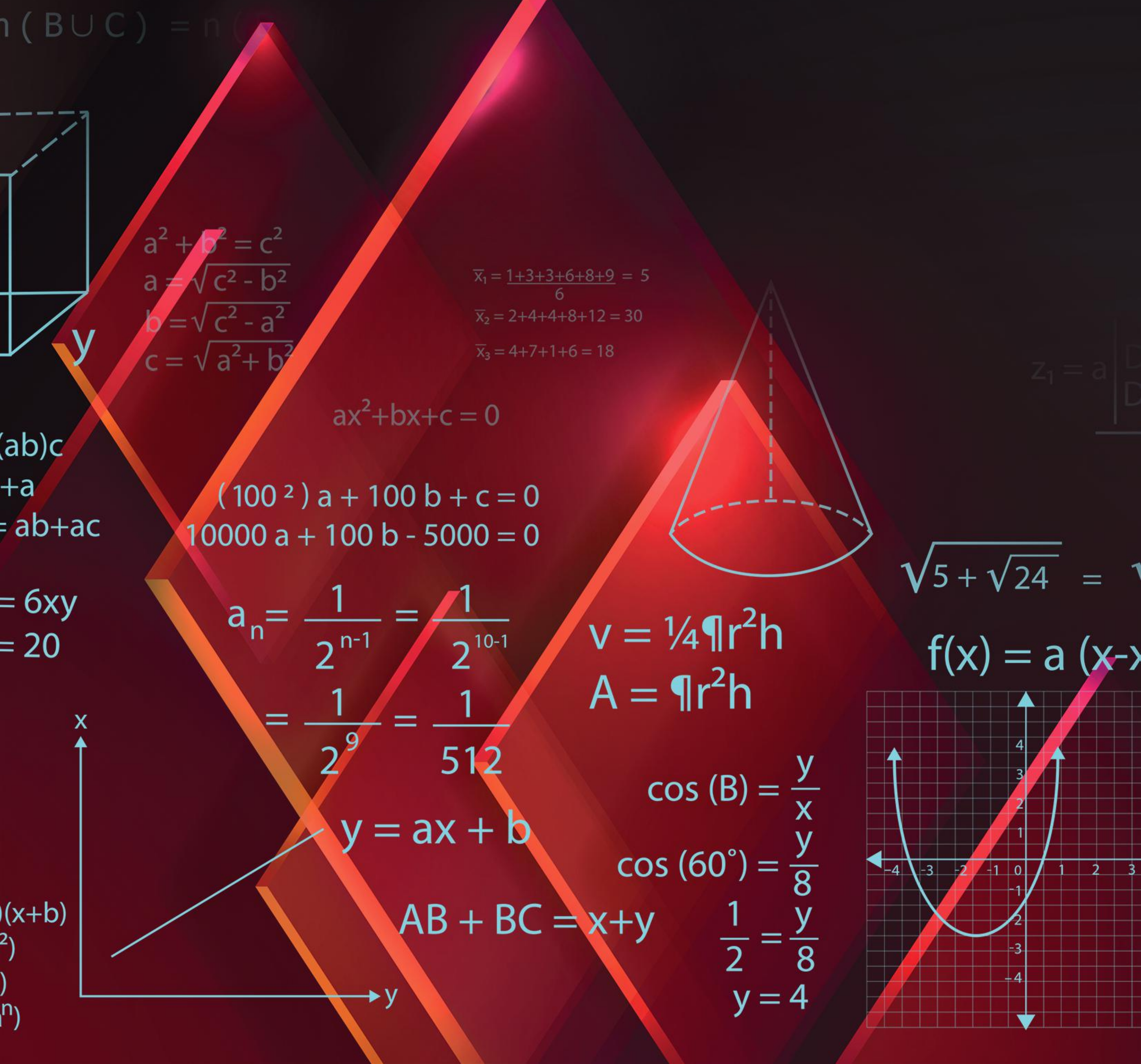
TÜBİTAK

Türkiye Cumhuriyeti
SANAYİ VE TEKNOLOJİ BAKANLIĞI

MATEMATİK

22. ULUSAL
MATEMATİK OLİMPİYATI
BİRİNCİ AŞAMA SINAV
SORU VE ÇÖZÜMLERİ

2014



TÜRKİYE BİLİMSEL VE TEKNOLOJİK ARAŞTIRMA KURUMU
BİLİM İNSANI DESTEK PROGRAMLARI BAŞKANLIĞI

ULUSAL MATEMATİK OLİMPİYATLARI SORU ve ÇÖZÜMLERİ

Ankara

Nisan 2019

1. Dışbükey bir $ABCD$ dörtgeninde $m(\widehat{DAB}) = m(\widehat{CBD}) = 120°$, $|AB| = 2$, $|AD| = 4$ ve $|BC| = |BD|$ dir. C noktasından geçen ve AB ye paralel olan doğru AD doğrusunu E noktasında kesiyor ise, $|CE|$ nedir?

