

## Kuvvetle Bağlı Izgara - Çözüm

Problemın çözümüne değinmeden önce birtakım kritik gözlemler üzerinde duralım:

- Eğer bir ızgara kuvvetle bağlı ise aynı satır veya sütunda bulunan iki boyalı hücre arasında boyanmamış hücre bulunmamalıdır. Bu da demektir ki her satır ve sütundaki boyalı hücreler ardışık olmalı ve birer segment oluşturmalıdır.
- Eğer satırların üzerinde oluşan segmentlere odaklanırsak, bu segmentlerin birbirini tamamen içermesi gerekmektedir. Diğer bir şekilde eğer iki satırda  $l1 - r1$  ve  $l2 - r2$  segmentleri bulunmaktaysa  $l1 \leq l2 \leq r2 \leq r1$  veya  $l2 \leq l1 \leq r1 \leq r2$  olmalıdır. Aksi bir durumda segmentler ya bağlı olmayacaktır ya da iki segmentin bazı uçları arasındaki ulaşım en az 2 defa yön değiştirme gerektirecekti.
- Yukarıdaki gözlemin bir diğer eşleniği: eğer tüm segmentler  $l$  değerlerine göre küçükten büyüğe sıralanırsa, denk gelen  $r$  değerleri artmayan sırada olmalıdır.
- Eğer üstteki gözlemlere dayanan bilgileri her değişim için hızlı bir şekilde güncelleyebilirsek her boyama işlemi sonrası ızgaranın kuvvetli bir biçimde bağlı olup olmadığını bilebiliriz.

İlk gözlem hakkındaki bilgilerimizi güncellemek adına her satır/sütunda o ana kadar boyanmış en uçlarda bulunan hücrelerin konumlarını ve o satır/sütunda kaç adet hücrenin boyandığını tutabiliriz. Eğer o satır/sütunda bulunan hücrelerin sayısı en uçlarda bulunan hücrelerin arasındaki hücrelerin sayısına eşitse o satır/sütun ilk gözlemdeki şartı sağlamış bulunur. Eğer tüm satırlar bu şartı sağlıyorsa diğer gözlemlerdeki bilgileri kontrol edebiliriz.

Artık tüm satırlardaki boyalı hücreler birer segment oluşturduğuna göre tek yapılması gereken ikinci gözlemdeki şartın sağlanıp sağlanmadığını kontrol etmek olacaktır. Bunun içinse üçüncü gözlemdeki ipucunu kullanacağız. Güncellemeler boyunca bir multiset tutacağız. Bu multiset'te tüm satırlar veya sütunlar için (hatta eğer  $N \leq M$  ise satırlar değilse sütunlar için) o satır/sütunda bulunan en uçtaki hücreleri bir pair şeklinde saklayacağız. Bunun yanında multiset'te ardışık denk gelen pair'ların kaç tanesinin ikinci gözlemi ihlal ettiğini de bir değişkende saklayacağız (mesela değişken adı *bad* olsun). Ardından herhangi bir güncelleme geldiğinde ilgili pair'ı multiset'te bulup silmeden önce *bad* değişkenini güncelleyeceğiz. Bunu yaparken de silinecek pair'ın solundaki veya sağındaki pair'la olan ilişkisi ikinci gözlemi ihlal ediyorsa *bad* değişkeninden 1 çıkaracağız. Bu pair'ı multisetten sildiğimizde ise artık yan yana bulunan ve öncesinde ise silinen pair'ın sol ve sağında bulunan pair'ların ilişkisine göre de *bad* değişkenine 1 ekleyeceğiz veya eklemeyeceğiz. İlgili pair multiset'ten silindikten sonra o pair'ın güncel halini multiset'e ekleyeceğiz. Bunu da silme işlemindeki prensiplere benzer bir şekilde yaparak *bad* değişkenini güncelleyeceğiz. En sonunda ise eğer *bad* değişkeni 0'dan büyükse o zaman ızgara kuvvetle bağlı olmayacak. Değilse de kuvvetle bağlı olacak.

Bu çözümün zaman karmaşıklığı:  $O(N * M * \log(\min(N, M)))$  olarak hesaplanabilir.

Bonus: bu soruyu  $O(N * M)$  zaman karmaşıklığında çözebilir misiniz?