n > 1$ tek sayı olduğundan $2^n + 3^n + 5^n$ sayısı

4 ile bölünür. 2023 ten küçük olup $10k+5$ formunda olan 202 tane pozitif tam sayı vardır.

11. $a_1, a_2, \dots, a_{31}$ dizisi $a_1 = \dfrac{1}{31}$ ve her $n = 1, 2, \dots, 30$ değeri için $(n+2)a_n = na_{n+1}$ olarak tanımlanmıştır. Buna göre, $a_1+a_2+\dots+a_{31}$ kaçtır?

a) 176 b) 179 c) 181 d) 187 e) 192

Cevap: 176. $3a_1 = a_2$, $4a_2 = 2a_3$, . . . , $32a_{30} = 30a_{31}$ eşitliklerini taraf tarafa toplarsak $a_1 + a_2 + \dots + a_{30} = 10a_{31}$ gelir. Buna göre, $a_1 + a_2 + \dots + a_{31} = 11a_{31}$ olur. Diğer taraftan $a_{31} = \frac{32}{30} \cdot a_{30} = \frac{32}{30} \cdot \frac{31}{29} \cdot a_{29} = \dots = \frac{32}{30} \cdot \frac{31}{29} \cdot \frac{30}{28} \cdot \frac{29}{27} \cdots \frac{4}{2} \cdot \frac{3}{1} \cdot a_1 = \frac{32 \cdot 31}{2} \cdot a_1 = 16$ olduğuna göre, cevap $11 \cdot 16 = 176$ olur.

12. Bir sıraya dizilmiş 7 topun her biri kırmızı, mavi ve siyah renklerden birine, yan yana iki siyah top olmayacak şekilde kaç farklı biçimde boyanabiir?

a) 1128 b) 1158 c) 1186 d) 1224 e) 1296

Cevap: 1224. n topun koşullara uygun şekilde boyanma sayısı $f(n)$ olsun. Buna göre, $f(1) = 3$ ve $f(2) = 8$ olur. Koşullara uygun boyanmış ve en sağdaki topun siyah olduğu boyamalarda sağdan ikinci top siyah olamaz. Bu tür boyamaların sayısı $2f(n-2)$'dir. Koşullara uygun boyanmış ve en sağdaki topun siyah olmadığı boyamalarda en sağ top ya kırmızı ya da mavidir. Bu tür boyamaların sayısı $2f(n-1)$'dir. Sonuç olarak $f(n) = 2(f(n-1) + f(n-2))$ olur. Demek ki $f(3) = 22, f(4) = 60, f(5) = 164, f(6) = 448$ ve $f(7) = 1224$.

13. Bir kenarının uzunluğu 6 olan $ABCD$ karesinin $[BC]$ kenarı üzerinde $|BE| = 4$ olan bir E noktası alınıyor. $DE \cap AB = \{K\}$ ve $AE \cap DC = \{L\}$ olmak üzere, EKL üçgeninin çevrel çemberinin yarıçapı nedir?

a) $\dfrac{13\sqrt{10}}{6}$ b) 6 c) 9 d) $\dfrac{8\sqrt{13}}{3}$ e) Hiçbiri

Cevap: $\dfrac{13\sqrt{10}}{6}$. $ABE \sim ECL$ benzerliğinden dolayı $|CL| = 3$, $DCE \sim KBE$ benzerliğinden dolayı $|BK| = 12$ bulunur. $ADKL$ yamuğunu düşünürsek, $\text{Alan}(EKL) = \text{Alan}(AED) = \dfrac{\text{Alan}(ABCD)}{2} = 18$ bulunur. Diğer taraftan, Pisagor teoremlerinden $|EL| = \sqrt{13}$, $|EK| = 4\sqrt{10}$,

$|KL| = 3\sqrt{13}$ olup, üçgende alan formülünden dolayı $18 = \dfrac{3 \cdot 4 \cdot 13\sqrt{10}}{4R}$ ve $R = \dfrac{13\sqrt{10}}{6}$ bulunur.