Cevap:8. $m(\widehat{DBA}) = \alpha$ olsun. ABD üçgenine bakıldığında $\alpha > 30°$ olduğu görülür. Bundaan dolayı C den geçen ve AB ye paaralel olan doğru $[AD]$ doğru parçası ile kesişir. CE nin DB ile kesişimmi F olsun. Paralellikten $m(\widehat{BFC}) = \alpha$ olur. DAB de Kosinüs teoreminden $|BD| = 2\sqrt{7} = |BC|$ gelir. $BAD \sim FBC$ (A.A.A.). Buradan da $|FB| = \sqrt{7}$ ve $|FC| = 7$ bulunur. O halde $|DF| = \sqrt{7}$. EF ve AB paralel olduğundan $|EF| = 1$ elde edilir ve dolayısıyla $|EC| = |EF| + |FC| = 1 + 7 = 8$ olduğu görülür.

2. $mn + n + 14 = (m-1)^2$ eşitliğini sağlayan kaç (m, n) tam sayı ikilisi vardır?

Cevap: 8. Eşitliğin her iki tarafından 4 çıkarılırsa $n(m+1) + 10 = (m-1)^2 - 4 = (m+1)(m-3)$ elde edilir. Buradan da $(m+1)(m-3-n) = 10$ bulunur. 10 un 8 böleninden herhangi birinin 1 eksiği m olarak alındığında n sayısı da tek türlü bulunur.

3. Kaç n tam sayısı için, $|x^2 - 4x - 7| = n$ eşitliğini sağlayan dört farklı x gerçel sayısı vardır?

Cevap: 10. Öncelikle n bir sayının mutlak değerine eşit olduğu için negatif sayı olamaz. Verilen eşitlik $x^2 - 4x - 7 = \pm n$ ye denktir. Bu denklem de $(x-2)^2 = 11 \pm n$ olmasıdır. Dört farklı x gerçel sayısının kök olması için yeter ve gerek şart $11 - n$ ve $11 + n$ nin farklı pozitif sayılar olmasıdır. Dolayısıyla n nin alabileceği değerler $1, 2, \ldots, 10$.

4. 3 kırmızı, 2 beyaz ve 2 mavi top rastgele sıraya dizildiğinde iki beyaz topun veya iki mavi topun yan yana gelme olasılığı nedir?

Cevap: $\frac{10}{21}$. İki beyaz topun yan yana gelme olasılığı $\frac{2 \cdot 6!}{7!} = \frac{2}{7}$. Benzer biçimde iki mavi topun yan yana gelme olasılığı da $\frac{2}{7}$ dir. Bu iki olasılığın toplamından hem mavi topların yan yana hem de beyaz topların yan yana gelme olasılığını çıkarmalıyız. Bu olasılık ise $\frac{2 \cdot 2 \cdot 5!}{7!} = \frac{2}{21}$ dir. Dolayısıyla cevap $2 \cdot \frac{2}{7} - \frac{2}{21} = \frac{10}{21}$.

5. D, $|AB| = |AC|$ olan bir ABC ikizkenar üçgeninin $[BC]$ kenarı üstünde $|BD| = 6$ ve $|DC| = 10$ koşullarını sağlayan bir nokta olmak üzere, ABD ve ADC üçgenlerinin iç teğet çemberlerinin $[AD]$ kenarına değme noktaları sırasıyla, E ve F ise, $|EF|$ nedir?

Cevap: 2. $|DF| = \frac{|DA|+|DC|-|AC|}{2}$, $|DE| = \frac{|DA|+|DB|-|AB|}{2}$ ve $|AB| = |AC|$ olduğundan $|EF| = |DF| - |DE| = \frac{|DC|-|DB|}{2} = \frac{10-6}{2} = 2$ elde edilir.

6. Ondalık yazılımında tüm rakamları çift olan pozitif tam sayılar artan sırayla

$$2, 4, 6, 8, 20, 22, 24, 26, 28, 40, 42, \ldots$$

biçiminde yazıldığında 2014. sayı nedir?

Cevap: 62048. Bu dizinin n-inci teriminin yarısı ile, n sayısının 5-lik tabandaki yazılımı aynı basamak değerlerine sahiptirler. $2014 = (31024)_5$ olduğundan dizinin 2014-üncü terimi $2 \cdot 31024 = 62048$ dir.

7. x ve y gerçel sayıları için $(x^2 + 1)(y^2 + 1) + 9 = 6(x + y)$ ise, $x^2 + y^2$ nedir?

Cevap: 7. Verilen ifade açılıp, $2xy$ ekleyip çıkarılp, ifade tekrar toparlandığında $(x + y - 3)^2 + (xy - 1)^2 = 0$ elde edilir. Dolayısıyla $x + y = 3$ ve $xy = 1$ bulunur. Buradan da $x^2 + y^2 = 3^2 - 2 \cdot 1 = 7$ olduğu görülür.

