TÜBİTAK

Türkiye Cumhuriyeti
SANAYİ VE TEKNOLOJİ BAKANLIĞI

MATEMATİK

20. ULUSAL
MATEMATİK OLİMPİYATI
BİRİNCİ AŞAMA SINAV
SORU VE ÇÖZÜMLERİ

2012

TÜRKİYE BİLİMSEL VE TEKNOLOJİK ARAŞTIRMA KURUMU
BİLİM İNSANI DESTEK PROGRAMLARI BAŞKANLIĞI

ULUSAL MATEMATİK OLİMPİYATLARI SORU ve ÇÖZÜMLERİ

Ankara

Nisan 2019

1. Yüksekliklerinin uzunlukları 3, 4 ve 6 birim olan bir üçgeninin çevre uzunluğu kaç birimdir?

Cevap: $24\sqrt{3/5}$. Kenar uzunlukları a, b, c ve karşılık gelen yükseklik uzunlukları h_a, h_b, h_c olsun. Bu durumda $ah_a = bh_b = ch_c$ olacağından genelliği bozmadan $a = 4x$, $b = 3x$, $c = 2x$ diyebiliriz. Alan formülünden $6x = \sqrt{9x/2 \cdot x/2 \cdot 3x/2 \cdot 5x/2}$ ve buradan da $x = 8/\sqrt{15}$ ve çevre uzunluğu $a + b + c = 72/\sqrt{15} = 24\sqrt{3/5}$ olur.

2. m ve n pozitif tam sayılar olmak üzere, $2012^n + m^2$ sayısının 11 ile bölümünden kalan farklı sayıların toplamı nedir?

Cevap: 39. $2012 \equiv -1 \pmod{11}$ olduğundan $2012^n \equiv -1, 1 \pmod{11}$. Bir tamkare (mod 11) de 0,1,3,4,5,9 değerlerini alabilir. Dolayısıyla $2012^n + m^2$ sayısının 11 ile bölümünden kalan sayı 0,1,2,3,4,5,6,8,10 olabilir. Bu sayıların toplamı da 39 dur.

3. Aşağıdaki x değerlerinden hangisi $\sqrt[3]{6+\sqrt{x}} + \sqrt[3]{6-\sqrt{x}} = \sqrt[3]{3}$ eşitliğini sağlar?

Cevap: 45. $(a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b)$ olduğundan $(\sqrt[3]{6+\sqrt{x}} + \sqrt[3]{6-\sqrt{x}})^3 = 12 + 3 \cdot (\sqrt[3]{36-x}) \cdot (\sqrt[3]{6+\sqrt{x}} + \sqrt[3]{6-\sqrt{x}}) \Rightarrow 3 = 12 + 3 \cdot \sqrt[3]{3} \cdot (\sqrt[3]{36-x}) \Rightarrow 36 - x = \frac{(3-12)^3}{3^3 \cdot 3} = -9 \Rightarrow x = 45$ bulunur.

4. $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ kümesinin tüm a elemanları için $f(f(a)) = a$ koşulunu sağlayan kaç $f : A \to A$ fonksiyonu vardır?

Cevap: 232. Durum 1: $f(a) = a, f(b) = b, f(c) = c, f(d) = d, f(e) = e, f(s) = s, f(t) = t$. Durum 2: $f(a) = b, f(b) = a, f(c) = c, f(d) = d, f(e) = e, f(s) = s, f(t) = t$. Durum 3: $f(a) = b, f(b) = a, f(c) = d, f(d) = c, f(e) = e, f(s) = s, f(t) = t$. Durum 4: $f(a) = b, f(b) = a, f(c) = d, f(d) = c, f(e) = s, f(s) = e, f(t) = t$. Buna göre toplam fonksiyon sayısı

$$1 + \binom{7}{2} + \binom{7}{4} \cdot 3 + \binom{7}{6} \cdot 5 \cdot 3 = 232$$

olur.

5. $|AB| = 7$, $|BC| = 12$ ve $|CA| = 13$ olan bir ABC üçgeninin $[BC]$ kenarı üstünde yer alan D noktası $|BD| = 5$ koşulunu sağlıyor. r_1 ve r_2

sırasıyla, ABD ve ACD üçgenlerinin içteğet çemberlerinin yarıçapları ise, r_1/r_2 nedir?