14. $a^3 + 4a^2b - 3ab^2 - 18b^3 = 2023$ eşitliğini sağlayan kaç (a, b) tam sayı ikilisi vardır?

a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) Hiçbiri

Cevap: 1. Verilen eşitliğin sol tarafını

$$\begin{aligned} a^3 + 4a^2b - 3ab^2 - 18b^3 &= a^3 - 8b^3 + 4a^2b - 3ab^2 - 10b^3 \\ &= (a - 2b)(a^2 + 2ab + 4b^2) + b(a - 2b)(4a + 5b) \\ &= (a - 2b)(a^2 + 6ab + 9b^2) \\ &= (a - 2b)(a + 3b)^2 \end{aligned}$$

şeklinde yazabiliriz. $a = 2b + k$ dersek, k bir pozitif tam sayı olur. Yerine koyarsak $k \cdot (5b + k)^2 = 2023$ olur. $2023 = 7 \cdot 17^2$ olduğundan sadece $k = 7$, $5b + k = 17$ olabilir. Buradan $(a, b) = (11, 2)$ olup tek çözüm gelir.

15. x ve y gerçel sayılar olmak üzere, $x^2 - xy + y^2 - x - 2y$ ifadesinin alabileceği en küçük değer nedir?

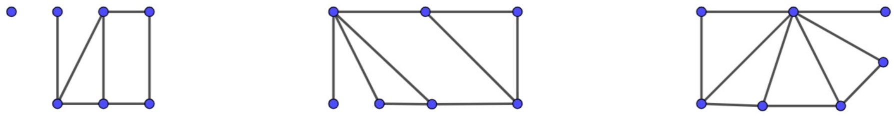
a) -3 b) $-\dfrac{7}{3}$ c) -2 d) $-\dfrac{4}{3}$ e) Hiçbiri

Cevap: $-\dfrac{7}{3}$. İfadeyi 2 ile çarpıp $(x - y)^2 + (x - 1)^2 + (y - 2)^2 - 5$ olarak gruplayabiliriz. $a = 2 - y$, $b = y - x$, $c = x - 1$ dersek $a + b + c = 1$ olduğu için $a^2 + b^2 + c^2 \geq \dfrac{(a + b + c)^2}{3} = \dfrac{1}{3}$ olur ve ifadenin minimumu $-\dfrac{14}{3}$ bulunur, sorudaki ifade için de minimum bunun yarısı olan $-\dfrac{7}{3}$ olur. $x = \dfrac{4}{3}$, $y = \dfrac{5}{3}$ için de bu minimum elde edilir.

16. 7 kişilik bir grup içinde bazı tokalaşmalar olmuştur. Tam olarak 1 kişiyle tokalaşan kişi sayısı 1, tam olarak 2 kişi ile tokalaşan kişi sayısı 2 ve tam olarak 3 kişi ile tokalaşan kişi sayısı 3'tür. Buna göre, toplam tokalaşma sayısının alabileceği kaç farklı değer vardır?

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) Hiçbiri

Cevap: 3. Bu $1+2+3=6$ kişi dışındaki kişinin tokalaştığı kişi sayısı k olsun. Toplam tokalaşma sayısının 2 katı $1+2+2+3+3+3+k=14+k$ olacağı için k çift olmalı. Ayrıca $k \neq 2$ olduğu için k'nin alabileceği değerler $0, 4$ ve 6'dır. Bu durumların her biri mümkündür ve toplam tokalaşma sayısı 7, 9 ve 10 olabilir.



17. $|AB|=6$, $|AC|=8$, $|BC|=10$ olan bir ABC üçgeni veriliyor. Bu üçgenin çevrel çemberinde A noktasını içermeyen BC yayının orta noktası D olsun. Çevrel çembere D noktasında teğet olan doğrunun AB doğrusuyla kesiştiği nokta E ise, $|ED|$ uzunluğu nedir?

a) 8 b) $\dfrac{36}{5}$ c) 9 d) $\dfrac{28}{3}$ e) $\dfrac{35}{4}$

Cevap: $\dfrac{35}{4}$. BC kenarının orta noktası O olsun, ABC dik üçgen olduğu için çevrel çemberin merkezi O noktası olur. Aynı zamanda teğetlikten $OD \perp ED$ ve D orta nokta olduğu için $OD \perp BC$ elde edilir. B noktasından ED doğrusuna çizilen dikmenin ayağına F dersek, $|BC|=10$ olduğundan $OBFD$ dörtgeni bir kenar uzunluğu 5 olan bir kare olur. BEF üçgeni bir dik üçgen ve $m(\widehat{EBF}) = 90^\circ - m(\widehat{ABC})$ olduğu için $ABC \sim FEB$ bulunur. Bu benzerlikten, $\dfrac{|EF|}{|BF|} = \dfrac{|EF|}{5} = \dfrac{|BA|}{|BC|} = \dfrac{3}{4}$ ve $|EF| = \dfrac{15}{4}$ olup $|ED| = |EF| + |FD| = \dfrac{15}{4} + 5 = \dfrac{35}{4}$ elde edilir.

