Türkiye Bilimsel ve Teknolojik Araştırma Kurumu

29. Ulusal Ortaokul Matematik Olimpiyatı
İkinci Aşama Sınavı

7 Ocak 2022

Çözümler

1.

$$\frac{3n^2}{m} \qquad \text{ve} \qquad \sqrt{n^2+m}$$

sayılarının her ikisinin tam sayı olmasını sağlayan tüm (m,n) pozitif tam sayı ikililerini bulunuz.

Çözüm: Cevap: $\{(3n^2,n) : n \text{ pozitif tam sayı}\}$.

$k = \dfrac{3n^2}{m}$ olmak üzere, $\sqrt{n^2+m} = \dfrac{n\sqrt{k+3}}{\sqrt{k}}$ ifadesi bir tam sayı olmalıdır. k de bir tam sayı olduğundan, bu ifadenin k katı da tam sayıdır. Dolayısıyla $n\sqrt{k(k+3)}$ bir tam sayı olmalıdır. k bir pozitif tam sayı ve $k(k+3)$ bir rasyonel sayının karesi olduğundan, $k(k+3)$ tam kare olmalıdır. $k>1$ ise,

$$(k+1)^2 = k^2+2k+1 < k^2+3k < k^2+4k+4 = (k+2)^2$$

olup, $k>1$ için $k(k+3)$ tam kare olamaz. $k=1$ ise, $\sqrt{n^2+m} = \sqrt{4n^2} = 2n$ bir tam sayıdır. Dolayısıyla $m=3n^2$ olacak şekildeki bütün (m,n) pozitif tam sayı ikilileri çözüm olur.

2. Satırları aşağıdan yukarıya, sütunları da soldan sağa $1,2,\dots,29$ sayılarıyla numaralandırılan 29×29 satranç tahtasının bazı birim kareleri işaretlenmiştir.

İşaretlenmiş her birim kare için, hem satır numarası bu birim karenin satır numarasından az olmayan, hem de sütun numarası bu birim karenin sütun numarasından az olmayan en çok bir tane daha işaretlenmiş birim kare vardır.

Buna göre tahtadaki işaretlenmiş birim kare sayısının alabileceği en büyük değeri bulunuz.

Çözüm: Cevap: 43.

Öncelikle, 43 işaretlenmiş birim kare için bir örnek verelim. a numaralı satır ve b numaralı sütunun kesişiminde bulunan birim kare (a,b) olarak gösterilsin. $k=1,2,\dots,14$ olmak üzere, $(2k-1, 31-2k), (2k, 31-2k), (2k, 30-2k)$ birim kareleri ve bunlara ek olarak $(29,1)$ birim karesi işaretlenirse, sorudaki koşullar sağlanır ve işaretlenmiş birim kare sayısı $3\cdot 14+1=43$ olur.

Şimdi işaretlenmiş birim kare sayısının daha fazla olamayacağını gösterelim. Koşullara göre, herhangi satır ya da sütunda 2 den fazla birim kare işaretlenemez. İşaretlenmiş birim kare sayısı 43 sayısından fazlaysa, $14\cdot 2+15=43$ olduğuna göre, ikişer işaretlenmiş birim kare bulunduran satır sayısı en az 15 olacaktır. $15\cdot 2>29$ olduğuna göre, bu durumda $a<b$ olmak üzere, ikişer işaretlenmiş birim kare içeren öyle a, b satırları ve c sütunu bulunacaktır ki, (a,c) ve (b,c) işaretlenmiş birim kareler olsun. a

satırının ikinci işaretlenmiş birim karesi (a, t) olmak üzere, $t < c$ durumunda (a, t), $t > c$ durumunda ise (a, c) birim karesi sorudaki koşulları sağlamıyor. İspat tamamlanmıştır.

3. x, y, z gerçel sayılar olmak üzere

$$x + y + z = 2, \qquad xy + yz + zx = 1$$

ise, $x - y$ nin alabileceği en büyük değeri bulunuz.

Çözüm: Cevap $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

Eşitlik $x = \dfrac{2+\sqrt{3}}{3}$, $y = \dfrac{2-\sqrt{3}}{3}$, $z = \dfrac{2}{3}$ iken sağlanır. $x - y \leq \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ olduğunu ispatlayalım.