Cevap: 1. Stewart teoreminden

$$|AD|^2 = \frac{7^3 + 13^2 \cdot 5}{12} - 5 \cdot 7 = 64$$

ve buradan da $|AD| = 8$ olur. ABD ve ACD üçgenlerinin yarı çevre uzunlukları sırasıya 10 ve 14 ve alanları oranı $5/7$ olduğundan $r_1/r_2 = 5/7 \cdot 14/10 = 1$ bulunur.

6. n nin aşağıdaki değerlerinden hangisi $n^{29} \equiv 7 \pmod{65}$ denkliğini sağlar?

a) 37 b) 39 c) 43 d) 46 e) 55

Cevap: 37. Fermat Teoremi'nden dolayı $(n, 65) = 1$ iken $n^4 \equiv 1 \pmod 5$ ve $n^{12} \equiv 1 \pmod{13}$ olur. Buradan $n \equiv 2 \pmod 5$ ve $n^5 \equiv 7 \equiv -32 \equiv (-2)^5 \pmod{13}$ bulunur. 5 ve 12 aralarında asal sayılar olduğundan ikinci denklik $n \equiv -2 \pmod{13}$ e denktir. Dolayısıyla $n \equiv 37 \pmod{65}$ elde edilir.

7. Tüm x, y, z gerçel sayıları için $f(x)f(y)f(z) = 12f(xyz) - 16xyz$ koşulunu sağlayan kaç $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ fonksiyonu vardır?

Cevap: 2. Öncelikle $t^3 - 12t + 16 = (t-2)^2 \cdot (t+4)$ olduğunu not edelim. Verilen eşitlik $x = y = z = 1$ için yazıldığında $f(1)^3 - 12f(1) + 16 = 0$, yani $f(1) = 2$ veya $f(1) = -4$ olduğu görülür. Bu iki durumdan herhangi birinde eşitlik $y = z = 1$ için yazıldığında $f(1)^2 \cdot f(x) = 12f(x) - 16x \Rightarrow f(x) = \frac{16}{12 - f(1)^2} \cdot x = f(1) \cdot x$ olduğu görülür. $f(x) = 2x$ ve $f(x) = -4x$ fonksiyonları verilen şartı sağlarlar, yani böyle iki fonksiyon vardır.

8. $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ kümesinin birbirinden farklı ve biri diğerini içeren iki alt kümesi kaç farklı biçimde seçilebilir?

Cevap: 2059. Alt kümeler A ve B olsun: $A \subset B$. O zaman $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ sayılarının her biri ya aynı anda A ve B'nin, ya sadece B'nin yada ne A ne de B'nin elemanı olacak: toplamda 3^7 seçenek bulunuyor. Fakat sadece birinci ve üçüncü seçenekleri kullanırsak $A = B$ olur. Sonuç olarak cevap $3^7 - 2^7 = 2059$ olur.

9. $[AB]$ çaplı çemberin $[CD]$ kirişi $[AB]$ ye diktir. M ve N sırasıyla, $[BC]$ ve $[AD]$ nin orta noktaları olmak üzere, $|BC| = 6$ ve $|AD| = 2\sqrt{3}$ ise, $|MN|$ nedir?

Cevap: $\sqrt{21}$. Çemberdeşlikten $\angle CBA = \angle CDA = \angle DBA$ ve buradan da $AB \perp CD$ olduğundan $|BC| = |BD|$ ve $|AD| = |AC|$ buluruz. Pisagor teoreminden $|AB| = 4\sqrt{3}$ olur. ABC üçgeni $30-60-90$ üçgeni olup $\angle CBA = 30^\circ$ olur. Buradan da DBC üçgeni eşkenar ve $|CD| = 6$ olur. $[BD]$ nin orta noktası K olsun. $MK \parallel BC$ ve $NK \parallel AB$ olacağından $\angle NKM = 90^\circ$ ve $|KN| = 2\sqrt{3}$, $|MK| = 3$ olur. Pisagor teoreminden $|MN| = \sqrt{21}$ olur.