18. p bir asal sayı, $n<p$ bir pozitif tam sayı olmak üzere,

$$p^2 | n^5 + n^4 + 7n^3 + n^2 + n + 7$$

şartını sağlayan kaç (n,p) ikilisi vardır?

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

Cevap: 4. Şartları sağlayan ikililer $(n,p) = (1,3), (2,3), (6,7), (10,13)$ dir. $n^5+n^4+7n^3+n^2+n+7 = (n+1)(n^2-n+1)(n^2+n+7)$ ve $n>1$ için $n+1 \leq n^2-n+1 < n^2 < p^2$ olduğundan $p^2 \mid n^2+n+7$ veya $n+1, n^2-n+1, n^2+n+7$ sayılarının ikisi p ile bölünür. $n>6$ için $p^2 \geq (n+1)^2 > n^2+n+7$ olur. $p \mid n+1$, $p \mid n^2-n+1$ için $(n,p)=(2,3)$, $p \mid n+1$, $p \mid n^2+n+7$ için $(n,p)=(6,7)$ ve $p \mid n^2-n+1$, $p \mid n^2+n+7$ için de $(n,p)=(10,13)$ elde ederiz. $n \leq 6$ durumu incelenirse sadece

$(n, p) = (1, 3)$ için çözüm geldiği görülür.

19. $k \neq -1$ ve ℓ verilmiş gerçel sayılar olsun. $\dfrac{x}{x+1} + \dfrac{y}{y+2} + \dfrac{z}{z+3} = 1$ eşitliğinde $x = k$ iken $yz = \ell$ olmak zorunda ise, $k + \ell$ kaçtır?

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 6

Cevap: 6. $k = 0, \ell = 6$ için önerme sağlanır. Eşitliği düzenlersek $\dfrac{yz-6}{(y+2)(z+3)} = \dfrac{-x}{x+1}$ elde ederiz. Yani $x = 0$ iken $yz = 6$ olur. $k \neq 0$ iken $t = \dfrac{-x}{x+1} \neq 0$ olduğunda $t \neq 1$ iken $[(t-1)y + 2t][(t-1)z + 3t] = 6$ ve $t = 1$ iken $3y + 2z = -12$ elde ederiz. Her iki durumda $t \neq 0$ iken yz ifadesinin birden fazla farklı değer alması kolayca sağlanabilir.

20. $0 * 1 * 2 * 3 * \cdots * 30 * 31$ ifadesindeki 31 tane $*$ işaretinin her birinin yerine $+$ ya da $-$ işareti yazarak kaç farklı pozitif tam sayı elde edilebilir?

a) 224 b) 248 c) 312 d) 368 e) 496

Cevap: 248. Her $*$ yerine $+$ yazarsak 496 sayısı elde edilir. İfadede tam olarak 16 tane tek sayı olduğu için sonuç her zaman bir çift sayı olacaktır. 497'den küçük tüm çift pozitif tam sayıların elde edilebileceğini gösterelim. $2n$ elde ediliyorsa $2n - 2$'nin de elde edilebileceğini gösterelim. $2n$ gösteriminde 1 in işareti $+$ ise $-$ yapabiliriz. 1'in işareti $-$ ve 2'nin işareti $+$ ise her iki işareti değiştirebiliriz. 2'nin işareti $-$ ve 3'ün işareti $+$ ise her iki işareti değiştirebiliriz. $2n$ gösteriminde tüm işaretler eksi olamayacağına göre, benzer şekilde devam ederek $2n - 2$ sayısını elde edibiliriz.