Birinci Yol: Verilen eşitliklerden $x + y = 2 - z$, $xy = 1 - z(x + y) = 1 - z(2 - z) = (z - 1)^2$ elde ederiz. Buradan da $(x - y)^2 = (x + y)^2 - 4xy = (2 - z)^2 - 4(z - 1)^2 = z(4 - 3z)$ olur. Yani $|x - y| = \sqrt{z(4 - 3z)}$ olur. Aritmetik-Geometrik ortalama eşitsizliğinden $3z(4 - 3z) \leq 4$ olduğundan $x - y \leq |x - y| \leq \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ olur ve ispat biter.

İkinci Yol: Verilen eşitliklerden $(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2 = 2(x^2 + y^2 + z^2) - 2(xy + yz + zx) = 2(x + y + z)^2 - 6(xy + yz + zx) = 2$ elde ederiz. $a = x - y, b = y - z$ dersek $z - x = -a - b$ olur ve buradan da $a^2 + b^2 + (-a - b)^2 = 2$ ve $a^2 + ab + b^2 = 1$ buluruz. Bu denklemi b ye göre ikinci derece bir denklem gibi yazarsak $b^2 + ab + (a^2 - 1) = 0$ olur. Bu denklemin diskriminantı $a^2 - 4(a^2 - 1) = 4 - 3a^2$ dir. a, b gerçel sayılar olduğundan diskriminant negatif olamaz. Yani $4 - 3a^2 \geq 0$ ve buradan da $a \leq |a| \leq \dfrac{2}{\sqrt{3}}$ elde ederiz. Böylece ispat biter.

4. ABC eşkenar üçgen olmak üzere $[BC]$ doğru parçası üzerinde X noktası ve $[BA$ ve $[CA$ ışınları üzerinde sırasıyla Y ve Z noktaları AX, BY, CZ doğruları paralel olacak şekilde alınıyor. XY nin AC yi kestiği nokta M ve XZ nin AB yi kestiği nokta N olmak üzere, MN doğrusunun ABC nin iç teğet çemberine teğet olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $AX \parallel BZ$ olduğundan $\dfrac{AN}{NB} = \dfrac{AX}{BZ} = \dfrac{CX}{CB}$ dir. Benzer şekilde, $AX \parallel CY$ olduğundan $\dfrac{AM}{MC} = \dfrac{AX}{CY} = \dfrac{BX}{BC}$ elde ederiz. Dolayısıyla,

$$\frac{AN}{NB} + \frac{AM}{MC} = \frac{CX}{CB} + \frac{BX}{BC} = 1 \tag{1}$$

bulunur. Eşkenar üçgenin bir kenar uzunluğuna a dersek,

$$\frac{a^2}{NB \cdot MC} = \left(1 + \frac{AN}{NB}\right)\left(1 + \frac{AM}{MC}\right) = 2 + \frac{AN \cdot AM}{NB \cdot MC}$$

olur, buradan

$$AN \cdot AM = a^2 - 2 \cdot NB \cdot MC \tag{2}$$

elde ederiz. Şimdi, AMN üçgeninde Kosinüs teoreminden $MN^2 = AM^2 + AN^2 - AM \cdot AN$ dir, bu da (2)'den dolayı

$$\begin{aligned} MN^2 &= AM^2 + AN^2 - a^2 + 2 \cdot NB \cdot MC \\ &= (a - NB)^2 + (a - MC)^2 - a^2 + 2 \cdot NB \cdot MC \\ &= (NB + MC - a)^2 \end{aligned}$$

elde ederiz. Dolayısıyla, $MN = NB + MC - a$ olur (burada $NB + MC - a > 0$ olduğu (1)'den açıkça görülebilir). Son olarak $MN + BC = NB + MC$ olduğundan $MNBC$ teğetler dörtgenidir, ABC nin iç teğet çemberi $[NB]$, $[MC]$, $[BC]$ doğru parçalarına teğet olduğundan $[MN]$ ye de teğettir.

.