Türkiye Bilimsel ve Teknolojik Araştırma Kurumu

29. Ulusal Matematik Olimpiyatı
İkinci Aşama Sınavı

5-6 Ocak 2022

Çözümler

1. Başlangıçta masadaki iki kutudan biri boş olup, diğerinde farklı renkli 29 bilye bulunmaktadır. Dolu kutuyla başlamak ve kutulara sırayla hamle yapmak üzere her hamlede sırası gelen kutudan bir veya birkaç bilye seçilip diğer kutuya aktarılıyor. Aynı bilye öbeği bir defadan fazla seçilmeden en çok kaç hamle yapılabilir?

Çözüm: Cevap: $2^{29}-2$.

Toplam hamle sayısının $2^{29}-1$ olamayacağını gösterelim. Toplam hamle sayısı $2^{29}-1$ ise 29 elemanlı bilye kümesinin tüm boş olmayan alt kümeleri seçilmiştir. Bir bilyeyi içeren toplam hamle sayısı 2^{28} bir çift sayı olduğuna göre, tüm hamleler yapıldıktan sonra tüm bilyeler başlangıçtaki kutuda bulunacaklar. Diğer taraftan $2^{29}-1$ bir tek sayı olduğuna göre, en son hamleden sonra başlangıçta boş olan kutuda da bilye bulunması gerekiyor, çelişki. Şimdi, hamle sayısının $2^{29}-2$ olabileceğini gösterelim.

Birinci Yol: Öncelikle bir lemma kanıtlayacağız.

Lemma: Başlangıçta iki kutunun biri boş olup diğereinde farklı renkli $n>2$ bilye bulunsun. Sadece bir a bilyesini içeren 2^{n-1} hamlenin tamamı yapılarak yine başlangıç durumuna dönülebilir.

İspat: n üzerinden tümevarım yapacağız. Bilyeler $\{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n\}$ olsun.

$n=3$ durumunda gruplar sırasıyla $\{a_1, a_2\}, \{a_1\}, \{a_1, a_3\}, \{a_1, a_2, a_3\}$ olarak seçilirse koşullar sağlanmış olur. $n=k$ için lemma doğru olsun.

Önce tümevarım varsayımını kullanarak a_1 i içeren fakat a_2 yi içermeyen 2^{n-2} hamlenin tamamını yaparak başlangıç durumuna dönülebilir. Daha sonra yine tümevarım varsayımını kullanarak hem a_1 hem de a_2 yi içeren 2^{n-2} hamlenin tamamını yaparak başlangıç durumuna dönülebilir. Sonuç olarak a_1 bilyesini içeren 2^{n-1} hamlenin tamamı yapılmış olarak başlangıç durumuna dönülür, lemmanın ispatı tamamlanır.

Şimdi $2^{29}-2$ hamlenin yapılabileceğini gösterelim. Lemma'ya göre, önce a_1 i içeren tüm hamleler, sonra a_1 i içermeyen ve a_2 yi içeren tüm hamleler, sonra a_1, a_2 yi içermeyen ve a_3 ü içeren tüm hamleler,..., sonra $a_1, a_2, ..., a_{26}$ yı içermeyen ve a_{27} yi içeren tüm hamleler yapılabilir. Bundan sonra gruplar $\{a_{28}, a_{29}\}$ ve $\{a_{28}\}$ olarak seçilirse, olası $2^{29}-1$ hamleden $\{a_{29}\}$ dışındaki tamamı yapılmış olur.

İkinci Yol: n üzerinden tümevarım yaparak her $n \geq 2$ için, yapılmayan tek hamle $\{a_1\}$, tüm hamleler yapıldıktan sonra a_1 bilyesinin başlangıçta boş olan kutuda, diğer bilyelerin ise başlangıçta bulundukları kutuda olacak şekilde $2^n - 2$ hamle yapılabileceğini gösterelim.

$n = 2$ durumunda gruplar sırasıyla $\{a_1, a_2\}, \{a_2\}$ olarak seçilirse koşullar sağlanmış olur.