21. Bir ABC üçgeninin $[BC]$ kenarı üzerinde köşelerden farklı bir D noktası alınıyor. $|AB| = |AD|$, $\dfrac{|CD|}{|BD|} = 3 + 2\sqrt{3}$, $m(\widehat{ACB}) = 15^\circ$ ise, $m(\widehat{ABC})$ kaçtır?

a) 75° b) 60° c) 45° d) 30° e) Hiçbiri

Cevap: 75°. BAD ikizkenar üçgeninde A dan inen yükseklik ayağı E olsun. $\widehat{B}$ açısı dar bir açı olduğundan $\widehat{A}$ açısı 15° den büyüktür, dolayısıyla $[BC]$ üzerinde $m(\widehat{CAF}) = 15^\circ$ şartını sağlayan F noktasını alabiliriz. Buradan $|CF| = |AF|$ ve AEF üçgeninin açıları $30^\circ - 60^\circ - 90^\circ$ olup, $|AE| = y$ dersek

$|EF| = y\sqrt{3}$ ve $|CF| = |AF| = 2y$ olur. $|BD| = 2x$ dersek,

$$|CD| = |FC| + |EF| - |DE| = (2+\sqrt{3})y - x$$

buluruz. Dolayısıyla $3 + 2\sqrt{3} = \dfrac{|CD|}{|BD|} = \dfrac{(2+\sqrt{3})y - x}{2x}$ olup, düzenlersek $y = (2+\sqrt{3})x$ elde ederiz. Buradan,

$$|FB| = |EF| + |BE| = y\sqrt{3} + x = 2y = |CF| = |AF|$$

olup, süper üçlüden $m(\widehat{BAC}) = 90°$ ve dolayısıyla $m(\widehat{ABC}) = 75°$ bulunur.

22. p ve q asal sayılar olmak üzere,

$$\frac{7pq}{1+p+q}$$

ifadesi $\{1, 2, 3, \ldots, 31\}$ değerlerinden kaç tanesine eşit olabilir?

a) 2 b) 3 c) 4 d) 5 e) Hiçbiri

Cevap: 5. p ve q asal sayılar olduğundan $p+q+1 \in \{1, 7, p, q, 7p, 7q, pq, 7pq\}$ olabilir. p ve q negatif olamayacağından $p+q+1 \notin \{1, p, q\}$ görülebilir. $p+q+1 = 7$ ise $p = q = 3$ olup ifade 9 olur. Genelliği bozmadan $p \geq q$ varsayalım. $q \neq 2$ ise, $p+q+1 \leq 2p+1 < 3p \leq pq < 7pq$ olduğundan $p+q+1 \in \{pq, 7pq\}$ olamaz. $q = 2$ ve $p+q+1 \in \{pq, 7pq\}$ olması sadece $p = 3$ iken olabilir, bu durumda ifade 7 olur. $p+q+1 \in \{7p, 7q\}$ ise $p \geq q$ olduğundan $p = 6q-1$ bulunur. Bu durumda $\dfrac{7pq}{1+p+q} = p = 6q-1$ olacağı için $6q - 1 \leq 31$ ve $q \in \{2, 3, 5\}$, $p \in \{11, 17, 29\}$ olur. Verilen ifade $\{7, 9, 11, 17, 29\}$ değerlerini alabilir.

23. $x^2 = 4y+1$, $y^2 = x^3+1$ denklem sisteminin gerçel sayılarda kaç farklı (x, y) çözüm ikilisi bulunur?

a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4

Cevap: 2. Verilen denklemlerden $16y^2 = (x^2-1)^2 = 16(x^3+1)$ elde ederiz. $x = -1$ iken $y = 0$ olur ve eşitlikler sağlanır. $x \neq -1$ için $(x+1)^2(x-1) = 16(x^2-x+1)$ ve buradan da $Q(x) = x^3 - 17x^2 + 15x - 15 = 0$ buluruz. $Q(16) = -31, Q(17) = 240$ olduğundan bir $16 < x_0 < 17$ için $Q(x_0) = 0$ olur. Bu x_0 için $y_0 = (x_0^2 - 1)/4$ alırsak eşitlikler sağlanır. Öte yandan $Q(x)$ polinomunun başka gerçel kökü yoktur çünkü aksi halde üç kök de gerçel olmalıdır ve $Q(x)$ ifadesinde tek dereceli üslerin katsayıları pozitif ve çift dereceli üslerin katsayıları negatif olduğundan üç kök de pozitif olur. Ancak Vieta teoreminden köklerin ikili çarpımları toplamı 15 ve kökler çarpımı da 15 olamaz. (AGO dan çelişki gelir.) Yani toplam 2 farklı çözüm ikilisi bulunur.