8. 17 özdeş kırmızı ve 10 özdeş beyaz top 4 farklı kutuya, her kutudaki kırmızı topların sayısı beyaz topların sayısından daha fazla olacak biçimde kaç farklı şekilde dağıtılabilir?

Cevap: 5720. Her bir beyaz topu bir kırmızı top ile gruplayalım. Oluşan 10 özdeş grubu 4 farklı kutuya dağıtalım. Kalan 7 kırmızı özdeş topu da her kutuda en az bir tane olacak şekilde dağıtalım. Bu şekilde her kutudaki kırmızı top sayısı byaz top sayısından daha fazla olur. 10 özdeş grubun 4 kutuya dağıtılması $\binom{13}{3}$ farklı şekilde olabilir. 7 özdeş kırmızı top ise 4 kutuya her kutuda en az bir tane bulunacak şekilde $\binom{6}{3}$ farklı biçimde dağıtılabilir. Dolayısıyla cevap $\binom{13}{3}\binom{6}{3} = 286 \cdot 20 = 5720$.

9. D, bir ABC üçgeninin $[BC]$ kenarı üstünde $|AB| = 3$, $|CD| = 1$ ve $|AC| = |BD| = \sqrt{5}$ koşullarını sağlayan bir nokta olmak üzere; B köşesine ait yükseklik AD doğrusunu E noktasında kesiyor ise, $|CE|$ nedir?

Cevap: $\frac{3}{2}$. $|AB|^2 - |BD|^2 = 9 - 5 = 4 = 5 - 1 = |AC|^2 - |CD|^2$ olduğundan $AD \perp BC$ elde edilir. O zaman $|AD| = 2$ ve E nin ABC nin ortosantırı olduğu görülür. O halde $BAD \sim ECD$ olur ve buradaki benzerliikten $|EC| = \frac{3}{2}$ bulunur.

10. $m^3 - n^3 = 9^k + 123$ eşitliğini sağlayan kaç (m, n, k) negatif olmayan tam sayı üçlüsü vardır?

Cevap: 1. $k \geq 1$ ise, eşitliği (mod 9) da inceleyelim. Eşitlikte sağ taraf (mod 9) da 6 ya denktir. Bir tam sayının kübü (mod 0) da $-1, 0$ veya 1 değerini alabilir. Dolayısıyla eşitlikteki sol taraf (mod 9) da 6 değerini alamaz ve çelişki elde edilir. Demek ki $k = 0$ olmalı. $m^3 - n^3 = (m - n)(m^2 + mn + n^2) = 124 = 2 \cdot 2 \cdot 31$ eşitliği incelendiğinde tek çözümün $m = 5$ ve $n = 1$ olduğu görülür.

11. Sadece bir x gerçel sayısı için $x^2 + ax + 1$ ifadesinin negatif bir tam sayı değer almasını sağlayan a gerçel sayılarının çarpımı nedir?

Cevap: -8. Verilen özellik $y = x^2 + ax + 1$ in grafiği ile $y = -1$ doğrusunun tek bir noktada kesişmesine denktir. Dolayısıyla $x^2 + ax + 2 = 0$ ın çift katlı bir gerçel kökü olmalı. Kökler çarpımı 2 olduğundan bu kök $\sqrt{2}$ veya $-\sqrt{2}$ dir. Dolayısıyla a nın alabileceği değerler $2\sqrt{2}$ ve $-2\sqrt{2}$ dir.

12. 21 öğrenciden oluşan ve herhangi üç öğrencisinin en az ikisi arkadaş olan her sınıfta en az k arkadaşı olan bir öğrenci bulunuyorsa, k nin alabileceği en büyük değer nedir?

Cevap: 10. Sınıf, kendi aralarında arkadaş olan 10 kişilik G_1 grubundan, kendi aralarında arkadaş olan 9 kişilik G_2 grubundan ve A ve B öğrencilerinden oluşsun ve farklı gruplardaki öğrenicler kendi aralarında arkadaş olmasın. A ve B kendi aralarında arkadaş olmayıp, A öğrencisi G_1 grubundaki herkesle ve B öğrencisi G_2 grubundaki herkesle arkadaş olursa koşullar sağlanır ve en fazla arkadaşı olan öğrencinin arkadaş sayısı 10 olur. Şimdi her zaman 10 arkadaşı olan bir öğrencinin bulunacaği nı gösterelim. C ve D kendi aralarında arkadaş olmayan iki öğrenci olsun (böyle bir ikili bulunmazsa herkesin 20 arkadaşı olur). Koşulların sağlanması için C ve D dışındaki her öğrenci bu iki öğrencinin en az biriyle arkadaş olma zorundadır. Demek ki, C ve D öğrencilerinden en az birinin arkadaş sayısı en az 10 olacaktır.