$n = k$ durumunda hamlelerin yapılabileceğini varsayalım. $n = k + 1$ durumunda ilk olarak a_{k+1} bilyesini ayırıp kalan bilyelere $n = k$ durumundaki $2^k - 2$ hamleyi yapalım ve sonra a_{k+1} bilyesini diğer kutuya aktaralım. Bundan sonra tümevarım varsayımına göre a_{k+1} ile aynı kutuda sadece a_1 bilyesi bulunacaktır. a_1 ve a_{k+1} bilyelerini aynı anda başlangıç kutusuna aktarırsak tüm bilyeler başlangıçtaki kutuda bulunmuş olur. Son olarak $n = k$ durumundaki $2^k - 2$ hamleyi her hamleye a_{k+1} bilyesini ekleyerek uygularsak $2^k - 2 + 2 + 2^k - 2 = 2^{k+1} - 2$ hamle yapılmış olur.

2. Derecesi d olan gerçel katsayılı bir polinomun en az d adet katsayısı 1'e eşit olup d adet gerçel kökü varsa d nin alabileceği en büyük değer nedir?

(Not: Polinomun kökleri birbirinden farklı olmak zorunda değildir.)

Çözüm: Cevap 4.

$x^4 + x^3 - 4x^2 + x + 1 = (x - 1)^2(x^2 + 3x + 1)$ polinomu şartları sağlar. $d \geq 5$ için şartları sağlayan bir polinomun bulunmadığını gösterelim.

Birinci Yol: $x_1, x_2, \ldots, x_d$ kökler, S_k sayısı da köklerin k-li çarpımları toplamı olsun. Vieta teoremi kullanılarak

$$S_1^2 - 2S_2 = \sum_{i=1}^{d} x_i^2 \geq 0$$

olduğundan polinomun ilk üç katsayısı 1 iken $S_1 = -1, S_2 = 1$ ve $S_1^2 - 2S_2 = -1 < 0$ çelişkisi elde edilir. Yani ilk üç katsayıdan biri 1 den farklı olmalıdır. Bu durumda köklerin hiçbiri 0 değildir ve aşağıdaki eşitlik yazılabilir:

$$\left(\frac{S_{d-1}}{S_d}\right)^2 - 2\left(\frac{S_{d-2}}{S_d}\right) = \sum_{i=1}^{d} \frac{1}{x_i^2} > 0.$$

Son üç katsayı 1 ise $S_{d-2} = -S_{d-1} = S_d$ ve buradan da $\left(\frac{S_{d-1}}{S_d}\right)^2 < 2\left(\frac{S_{d-2}}{S_d}\right)$ çelişkisini elde ederiz.

$d \geq 5$ için polinomun $d + 1$ katsayısından d tanesi 1 olduğundan ya ilk üç ya da son üç katsayı 1 olmalıdır. Böylece ispat biter.

İkinci Yol: $0 \leq b \leq d$ bir tam sayı ve a bir gerçel sayı olmak üzere polinomu $P(x) = x^d + x^{d-1} + \cdots + 1 + ax^b$ olarak yazabiliriz. P nin tüm kökleri gerçel olduğundan $Q(x) = (x - 1)P(x) = x^{d+1} - 1 + ax^{b+1} - ax^b$ polinomunun da tüm kökleri gerçel olur. Öncelikle sıfır bir kök ise $a = -1, b = 0$ olur ve $Q(x) = x^{d+1} - x$ polinomunun tüm kökleri gerçel olamaz.

$Q(x)$ polinomu en çok 4 tane katsayısı sıfırdan farklı olan bir polinomdur. Descartes işaret değişim teoreminden dolayı Q polinomunun en fazla 3 tane pozitif gerçel kökü olabilir. $Q(-x) = (-1)^{d+1}x^{d+1} - 1 + a(-1)^{b+1}(x^{b+1} + x^b)$ polinomunun da en çok 4 tane katsayısı sıfırdan farklıdır. Tam olarak 4 tane sıfırdan farklı katsayı varsa x^{b+1} ve x^b terimlerine ait ardışık iki katsayı aynı işaretlidir. Aksi halde en çok 3 tane sıfırdan farklı katsayı olur. Bu yüzden her iki durumda yine Descartes işaret değişim teoreminden $Q(-x)$ polinomunun en çok 2 tane pozitif gerçel kökü olabilir.