24. Başlangıçta $1, 2, 3, 4, 5, 6$ sayılarının yazılı olduğu bir tahtada Aslı bir oyun oynuyor. Aslı her hamlesinde tahtadan önce bir a sayısı sonra da bir b sayısı seçiyor. $x^2 - ax + b$ polinomunun iki kökü de pozitif tam sayıysa, Aslı a ve b sayılarını silip yerine bu polinomun iki kökünü yazmaktadır. Aslı, sonlu sayıda hamle sonucunda tahtadaki sayıların çarpımını $14, 16, 20, 24, 32$ sayılarından kaç tanesini yapabilir?

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

Cevap: 3. Her hamlede tahtadaki sayıların çarpımı ab yerine b olduğu için, her hamle sonunda tahtadaki sayıların çarpımı $6! = 720$ sayısını bölmeli, dolayısıyla 14 ve 32 yazılamaz. Şimdi diğer 3 sayının yazılabileceğini gösterelim:
$(5, 6)$ yerine $(2, 3)$ ve iki defa $(3, 2)$ yerine $(1, 2)$ yazarak 16;
$(6, 5)$ yerine $(5, 1)$, $(3, 2)$ yerine $(1, 2)$ ve $(2, 1)$ yerine $(1, 1)$ yazarak 20;
$(5, 4)$ yerine $(4, 1)$, $(3, 2)$ yerine $(1, 2)$ ve $(2, 1)$ yerine $(1, 1)$ yazarak 24 elde edilebilir.

25. $m(\widehat{BAC}) = 90^\circ$ olan bir ABC üçgeninde A noktasından BC kenarına inen dikmenin ayağı D ve $[AD]$ nin orta noktası E olsun. $m(\widehat{BEC}) = 120^\circ$ ise, $\dfrac{|BC|}{|AD|}$ kaçtır?

a) 2 b) $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ c) 3 d) $2\sqrt{3}$ e) 4

Cevap: $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$. $|AE| = |ED| = x$, $|BD| = y$, $|CD| = z$ diyelim. BED, CED, ABD üçgenlerinde Pisagor teoreminden $|BE| = \sqrt{x^2 + y^2}$, $|CE| = \sqrt{x^2 + z^2}$, $|AB| = \sqrt{4x^2 + y^2}$ olur. Diğer taraftan, ABC üçgeninde Öklid teoreminden $|AB| = \sqrt{y(y + z)}$ dir, dolayısıyla $4x^2 = yz$ bulunur. BEC üçgeninde Kosinüs teoreminden

$$(x^2 + y^2) + (x^2 + z^2) + \sqrt{(x^2 + y^2)(x^2 + z^2)} = (y + z)^2$$

olup, $x^2 = \dfrac{yz}{4}$ ü yerine koyduğumuzda $y^2 + z^2 = \dfrac{19yz}{4}$ buluruz. Buradan, $\dfrac{|BC|}{|AD|} = \dfrac{y + z}{2x} = \dfrac{\sqrt{y^2 + z^2 + 2yz}}{\sqrt{yz}} = \sqrt{\dfrac{27}{4}} = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ bulunur.

26. $f : \{1, 2, \ldots, 30\} \to \{1, 2, \ldots, 30\}$ birebir bir fonksiyon olmak üzere, en fazla kaç tane $1 \le a \le 30$ tam sayısı için $f(1)f(2)\ldots f(a) + 1$ sayısı 31 ile tam bölünür?

a) 14 b) 15 c) 16 d) 29 e) 30

Cevap: 16. Genel olarak bir p tek asal sayısı için cevabın $\dfrac{p+1}{2}$ olduğunu gösterelim. $g(a) = f(1)f(2)\ldots f(a) + 1$ diyelim. Bir a sayısı için $p|g(a)$ ve $p|g(a+1)$ olursa $p|g(a+1) - g(a)$ ve dolayısıyla $f(a+1) \equiv 1 \pmod p$ olmalı. Yani ardışık tüm ikililere bakarsak, en fazla bir tane ikili için iki sayı birden p'ye bölünebilir, dolayısıyla en fazla $\dfrac{p+1}{2}$ sayı bu şartı sağlayabilir. Örnek için de $f(1) = p - 1, f(2) = 1$ ile başlayıp kalan sayıları $f(2k-1) \equiv \dfrac{1}{f(2k)} \pmod p$ şeklinde gruplayabiliriz. Dolayısıyla $a = 1, 2, 4 \ldots, p-1$ için $p|g(a)$ olur.