10. n den küçük ve n ile aralarında asal olan tam olarak 20 tane pozitif tam sayı bulunmasını sağlayan kaç n pozitif tam sayısı vardır?

Cevap: 5. Soruda verilen koşul $\phi(n) = 20$ olmasına denktir. $20 = 2^2 \cdot 5$ olduğundan n nin asal bölenleri 2,3,5,11 olabilir. n sayısı 11 ile bölünüyorsa, n sayısı $2^2 \cdot 11, 3 \cdot 11$ veya $2 \cdot 3 \cdot 11$ olabilir. n sayısı 11 ile bölünmüyorsa, 5^2 ile bölünmek zorunda. Bu durumda n sayısı 5^2 veya $2 \cdot 5^2$ olabilir. Şartı sağlayan sayılar $25, 33, 44, 50$ ve 66 dır.

11. $x^3+2 = 3y$, $y^3+2 = 3z$, $z^3+2 = 3w$, $w^3+2 = 3x$ eşitliklerini sağlayan kaç (x, y, z, w) gerçel sayı dörtlüsü vardır?

Cevap: 2. $t^3-3t+2 = (t+2)(t-1)^2$ olduğundan $t < -2$ ise $t^3+2 < 3t$ ve $t \geq 2$ ise $t^3+2 \geq 3t$ olduğu görülür. Buna göre, $x < -2$ ise $3y = x^3+2 < 3x \Rightarrow y < x \Rightarrow y < -2$ olmalıdır. O halde benzer şekilde $z < y$, $w < z$ ve $x < w$ bulunur ki $x < w < z < y < x$ çelişkidir. $x \geq -2$ ise $3y = x^3+2 \geq 3x \Rightarrow y \geq x \Rightarrow y \geq -2$ olmalıdır. Yine benzer şekilde $x \geq w \geq z \geq y \geq x$ bulunur. Yani $x = y = z = w$ ve $x^3+2 = 3x$ olmalıdır. Şartları sağlayan dörtlüler $(x, y, z, w) = (-2, -2, -2, -2)$ ve $(x, y, z, w) = (1, 1, 1, 1)$ dörtlüleridir.

12. $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ kümesinin dört tane ardışık tam sayı içermeyen kaç altkümesi vardır?

Cevap: 773. $\{1, 2, \cdots, n\}$ kümesinin dört tane ardışık tam sayı içermeyen altküme sayısı $f(n)$ olsun. O zaman indirgeme yönteminden

$$f(n) = f(n-1) + f(n-2) + f(n-3) + f(n-4)$$

elde edilir. $f(1) = 2$, $f(2) = 4$, $f(3) = 8$, $f(4) = 15$ olduğundan $f(5) = 29$, $f(6) = 56$, $f(7) = 108$, $f(8) = 208$, $f(9) = 401$ ve $f(10) = 773$ gelir.

13. Köşeleri, düzlemdeki herhangi üçü doğrudaş olmayan 20 noktadan oluşan bir kümeye ait olan en çok kaç geniş açılı üçgen bulunabilir?

Cevap: $\binom{20}{3}$. Verilmiş A_i ve A_j noktalarını birleştiren doğru L, L doğrusuna A_i ve A_j noktalarında dik olan doğrular $L(i,j)$, $L(j,i)$ ve $L(i,j)$, $L(j,i)$ doğrularının arasındaki şerit $S(i,j)$ olsun. C noktası $S(i,j)$ şeriti dışında alınırsa ABC üçgeni geniş açılı olacaktır. Sonlu sayıda $A_1, A_2, \ldots, A_n$ noktaları verildiğinde, $1 \leq i, j \leq n$ olmak üzere, $S(i,j)$ şeritlerinin bileşimi düzlemin tümünü kapayamaz (şeritlere paralel olmayan doğru bu şeritlerle kapanmıyor). O zaman tüm nokta ikilileri için tüm üçgenleri geniş açılı yapan ortak bir C noktası her zaman alınabilir.

14. n pozitif tam sayı olmak üzere, $(2n-1)^{502} + (2n+1)^{502} + (2n+3)^{502}$ sayısının 2012 ile bölümünden kalan farklı sayıların toplamı nedir?