Sıfır kök olmadığından $Q(x)$ polinomunun en çok 5 tane gerçel kökü olabilir. $Q(x)$ polinomunun derecesi $d+1 \geq 6$ olduğundan tüm kökler gerçel olamaz. Böylece ispat biter.

3. Γ çemberi ABC üçgeninin BC kenarına X noktasında, AC kenarına ise Y noktasında teğettir. AB kenarı üzerindeki bir P noktası için XP ve YP nin Γ ile ikinci kesişimleri sırasıyla K ve L, AK ve BL nin Γ ile ikinci kesişimleri sırasıyla R ve S olsun. XR ve YS nin AB üzerinde kesiştiğini gösteriniz.

Çözüm: $T = XY \cap AB$ diyelim. $YYLRKX$'de Pascal Teoremi'nden

$$A = YY \cap KR, \quad P = YL \cap XK, \quad LR \cap XY$$

nin doğrudaş olduğu görülür, yani $LR \cap XY = AP \cap XY = T$ dir. Şimdi $XXRLSY$'de Pascal Teoremi'nden

$$B = XX \cap LS, \quad YS \cap XR, \quad T = LR \cap XY$$

nin doğrudaş olduğu görülür, yani XR ile YS doğruları BT üzerinde, yani AB üzerinde kesişir.

4. Dar açılı bir ABC üçgeninde $D \in [AC]$ ve $E \in [AB]$ olmak üzere $[BD]$ ve $[CE]$ açıortaylardır. D den BC ve BA ya indirilen dikmelerin ayakları sırasıyla P ve Q, E den CA ve CB ye indirilen dikmelerin ayakları sırasıyla R ve S olsun. AP ile CQ nun kesişimi X, AS ile BR nin kesişimi Y, BX ile CY nin kesişimi Z olmak üzere $AZ \perp BC$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm 1: B noktasından AC ye inen dikme ayağına H diyelim. B, P, Q, H, D noktaları $[BD]$ çaplı çember üzerinde yer aldığından

$$\widehat{PHB} = \widehat{PDB} = 90^\circ - \frac{\widehat{B}}{2} = \widehat{QDB} = \widehat{QHB}$$

elde ederiz. $BH \perp AC$ ve $\widehat{PHB} = \widehat{QHB}$ ise AP, CQ, BH doğrularının noktadaş olduğunu göstereceğiz. B den AC ye çizilen paralel doğrunun PH ve CH doğruları ile kesişimlerine sırasıyla K ve L diyelim. $BH \perp AC$ ve $\widehat{PHB} = \widehat{QHB}$ olduğundan, $HB \perp KL$ ve $\widehat{KHB} = \widehat{LHB}$ buluruz. Dolayısıyla, $|KB| = |LB|$ elde ederiz.

$KL \parallel AC$ kullanılarak, kelebek benzerliğinden $\dfrac{|KB|}{|CH|} = \dfrac{|BP|}{|PC|}$ ve $\dfrac{|LB|}{|AH|} = \dfrac{|BQ|}{|QA|}$ olur. $|KB| = |LB|$ olduğundan, $\dfrac{|AH|}{|CH|}\dfrac{|PC|}{|BP|}\dfrac{|BQ|}{|AQ|} = 1$ olur. ABC üçgeninde Seva teoreminden AP, CQ, BH noktadaş olur. Buradan $X \in BH$ olup, $BX \perp AC$ elde ederiz. Şekil simetrik olduğundan, aynı şekilde $CY \perp AB$ bulunur. Dolayısıyla, BX ve CY nin kesişimi olan Z noktası ABC üçgeninin diklik merkezi olur, ispat biter.