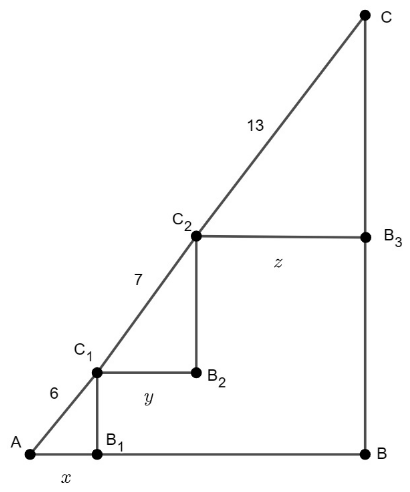
27. x, y, z pozitif gerçel sayıları

$$x + y + z = 10$$
$$\sqrt{36 - x^2} + \sqrt{49 - y^2} + \sqrt{169 - z^2} = 24$$

denklemlerini sağlıyorsa, $\dfrac{xz}{y}$ aşağıdakilerden hangisidir?

a) $\dfrac{30}{7}$ b) 5 c) 6 d) $\dfrac{65}{8}$ e) $\dfrac{49}{3}$

Cevap: $\dfrac{30}{7}$. Kenar uzunlukları $x, \sqrt{36 - x^2}, 6$ olan AB_1C_1 dik üçgenini, $y, \sqrt{49 - y^2}, 7$ olan $C_1B_2C_2$ dik üçgenini ve $z, \sqrt{169 - z^2}, 13$ olan C_2B_3C dik üçgenini x, y, z kenarları aynı doğrultuda olacak şekilde uç uca çizelim.



AB_1 ve CB_3 kenarlarını uzatıp kesiştikleri noktaya B dersek, ABC de bir dik üçgen olur ve dik kenarları 10 ile 24 olduğu için hipotenüsü $AC = 26 = 6+7+13 = AC_1 + C_1C_2 + C_2C$ olur, dolayısıyla bu 3 üçgendeki hipotenüsler de aynı doğru üzerindedir ve küçük üçgenlerin kenarları büyük üçgenlere paraleldir. Buradan benzerlik oranlarını yazarak $x = \frac{30}{13}$, $y = \frac{35}{13}$, $z = 5$ ve son olarak $\frac{xz}{y} = \frac{30}{7}$ bulunur.

28. Bir masa üzerinde k, m ve n bilye içeren üç öbek bulunuyor. İki oyuncu sırayla hamle yaparak bir oyun oynuyorlar. Sırası gelen oyuncu masa üzerindeki öbeklerden istediği ikisini seçiyor ve bu iki öbeğin daha az bilye içereninden daha fazla bilye içerenine istediği bir pozitif tam sayı adedince bilyeyi aktarıyor (seçilen öbeklerde bilye sayıları eşitse bilyeler öbeklerin herhangi birinden aktarılıyor). Hamle yapamayan oyuncu oyunu kaybediyor. Oyun $(k, m, n) = (9, 9, 21)$, $(11, 11, 11)$, $(9, 10, 31)$, $(8, 16, 24)$ ve $(9, 22, 22)$ için birer kez oynanırsa, oyuna başlayan oyuncu bu oyunlardan kaçını kazanmayı garantileyebilir?

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

Cevap: 3. $a \leq b$ olmak üzere, kendi hamlesi sonucunda durumu (a, a, b) haline getiren oyuncu her zaman kendi hamlesi sonucunda durumu yine benzer hale getirerek oyunu kazanmayı garantileyebilir. Sonuç olarak birinci oyuncu oyunu $(9, 10, 31)$, $(8, 16, 24)$ ve $(9, 22, 22)$ durumlarında kazanmayı garantileyebilir.