Cevap: 1514. $2012 = 2^2 \cdot 503$. Sorudaki sayı üç tek sayının çift kuvvetleri toplamı olduğundan bu sayının 4 ile bölümünden kalan her zaan 3 tür. Fermat Teoremi'nden dolayı $(a, 503) = 1$ iken $a^{502} \equiv 1 \pmod{503}$ tür. O halde $2n-1, 2n+1, 2n+3$ sayılarından hiçbiri 503 ile bölünmüyorsa toplam $\pmod{503}$ te $1+1+1 = 3$ e, biri 503 ile bölünüyor ise de toplam $\pmod{503}$ te $1+1 = 2$ ye denktir. (Bu üç sayıdan ikisi aynı anda 503 ile bölünmez). Dolayısıyla sorudaki sayının 2012 ile bölümünden kalan 3 veya 1511 olabilir.

15. a gerçel sayısının, $x^4 + 8x^3 + 18x^2 + 8x + a = 0$ denkleminin dört farklı gerçel kökü olmasını sağlayan tüm değerlerinin kümesi nedir?

Cevap: (-8,1). Verilen polinomda x yerine $x-2$ yazılıp $(x-2)^4 + 8(x-2)^3 + 18(x-2)^2 + 8(x-2) + a = x^4 - 6x^2 + 8 + a = (x^2-3)^2 + a - 1$ olduğu görülür. Yani verilen polinomun dört farklı gerçel kökü olması $(x^2-3)^2 = 1-a$ denkleminin dört farklı gerçel çözümü olmasına denktir. Bunun için $1-a > 0$ ve $-\sqrt{1-a} + 3 > 0$ olmalıdır. Yani $-8 < a < 1$.

16. 8×8 bir satranç tahtasının her birim karesine 1 ve -1 sayılarından biri yazılmıştır. En az dört satırın her birindeki sayıların toplamı pozitif ise, üzerlerindeki sayıların toplamı -3 ten küçük olan en çok kaç sütun olabilir?

Cevap: 6. Cevabın 6'dan fazla olamayacağını gösterelim. En az dört satırın her birindeki sayıların toplamı pozitif olduğuna göre bu dört satırda toplam en az $4 \cdot 5 = 20$ tane $+1$ vardır. Bu dört satırdaki $+1$'leri sütunlar üzerinden sayalım. Toplamı -3 ten küçük olan bir sütunda en fazla iki tane $+1$ olabilir. Bu sütunların sayısı altıdan fazla olursa, toplam en fazla $7 \cdot 2 + 4 < 20$ tane $+1$ elde ederiz, çelişki. Üzerlerindeki sayıların toplamı -3 ten küçük olan 6 sütun olabilir:

+1	+1	-1	-1	+1	-1	+1	+1
+1	-1	-1	+1	+1	-1	+1	+1
-1	-1	+1	+1	-1	+1	+1	+1
-1	+1	+1	-1	-1	+1	+1	+1
-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1

17. Bir ABC üçgeninin iç bölgesinde yer alan bir D noktası için, $m(\widehat{BAD}) = 20°$, $m(\widehat{DAC}) = 80°$, $m(\widehat{ACD}) = 20°$ ve $m(\widehat{DCB}) = 20°$ ise, $m(\widehat{ABD})$ nedir?

Cevap: $10°$. Verilen açıları kullanarak $\angle ADC = 80°$, $\angle ABC = 40°$ ve buradan da $|AC| = |CD| = |AB|$ olur. ADC üçgeninin iç bölgesinde ADE bir eşkenar üçgen olacak biçimde bir E noktası alalım. $\angle EDC = 20°$ ve $|AD| = |DE| = |AE|$ olduğundan $\triangle EDC \cong \triangle EAC \cong \triangle DAB$ ve buradan da $\angle ABD = \angle ECD = \angle ECA = 10°$ bulunur.

18. Farklı asal sayıların kuvvetlerinin çarpımı olarak yazılımında sıfırdan farklı tüm kuvvetlerin tek sayılar olduğu bir pozitif tam sayıya *tekil* sayı diyelim. En çok kaç ardışık tekil sayı vardır?