Çözüm 2: BX ile AC nin kesişimine T noktası diyelim. ABC üçgeninde Seva teoreminden $\dfrac{|AT|}{|TC|} = \dfrac{|BP||AQ|}{|PC||QB|}$ elde ederiz. $[BD]$ açıortay olduğundan, $|BP| = |BQ|$ ve $|DP| = |DQ|$ olduğu açıktır. Dolayısıyla $\dfrac{|AT|}{|TC|} = \dfrac{|AQ|}{|PC|}$ bulunur. AQD ve DPC üçgenlerinde Sinüs teoremlerinden $\dfrac{|AQ|}{|DQ|} = \cot \widehat{A}$ ve $\dfrac{|PC|}{|DP|} = \cot \widehat{C}$ olup, $|DP| = |DQ|$ kullanılarak

$$\frac{|AT|}{|TC|} = \frac{|AQ|}{|PC|} = \frac{\cot \widehat{A}}{\cot \widehat{C}}$$

buluruz. B den AC ye inen dikme ayağına H dersek, AHB ve CHB üçgenlerinde Sinüs teoremlerinden $\dfrac{|AH|}{|BH|} = \cot\widehat{A}$ ve $\dfrac{|CH|}{|HB|} = \cot\widehat{C}$ dir. Dolayısıyla $\dfrac{|AH|}{|HC|} = \dfrac{\cot\widehat{A}}{\cot\widehat{C}} = \dfrac{|AT|}{|TC|}$ elde ederiz, bu da $H = T$ olduğunu gösterir. Yani, $BX \perp AC$ bulunur. İlk çözümdeki gibi, ispat tamamlanır.

5. a, b, c, d pozitif tam sayıları için

$$\{a \cdot b^n + c \cdot d^n \;:\; n = 1, 2, 3, \ldots\}$$

kümesinin en az bir elemanını bölen asal sayılar sonlu çoklukta ise $b = d$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $x_n = a \cdot b^n + c \cdot d^n$ olsun. obeb$(a, c) = e$ ve obeb$(b, d) = f$ olsun. O halde $a = ea_1, c = ec_1$, $b = fb_1, d = fd_1$, obeb$(a_1, c_1) = 1$ ve obeb$(b_1, d_1) = 1$ olur. O zaman $y_n = a_1 \cdot b_1^n + c_1 \cdot d_1^n$ olmak üzere, $(y_n)_{n\geq 1}$ dizisinin en az bir elemanını bölen asalların kümesi P olsun. O halde P kümesi de sonludur. $b_1 = d_1 = 1$ olduğunu göstereceğiz ve ispat biter.

$$\begin{aligned} P_{ad} &= \{p \in P : \; p|a_1d_!\}, \\ P_{bc} &= \{p \in P : \; p|b_1c_1\}, \\ P_{a+c} &= \{p \in P : \; p|a_1 + c_1\}, \\ P_0 &= \{p \in P : \; p \nmid a_1b_1c_1d_1 \text{ ve } p \nmid a_1 + c_1\} \end{aligned}$$

olsun. $P = P_{ad} \cup P_{bc} \cup P_{a+c} \cup P_0$ olduğu kolayca görülür.

Bir $p \in P_{ad}$ ele alalım. $p|a_1$ ise, $p|c_1 \cdot d_1^n$ ve dolayısıyla $p|d_1$ elde edilir. Benzer şekilde $p|d_1$ ise de $p|a_1$ olmalı. O zaman yeterince büyük her n için $v_p(y_n) = v_p(a_1)$ olur.

Benzer şekilde $p \in P_{bc}$ olmak üzere, yeterince büyük her n için $v_p(y_n) = v_p(c_1)$ olur.

$p \in P_{a+c}$ olsun. O zaman $p \nmid b_1d_1$. $v_p(a_1 + c_1) = \alpha$ olsun. O zaman Euler Teoreminden dolayı her $\phi(p^{\alpha+1}) = p^\alpha(p-1)|n$ için

$$y_n = a_1 \cdot b_1^n + c_1 \cdot d_1^n \equiv a_1 + c_1 \pmod{p^{\alpha+1}}$$

olur ve dolayısıyla $v_p(y_n) = \alpha = v_p(a_1 + c_1)$ bulunur.

Son olarak $p \in P_0$ olsun. Bu durumda Fermat Teoreminden dolayı her $p - 1|n$ için

$$y_n = a_1 \cdot b_1^n + c_1 \cdot d_1^n \equiv a_1 + c_1 \pmod{p}$$

bulunur ve sonuç olarak $p \nmid y_n$ olur.