13. $m(\widehat{ADB}) = 15^\circ$ ve $m(\widehat{BCD}) = 90^\circ$ olan dışbükey bir $ABCD$ dörtgeninin köşegenleri E noktasında dik olarak kesişiyor. P, $[AE]$ üstünde bir nokta olmak üzere, $|EC| = 4$, $|EA| = 8$ ve $|EP| = 2$ ise, $m(\widehat{PBD})$ nedir?

Cevap: 75°. BCD üçgeninde Öklid bağıntısından $|DE| \cdot |BE| = 16$ elde edilir. Dolayısıyla $\frac{8}{|DE|} = \frac{|BE|}{2}$, başka bir deyişle $\frac{|AE|}{|DE|} = \frac{|BE|}{|PE|}$ olduğu görülür. Buradan da $AED \sim BEP$ (K.A.K.) elde edilir ve $m(\widehat{PBD}) = m(\widehat{PBE}) = m(\widehat{DAE}) = 75^\circ$ olduğu görülür.

14. Kaç farklı p asal sayısı için, $p \mid n^3+3$ ve $p \mid n^5+5$ olacak biçimde bir n tam sayısı bulunur?

Cevap: 2. Şartı sağlayan asallar 2 ve 59 dur.
$n^3 \equiv -3 \pmod p$ olduğundan $-5 \equiv n^5 \equiv -3n^2 \pmod p$ ve buradan da $3n^2 \equiv 5 \pmod p$ olur. Yani $p \neq 3$ ve $n^2 \equiv 5/3 \pmod p$ dir. Buradan $-3 \equiv n^3 \equiv 5n/3 \pmod p$ ve $p \neq 5$ olacağından $n \equiv -9/5 \pmod p$ olur. Yani $(-9/5)^3 + 3 \equiv 0 \pmod p$ ve buradan da $354 \equiv 0 \pmod p$ olur. $354 = 2 \cdot 3 \cdot 59$ ve $p \neq 3$ olduğundan p sadece 2 ve 59 değerlerini alabilir.
$n = 1$ için $p = 2$ ve $n = 10$ için $p = 59$ sağlar.

15. $(2x^2 + 5x + 9)^2 = 56(x^3 + 1)$ eşitliğini sağlayan farklı x gerçel sayılarının toplamı nedir?

Cevap: $\frac{9}{2}$. $x + 1 = a$ ve $x^2 - x + 1 = b$ olsun. Verilen eşitlik $(2b + 7a)^2 = 56ab$ ye denktir. Buradan $(2b - 7a)^2 = 0$ elde edilir. Dolayısıyla $2b = 7a$ olduğu görülür. O halde $2x^2 - 2x + 2 = 7x + 7$. Bu eşitlik de $2x^2 - 9x - 5 = 0$ denklemine denktir. Bu eşitliği sağlayan iki gerçel sayı vardır ve toplamları $\frac{9}{2}$ dir.

16. Aslı 100 şekeri kardeşi ve kardeşinin 18 arkadaşı arasında dağıtacaktır. Bunun için, kardeşinin arkadaşlarını bir kaç gruba ayırıyor ve 100 şekeri bu gruplara dağıtıyor. Sonra her gruptaki çocuklar, kendilerine verilen şekerleri aralarında her biri eşit ve olabildiğince çok sayıda şeker alacak biçimde paylaşıp, kalan şekerleri de Aslı'nın kardeşine veriyorlar. Aslı'nın kardeşi en çok kaç şeker alabilir?

Cevap: 16. Bir grupta n kişi varsa Aslının kardeşi bu gruptan en fazla $n-1$ şeker alabilir. Grup sayisi k ise Aslının kardeşi toplamda en fazla $18 - k$ şeker alır. Aslı'nın kardeşinin 17 şeker alması için $k = 1$ olup, 18 sayısının $100 - 17 = 83$ sayısını tam bölmesi gerekiyor.

Aslı'nın kardeşi 16 şeker alabiliyor: Aslı birinci grubu 17 kişiden oluşturup bu gruba 33 şeker ve ikinci grubu 1 kişiden oluşturup bu gruba 67 şeker verirse, kardeşi 16 şeker alır.

17. Bir $ABCD$ karesinde $[AB]$ kenarının orta noktası E ve B noktasından geçen A merkezli çemberin $[EC]$ doğru parçası ile kesişim noktası F ise, $|EF|/|FC|$ nedir?