Cevap: 7. $8k + 4$ formundaki bir sayının içindeki 2 çarpanının kuvveti her zaman 2 dir. Dolayısıyla 8 veya daha fazla ardışık tekil sayı bulunmaz. 7 için örnek: 29,30,31,32,33,34,35.

19. $x^4 - 7x^3 + 14x^2 - 14x + 4 = 0$ denkleminin gerçel köklerinin toplamı nedir?

Cevap: 5. $x^4 - 7x^3 + 14x^2 - 14x + 4 = (x^2 - 5x + 2)(x^2 - 2x + 2)$ olduğu görülür. $x^2 - 2x + 2$ ifadesi her x gerçel sayısı için pozitiftir ve $x^2 - 5x + 2 = 0$ denkleminin kökleri gerçel olup toplamları 5 tir.

20. $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11$ sayılarının her $(a_1, a_2, \dots, a_{11})$ permütasyonu için, $(a_1+a_3, a_2+a_4, a_3+a_5, \dots, a_8+a_{10}, a_9+a_{11})$ verildiğinde a_i lerden en az k tanesini belirleyebiliyorsak, k en çok kaç olabilir?

Cevap: 5. $a_1 + a + 2 + \cdots + a_{11} = 66$ olduğundan ilk önce a_6 sayısı belirleniyor:

$$a_6 = 66-(a_1+a_3)-(a_2+a_4)-(a_3+a_5)-(a_8+a_{10})-(a_5+a_7)-(a_9+a_{11}).$$

Daha sonra a_4+a_6 dan a_4 bulunur. Benzer şekilde sırasıyla a_4, a_2, a_8, a_{10} değerleri bulunur. Şimdi k' nın 5'ten daha fazla olamayacağını gösterelim. $(2, 3, 5, 11, 8, 9, 7, 4, 6, 10, 1)$ ve $(1, 3, 6, 11, 7, 9, 8, 4, 5, 10, 2)$ permütasyonları için $(a_1 + a_3, a_2 + a_4, a_3 + a_5, \dots, a_8 + a_{10}, a_9 + a_{11})$ değerleri aynı olup $a_1, a_3, a_5, a_7, a_9, a_{11}$ değerleri farklıdır. Bu nedenle permütasyonun $a_1, a_3, a_5, a_7, a_9, a_{11}$ değerlerinin bulunmasını garantileyemeyiz.

21. $|AB| = 5$, $|BC| = 6$ ve $|CA| = 7$ olan bir ABC üçgeninin A köşesine ait açıortayı $[BC]$ kenarını D noktasında kesiyor. A dan geçen ve BC ye D de teğet olan çember ise, $[AB]$ ve $[AC]$ kenarlarını sırasıyla, P ve Q noktalarında kesiyor. AD ve PQ doğruları T noktasında kesişiyorsa, $|AT|/|TD|$ nedir?

Cevap: 3. Teğetlik ve çemberdeşlikten $\angle PAD = \angle DAC = \angle DPQ = \angle PDB$ olduğundan $PQ \parallel BC$ olur. Açıortay teoreminden $|BD|/|DC| = 5/7$ ve buradan da $|BD| = 5/2$, $|DC| = 7/2$. Çemberde kuvvetten $|BD|^2 = |BP| \cdot |AB|$ ve buradan da $|BP| = 5/4$, $|PA| = 15/4$ ve benzerlikten $|AT|/|TD| = |AP|/|BP| = 3$ olur.

22. $4mn(m + n - 1) = (m^2 + 1)(n^2 + 1)$ eşitliğini sağlayan kaç (m, n) tam sayı ikilisi vardır?