Sonuç olarak yeterince büyük her k pozitif tam sayısı için

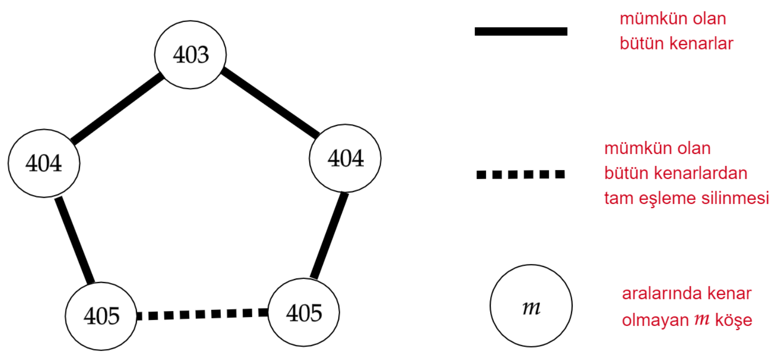
$$n = k \cdot \prod_{p \in P_{a+c}} (p-1)p^{v_p(a_1+c_1)} \cdot \prod_{p \in P_0} p - 1$$

olmak üzere, y_n'nin her q asal böleni için $v_q(y_n)$ üstten sabit bir sınıra sahiptir. Ancak bu dört küme de sonlu olduğundan y_n sayısının da üstten sabit bir sınırı olmalı. Bu da ancak $b_1 = d_1 = 1$ iken sağlanabilir. Sonuç olarak $b = d$'dir.

6. 2021 öğrencinin bulunduğu bir okulda her öğrencinin tam olarak k arkadaşı olup üçü de birbiriyle arkadaş olan üç öğrenci bulunmuyorsa, k nin alabileceği en büyük değer nedir?

Çözüm: Cevap: 808.

2021 köşeli k-düzenli bir G çizgesinde üçgen yoksa k nin alabileceği en büyük değeri arıyoruz. $k = 808$ için aşağıdaki gibi bir örnek kurabiliriz.



Şimdi $k \leq 808$ olduğunu ispatlayacağız. Öncelikle çizgemiz bipartite olsaydı, $G = (A, B)$ yazarsak $|A|k = |B|k$ olacağından $|A| = |B|$ elde ederdik, 2021 tek sayı olduğundan çelişki gelir. G bipartite değilse, G de tek sayıda köşe içeren bir döngü vardır. Bu döngülerden en küçüğü C olsun ve $|C| = 2t + 1$ diyelim. G de üçgen olmadığından $t \geq 2$ olduğunu biliyoruz. Diğer taraftan, $G - C$ deki herhangi bir v köşesini alalım, v nin C de en fazla iki komşusu olabileceğini ispatlayalım.

Varsayalım ki, $a, b, c \in C$ (saat yönünde) köşeleri v ile bağlı olsun. n_{ab}, n_{bc}, n_{ca} ile sırasıyla C döngüsünde (a, b), (b, c), (c, a) arasındaki köşelerin sayısını gösterelim. G de üçgen olmadığından $n_{ab}, n_{bc}, n_{ca} \geq 1$ olduğunu biliyoruz. $n_{ab} + n_{bc} + n_{ca} = 2t - 2$ olduğundan, bu üç sayıdan en az birisi çifttir, genelliği bozmadan n_{ab} çift olsun. (a, b) yayı ve v yi düşünürsek, uzunluğu $n_{ab} + 3$ olan bir döngü elde ederiz. $n_{ab} + 3$ sayısı tek olduğundan $n_{ab} + 3 \geq 2t + 1$ buluruz, bu da $n_{ab} \geq 2t - 2$ demektir. Dolayısıyla $n_{bc} + n_{ca} = 0$ olup, çelişki elde ederiz.

G çizgesinde C ile $G - C$ arasındaki kenarlara bakalım. C deki her köşenin k tane komşusu olduğundan, C ile $G - C$ arasında $(k - 2)(2t + 1)$ kenar olmalıdır. Diğer taraftan, $G - C$ deki her köşenin C de en fazla iki komşusu olduğunu göstermiştik, dolayısıyla

$$2(2020 - 2t) \geq (k - 2)(2t + 1) \implies 4042 \geq k(2t + 1)$$

elde ederiz. $t \geq 2$ olduğundan $k \leq 808$ bulunur.