Cevap: $\dfrac{3}{2}$. $ABCD$ karesinin kenar uzunluğu 2 olsun. O zaman $|EB| = 1$ ve $|EC| = \sqrt{5}$ olur. CE ile DA'nın kesişimi G olsun. $AG \parallel BC$ ve $|AE| = |EB|$ olduğundan $AGE \cong BCE$ olduğu görülür. O halde $|AG| = 2$ olur ve bu da G noktasınnın B den geçen A merkezli çember üzerinde bulunduğunu gösterir. C noktasının bu çembere göre kuvveti $|CF| \cdot |CG| = |CA|^2 - |AB|^2$ dir. Buradan $|CF| = \frac{2}{\sqrt{5}}$ elde edilir. O zaman da $|EF| = \sqrt{5} - \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{3}{\sqrt{5}}$ elde edilir. Dolayısıyla $|EF|/|FC| = 3/2$ sonucuna varılır.

18. Aşağıdaki sayılardan hangisi x ve y tam sayılar olmak üzere, $x^2 + y^5$ biçiminde yazılamaz?

Cevap: 59121. Bir tam sayının karesi $(\bmod 11)$ de $0, 1, 3, 4, 5, 9$ değerlerinden birini alabilir. Bir tam sayının beşinci kuvveti ise $(\bmod 11)$ de $0, 1, -1$ değerlerinden birini alabilir. Dolayısıyla, x ve y tam sayılar olmak üzere, $x^2 + y^5$ sayısı $(\bmod 11)$ de 7 ye denk olamaz. Şıklarda $(\bmod 11)$ de 7 ye denk olan sadece 59121 dir ve diğer sayılar ise istenilen formda yazılabilir.

19. x pozitif bir gerçel sayı olmak üzere, $\dfrac{x^2 + 2x + 6}{x^2 + x + 5}$ ifadesinin alabileceği en büyük değer nedir?

Cevap: $\frac{2\sqrt{5}}{2\sqrt{5}-1}$. Aritmetik-Geometrik ortalama eşitsizliğinden $(x + 1) + \frac{5}{x+1} \geq 2\sqrt{5}$ elde edilir. O halde $\frac{x^2+x+5}{x+1} = x + \frac{5}{x+1} \geq 2\sqrt{5} - 1$ ve dolayısıyla $\frac{x^2+2x+6}{x^2+x+5} = 1 + \frac{x+1}{x^2+x+5} \leq 1 + \frac{1}{2\sqrt{5}-1} = \frac{2\sqrt{5}}{2\sqrt{5}-1}$ elde edillir. Eşitlik durumu $x = \sqrt{5} - 1$ iken sasağlanır.

20. Her biri 2 nin veya 3 ün tam sayı kuvveti olan tam sayılardan oluşan ve tüm elemanlarının toplamı 2014 olan kaç farklı küme vardır?

Cevap: 64. 1 i 2 nin kuvveti olareak ele alırsak, bu kümede yer alacak 3 ün kuvvetlerini belirledikten sonra geriye kalan 2 nin kuvvetleri tek türlü belli olur. Çünkü her pozitif tam sayı 2 nin farklı kuvvetleri toplamı şeklinde tek türlü yazılabilir. O halde $3^7 = 2187 > 2014$ olduğundan bu kümede 3 ün kuvveti olarak 3,9,27,81,243,729 sayıları yer alabilir. $3 + 9 + 27 + 81 + 243 + 729 < 2014$ olduğundan seçimi $2^6 = 64$ şekilde yapabiliriz.

21. $[AB]$ ve $[CD]$ kenarlarının $[BC]$ kenarına dik olduğu bir $ABCD$ yamuğunun $[BC]$ kenarı üstündeki bir E noktası için AED bir eşkenar üçgendir. $|AB| = 7$ ve $|CD| = 5$ ise, $ABCD$ yamuğunun alanı nedir?

Cevap: $24\sqrt{3}$. A dan CD doğrusuna inen dikme ayağı F olsun. O zaman $ABCF$ bir dikdörtgendir. $|AF| = x$ olsun. ADE eşkenar üçgen olduğundan, AFD, ABE ve ECD dik üçgenlerinde Pisagor teormi uygulamalarından $x = \sqrt{x^2 - 45} + \sqrt{x^2 - 21}$ elde edilir. $a = x^2 - 45$ alırsak $\sqrt{a + 45} = \sqrt{a} + \sqrt{a + 24}$ eşitliği elde edilir. Eşitlikte her iki tarafın karesini alıp eşitliği toparlarsak $21 - a = 2\sqrt{a^2 + 24a}$ gelir. Yine iki tarafın karesini alırsak $3(a^2 + 46a - 147) = 0$ bulunur. Bu denklemin kökleri 3 ve -49 dur. O halde $x^2 = 48$, $x = 4\sqrt{3}$ olduğu görülür. Dolayısıyla $ABCD$ yamuğunun alanının $\frac{7+5}{2} \cdot 4\sqrt{3} = 24\sqrt{3}$ olduğu görülür.

22. 2014^{2015} sayısının 121 ile bölümünden kalan kaçtır?