29. Bir kenar uzunluğu 50 olan $ABCD$ karesinin iç bölgesinde bir Γ çemberi çiziliyor. A ve B den Γ çemberine çizilen teğetlerin uzunlukları 40, C den

Γ çemberine çizilen teğetin uzunluğu 30 ise, Γ çemberinin yarıçapı kaçtır?

a) 4 b) 5 c) 6 d) 7 e) Hiçbiri

Cevap: 7. Γ çemberinin merkezi O, yarıçapı R olsun. A ve B noktalarını Γ çemberine göre kuvvetinden $|OA|^2 = R^2+40^2 = |OB|^2$ olup, O noktası $[AB]$ nin orta dikmesi üzerindedir. Yine kuvvetten $|OC|^2 = R^2 + 30^2$ olduğunu biliyoruz. O dan BC ye inen dikme ayağına E dersek, $|OE| = 50/2 = 25$ buluruz. Pisagor teoreminden $|OB|^2 - |BE|^2 = 625 = |OC|^2 - |CE|^2$ dir. Dolayısıyla,

$$R^2 + 1600 - |BE|^2 = 625 = R^2 + 900 - |CE|^2$$

ve $|BE| + |CE| = 50$ buluruz. Buradan,

$$|BE| - |CE| = \frac{|BE|^2 - |CE|^2}{|BE| + |CE|} = \frac{700}{50} = 14$$

olup $|BE| = 32$ ve $|CE| = 18$ buluruz. Dolayısıyla

$$R^2 = \frac{(|BE|^2 + |CE|^2) - (1600 + 900)}{2} + 625 = 49$$

olup $R = 7$ olur.

30. $1^1 + 2^2 + 3^3 + 4^4 + \cdots + (31!)^{(31!)}$ sayısının 31 ile bölümünden kalan nedir?

a) 0 b) 1 c) 15 d) 16 e) 30

Cevap: 30. Bir p asalı için çözelim, her ardışık $p^2 - p$ terimde alt tarafın (mod p) değeri ve üst tarafın (mod $p - 1$) değeri olası tüm ikilileri tarayacaktır. $1+a+\dots a^{p-2}$ toplamı da $a = 1$ için -1, kalan tüm değerlerde 0 olacağı için her ardışık $p^2 - p$ terimin toplamı (mod p)'de -1 olacaktır. $p! = (p^2 - p)(p - 2)!$ olduğu için de tüm toplamın (mod p)'deki değeri $-(p - 2)! \equiv -1$ olacaktır.

31.

$$(xy + 2)^2 + 10(x + y) + 21 = 2(x^3 + y^3) + 5(x^2 + y^2)$$

eşitliğini sağlayan x ve y gerçel sayıları için, $x^2 + y^2$ en az kaçtır?

a) 2 b) 3 c) 4 d) 5 e) Hiçbiri

Cevap: 4. Eşitliği düzenlediğimizde $(x^2 - 2y - 5)(y^2 - 2x - 5) = 0$ olur. Genelliği bozmadan $x^2 = 2y+5$ varsayalım, $x^2+y^2 = y^2+2y+5 = (y+1)^2+4$ bulunur. Dolayısıyla, $x^2 + y^2$ en az 4 olabilir. $x = \sqrt{3}$ ve $y = -1$ için eşitlik sağlanır.

32. 32×31 bir tahtanın tüm birim karelerine farklı birer gerçel sayı yazılmıştır. Bir birim karedeki sayı, bu birim kareyle en az bir ortak köşe paylaşan birim karelerdeki sayıların en fazla birinden küçükse bu birim kareye *özel* birim kare diyelim. Özel birim kare sayısı en fazla kaç olabilir?

a) 480 b) 488 c) 496 d) 505 e) 512

Cevap: 512. Birim karelerden oluşan her 2×2 karede en fazla iki özel birim kare olabilir. 32×30 tahtayı, herhangi ikisinin ortak birim karesi bulunmayan $16 \cdot 15 = 240$ tane 2×2 kareye ayıralım. Buna göre, en sağ sütun hariç tahtanın üzerinde en fazla $2 \cdot 16 \cdot 15 = 480$ tane ve bütün tahtanın üzerinde en fazla $480 + 32 = 512$ özel birim kare olabilir. Şimdi de 512 özel birim kare için bir örnek verelim. Tahtanın sütunlarını soldan sağa doğru numaralandıralım ve tek numaralı sütunların birim karelerine aşagıdan yukarıya doğru artan sırayla pozitif sayılar, kalan birim karelerin hepsine negatif sayılar yazalım. Bu durumda üzerinde pozitif sayı yazan $32 \cdot 16 = 512$ birim karenin her biri özel olur.