Cevap: 34. $2014 \equiv 1 \pmod{11}$ olduğundan $2014 = 11k+1$ olacak biçimde bir k tam sayısı bulunur. Bu durumda
$2014^{2015} = (11k+1)^{11k+2} = \sum_{i=0}^{11k+2} \binom{11k+2}{i} (11k)^i \equiv (11k+2) \cdot (11k) + 1 \equiv (11k+1)^2 \equiv$ $2014^2 \pmod{121}$ olur. $2014^2 \equiv 78^2 \equiv 34 \pmod{121}$ dir.

23. x bir gerçel sayı olmak üzere,

$$(x^2 + 2x + 8 - 4\sqrt{3}) \cdot (x^2 - 6x + 16 - 4\sqrt{3})$$

ifadesinin alabileceği en küçük değer nedir?

Cevap: $112 - 64\sqrt{3}$. Verilen ifade $((x+1)^2 + (2-\sqrt{3})^2) \cdot ((2-\sqrt{3})^2 + (3-x)^2)$ ne eşittir. Cauchy-Schwarz eşitsizliğinden bu ifadenin $\geq ((x+1)(2-\sqrt{3}) + (2-\sqrt{3})(3-x))^2 = (4(2-\sqrt{3}))^2 = 112 - 64\sqrt{3}$ olduğu görülür. Eşitlik durumu $\frac{x+1}{2-\sqrt{3}} = \frac{2-\sqrt{3}}{3-x}$ iken, yani $x = 1 \pm \sqrt{4\sqrt{3} - 3}$ iken sağlanır.

24. $1, 2, \ldots, n$ tam sayıları, ikisi de içerdiği herhangi farklı iki sayının aritmetik ortalamasını içermeyecek biçimde iki kümeye ayrılabiliyorsa, n en çok kaç olabilir?

Cevap: 8. $1, 2, \ldots, n$ kümesinin birinci kümeye dahil olan elemanlarını 1, ikinci kümeye dahil olan elemanlarını ise 0 ile işaretleyelim. örnek olarak $\{100...1\}$ 1 ve n sayılarının birinci, 2 ve 3 sayılarının ise ikinci kümede olduklarını gösterecektir. İlk önce $n = 8$ için örnek verelim: $\{10100101\}$. Şimdi $n = 9$ olamayacağını gösterelim. Genelliği bozmadan 8,9 ve 10 sayıları $\{\cdots 101 \cdots\}$ veya $\{\cdots 001 \cdots\}$ olarak dağıtılacaktır. $\{\cdots 101 \cdots\}$

durumunda $\{\cdots 101\cdot 0\cdot\}$ ve buradan $\{\cdot 1\cdot 101\cdot 0\cdot\}$ çelişkisi geliyor. Diğer durumda $\{\cdot\cdot 1001\cdots\}$, buradan $\{\cdot\cdot 1001\cdot\cdot 0\}$, buradan $\{1\cdot 1001\cdot\cdot 0\}$, buradan $\{101001\cdot\cdot 0\}$ ve buradan $\{101001\cdot 10\}$ elde ediyoruz. Vu durumda 7 sayısı hiçbir kümeye dahil edilemiyor, çelişki.

25. Birbirine A noktasında dıştan teğet olan C_1 ve C_2 çemberlerinin yarıçapları sırası ile 6 ve 8 birimdir. C_1 ve C_2 çemberlerine dıştan teğet olan C_3 çemberinin yarıçapı ise 21 birimdir. C_1 ve C_2 çemberlerinin A noktasından geçen ortak teğet doğrusu C_3 çemberini B ve C noktalarında kesiyor ise, $|BC|$ kaçtır?

Cevap: $24\sqrt{3}$. C_1, C_2, C_3 ün merkezleri sırasıylaO_1, O_2, O_3 olsun. O_3 ten BC ve O_1O_2 ye inen dikme ayakları sırasıyla D ve E olmak üzere, $|DB| = |DC|$ ve ADO_3E bir dikdörtgendir. $|O_3O_1| = 27, |O_3O_2| = 29$ ve $|O_1O_2| = 14$ olduğundan $|O_1E| = 3$ bulunur. $|O_1A| = 6$ olduğu için de $|O_3D| = |EA| = 6 - 3 = 3$ olduğu görülür. Dolayısıyla $|BC| = 2|DB| = 2\sqrt{21^2 - 3^2} = 24\sqrt{3}$ elde edilir.

26. $n^4 + 1$ sayısını bölen en küçük asal sayı $f(n)$ olmak üzere, $f(1) + f(2) + \cdots + f(2014)$ toplamının 8 ile bölümünden kalan kaçtır?

Cevap: 5. Öncelikle n tekse $f(n) = 2$ dir. n çift ve $f(n) = p$ olsun. $n^4 \equiv -1 \pmod p$ olduğundan $n^8 \equiv 1 \pmod p$ olur. n çift olduğu için $p > 2$ ve $n^{p-1} \equiv 1 \pmod p$ olur. $(p-1, 8) = d$ olsun. $n^d \equiv 1 \pmod p$ ve $n^4 \equiv -1 \pmod p$ olduğundan d sayısı $1, 2, 4$ olamaz. $d \mid 8$ olduğundan $d = 8$ ve $p \equiv 1 \pmod 8$ olur. Bu durumda
$f(1) + f(2) + \cdots + f(2014) \equiv 1007\cdot 2 + 1007\cdot 1 \equiv 5 \pmod 8$ olur.

27. Pozitif tam sayılarda tanımlı bir f fonksiyonu, $f(1) = 4$ ve her n pozitif tam sayısı için $f(2n) = f(n)$ ve $f(2n+1) = f(n) + 2$ koşullarını sağlamaktadır. 2014 ten küçük kaç k pozitif tam sayısı için $f(k) = 8$ dir?

Cevap: 165. n sayısının iki tabanında yazılımındaki 1 lerin sayısı $g(n)$ olmak üzere tümevarımla $f(n) = 2g(n) + 2$ olduğunu kolayca görebiliriz. Bu durumda $g(n) = 3$ ve $1 \le n < 2014$ olacak biçimde kaç farklı n tam sayısı olduğunu bulmalıyız. $2^{10} < 2014 < 2^{11}$ olduğundan n sayısı iki tabanında en çok 11 basamaklıdır. Tam olarak 3 basamağı 1, kalan basamakları 0 olmalıdır. Bu şartı sağlayan $\binom{11}{3} = 165$ tane n sayısı bulunur.

28. Başlangıçta tahtaya -1, 2, -3, 4, -5, 6 sayıları yazılıdır. Her işlemde tahtaya yazılı olan herhangi a ve b sayılarını silip yerine $2a+b$ ve $2b+a$ sayılarını yazarsak $(0,0,0,3,-9,9)$, $(0,1,1,3,6,-6)$, $(0,0,0,3,-6,9)$, $(0,1,1,-3,6,-9)$, $(0,0,2,5,5,6)$ altılılarından kaç tanesini elde edebiliriz?

Cevap: 1. a, b ikilisi ile $2a+b, 2b+a$ ikilisi 2 modunda aynıdır. Yani tahtadaki tek ve çift sayıların sayısı değişmez. Yani $(0,0,0,3,-6,9)$, $(0,0,2,5,5,6)$ ve $(0,0,2,5,5,6)$ elde edilemez. Öte yandan $(2a+b)^2+(2b+a)^2-a^2-b^2 = 4(a+b)^2 \geq 0$ olduğundan tahtadaki sayıların kareleri toplamı azalmaz. Ancak $(-1)^2+2^2+(-3)^2+4^2+(-5)^2+6^2 = 91 > 0^2+1^2+1^2+3^2+6^2+(-6)^2 = 83$ olduğundan $(0,1,1,3,6,-6)$ de elde edilemez. $(0,0,0,3,-9,9)$ aşağıdaki adımlarla elde edilebilir:
$(-1,2) \to (0,3)$, $(-3,6) \to (0,9)$, $(4,-5) \to (3,-6) \to (0,-9)$.

29. $|AB| = 13$, $|BC| = 12$ ve $|CA| = 5$ olan bir ABC üçgeninin A ve B köşelerine ait iç açıortaylar I noktasında kesişiyor ve karşı kenarları da sırasıyla, D ve E noktalarında kesiyor. $[DE]$ nin orta noktasından ve I dan geçen doğru $[AB]$ yi F noktasında kesiyor ise, $|AF|$ nedir?

Cevap: 3. $[DE]$ nin orta noktası M, MI ile DC nin kesişimi G olsun. Açıortay teoremlerinden $|DC| = \frac{10}{3}$ ve $|CE| = \frac{12}{5}$ bulunur. BDE üçgeninde G, M, I kesenine göre Menelaus teoremi uygularsak $\frac{|GD|}{|GB|}\frac{|IB|}{|IE|}\frac{|ME|}{|MD|} = 1$ elde edilir. $\frac{|IB|}{|IE|} = \frac{|CB|}{|CE|} = 5$ ve $|ME| = |MD|$ olduğundan $\frac{|GD|}{|GB|} = \frac{1}{5}$ olduğu görülür. BDA üçgeninde G, I, F kesenine göre Menelaus teoremi uygularsak $\frac{|GD|}{|GB|}\frac{|BF|}{|FA|}\frac{|IA|}{|ID|} = 1$ elde edilir. $\frac{|GD|}{|GB|} = \frac{1}{5}$ ve $\frac{|IA|}{|ID|} = \frac{|CA|}{|CD|} = \frac{3}{2}$ olduğunden $\frac{|BF|}{|FA|} = \frac{10}{3}$ bulunur. $|AB| = 13$ olduğundan $|AF| = 3$ olur.

30. Bir n pozitif tam sayısı için, $s(n)$ ile n sayısının pozitif tam sayı bölenlerinin sayısını göstermek üzere; 2014^{2014} sayısını bölen tüm k pozitif tam sayıları için $\big(s(k)\big)^3$ sayılarının toplamının en büyük asal böleni nedir?

Cevap: 31. $2014 = 2 \cdot 19 \cdot 53$ olduğundan 2014^{2014} sayısının her pozitif tam sayı böleni $2^x 19^y 53^z$ $(x, y, z \in A = \{0, 1, \ldots, 2014\})$ formundadır. Bu formdaki k sayısı için $(s(k))^3 = (x+1)^3(y+1)^3(z+1)^3$ olduğundan istenilen toplam $\sum_{xiyiz\in A}(x+1)^3(y+1)^3(z+1)^3 = \sum_{x\in A}(x+1)^3 \sum_{y\in A}(y+1)^3 \sum_{z\in A}(z+1)^3 = (\sum_{x\in A}(x+1)^3)^3 = (\sum_{i=1}^{2015} i^3)^3 = ((\frac{2015\cdot 2016}{2})^2)^3 = (2015 \cdot 1008)^6 = (5 \cdot 13 \cdot 31 \cdot 2^4 \cdot 3^2 \cdot 7)^6$ ya eşittir. Dolayısıyla bu sayının en büyük asal böleni 31 dir.

31. $a_1 = 1$ ve her $n \geq 1$ için,

$$(a_{n+1} - 2a_n) \cdot \left(a_{n+1} - \frac{1}{a_n + 2}\right) = 0$$

olmak üzere, $a_k = 1$ ise, k aşağıdakilerden hangisi olabilir?

a) 6 b) 8 c) 10 d) 12 e) Hiçbiri

Cevap: 12. Bir i pozitif tamsayısı için $a_{i+1} \geq \dfrac{1}{2}$ ise $a_i = \dfrac{a_{i+1}}{2}$ olmalıdır. Bunu kullanarak $a_k = 1$ ise indirgemeli olarak geriye doğru olası tüm durumları yazacağız.

$a_{k-1} \in \left\{\dfrac{1}{2}\right\}$

$a_{k-2} \in \left\{\dfrac{1}{4}\right\}$

$a_{k-3} \in \left\{\dfrac{1}{8}, 2\right\}$

$$a_{k-4} \in \left\{ \frac{1}{16}, 6, 1 \right\}$$

$a_{k-5} \in \left\{\frac{1}{32}, 14, 3, \frac{1}{2}\right\}$
$a_{k-6} \in \left\{\frac{1}{64}, 30, 7, \frac{3}{2}, \frac{1}{4}\right\}$
$a_{k-7} \in \left\{\frac{1}{128}, 62, 15, \frac{7}{2}, \frac{3}{4}, \frac{1}{8}, 2\right\}$
$a_{k-8} \in \left\{\frac{1}{256}, 126, 31, \frac{15}{2}, \frac{7}{4}, \frac{3}{8}, \frac{1}{16}, 6, 1\right\}$
$a_{k-9} \in \left\{\frac{1}{512}, 254, 63, \frac{31}{2}, \frac{15}{4}, \frac{7}{8}, \frac{3}{16}, \frac{2}{3}, \frac{1}{32}, 14, 3, \frac{1}{2}\right\}$
$a_{k-10} \in \left\{\frac{1}{1024}, 510, 127, \frac{63}{2}, \frac{31}{4}, \frac{15}{8}, \frac{7}{16}, \frac{3}{32}, \frac{10}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{64}, 30, 7, \frac{3}{2}, \frac{1}{4}\right\}$
$a_{k-11} \in \left\{\frac{1}{2048}, 1022, 255, \frac{127}{2}, \frac{63}{4}, \frac{31}{8}, \frac{15}{16}, \frac{7}{32}, \frac{2}{7}, \frac{3}{64}, \frac{26}{3}, \frac{5}{3}, \frac{1}{6}, 1, \frac{1}{128}, 62, 15, \frac{7}{2}, \frac{3}{4}, \frac{1}{8}, 2\right\}$

olduğundan $1 < k \leq 12$ için $k = 5, 9, 12$ değerlerini alabilir.

32. Başlangıçta masada k tane taş bulunuyor. Alper, Betül ve Ceyhun sırayla hamle yapıyorlar ve sırası gelen oyuncu masadan bir veya iki taş alıyor. Hamle yapamayan oyuncu oyunu kaybediyor ve oyun sona eriyor. Oyuna her seferinde Alper başlamak üzere, oyun $k = 5, 6, 7, 8, 9$ değerleri için birer kez oynanırsa, Alper bunlardan kaçını kaybetmemeyi garantileyebilir?

Cevap: 2.