Cevap: 5. Eşitlik (mod 4) te incelendiğinde m ve n nin tek olduğu görülür. Eşitlikte sağ taraf her zaman pozitiftir. O halde m ve n nin ikisinden biri 0 veya ikisi de negatif olamaz.
1. durum: $m, n > 0$. $(m^2+1)(n^2+1) = m^2n^2+m^2+n^2+1 > m^2n^2+2mn$

olduğundan $4m + 4n - 4 > mn + 2$ elde edilir. Bu da $(m-4)(n-4) < 10$ eşitsizliğine denktir. O halde bu sayılardan küçük olanı en fazla 7 olabilir. 1,3,5,7 için incelendiğinde $(1,1),(5,13)$ ve $(13,5)$ çözümleri elde edilir.
2. durum: $m > 0, n < 0$. $n = -k$ olsun. $4mk(k+1-m) = (m^2+1)(k^2+1)$ elde edilir. Benzer şekilde $(m^2+1)(k^2+1) > m^2k^2 + 2mk$ eşitsizliği kullanlarak $4k+4-4m > mk+2$ bulunur. Bu da $(m-4)(k+4) < -14$ eşitiizlğne denktir. $k \geq 1$ olduğundan $m < 4$ bulunur. $m = 1, 3$ için incelendiğinde $(1,-1)$ çözzümü elde edillir. $m < 0, n > 0$ durumunda da simetriden dolayı yalnızca $(-1,1)$ çözümü vardır. Dolayısıyla tüm çözümler $(1,1),(5,13),(13,5),(1,-1)$ ve $(-1,1)$.

23. a, b, c gerçel sayıları $x^3 - 3x + 1 = 0$ denkleminin farklı kökleri ise, $a^8 + b^8 + c^8$ nedir?

Cevap: 186. Öncelikle $a + b + c = 0$ ve $a^2 + b^2 + c^2 = (a+b+c)^2 - 2(ab + bc + ac) = 6$ olduğu görülür. Her $n \geq 0$ için $s_n = a^n + b^n + c^n$ olarak tanımlayalım. $s_0 = 3, s_1 = 0, s_2 = 6$ dır. $a^n(a^3 - 3a + 1) = 0$, $b^n(b^3 - 3b + 1) = 0$ ve $c^n(c^3 - 3c + 1) = 0$ denklemleri taraf tarafa toplanırsa $s_{n+3} = 3s_{n+1} - s_n$ bulunur. Buna göre $s_0, s_1, s_2, s_3, \ldots$ dizisi $3, 0, 6, -3, 18, -15, 57, -63, 186, -246, \ldots$ şeklindedir, yani $s_8 = 186$.

24. Bir yüzleri siyah ve diğer yüzleri beyaz olan 2012 tane tavla pulu bir doğru boyunca ve üste gelen yüzleri dönüşümlü olarak siyah ve beyaz olacak biçimde dizilmiştir. Her hamlede iki pul seçip bunları ve bu pulların arasında kalan tüm pulları ters çeviriyoruz. Bütün pulların üste gelen yüzlerinin aynı renkte olmasını en az kaç hamlede sağlayabiliriz?

Cevap: 1006. Üste gelen yüzleri farklı olan ardışık pul iki sayısına uyuşmazlık sayısı diyelim. Başlangıçta uyuşmazlık sayısı 2011'e eşittir. Her hamlede uyuşmazlık sayısı en fazla iki azaldığı için gereken hamle sayısı en az 1006' dır. 1006 hamlenin aynı zamanda yeterli olduğunu gösterelim. Bunun için ilk hamlede 2. ve 2011., ikinci hamlede 3. ve 2010.,..., bin beşinci hamlede 1006. ve 1007. pulları ve en son hamlede de 1. ve 1006. pulları seçmek yeterli olacaktır.

25. Bir ABC üçgeninin $[AC]$ kenarının M orta noktası, B köşesine ait yüksekliğinin H ayağı ile C köşesi arasındadır. $m(\widehat{ABH}) = m(\widehat{MBC})$, $m(\widehat{ACB}) = 15°$ ve $|HM| = 2\sqrt{3}$ ise, $|AC|$ nedir?

Cevap: 8. $\angle ABM = \angle HBC = 75^\circ$ ve $\angle ACB = 15^\circ$ olduğundan BM doğrusu ABC üçgeninin çevrel çember merkezinden geçer. Bu doğru aynı zamanda AC kenarının orta noktasından geçtiği için M noktası çevrel çember merkezi olmalıdır. Yani $\angle HMB = 30^\circ$ ve $|BH| = 2$, $|BM| = |MC| = |MA| = 4$, $|AC| = 8$ olur.

26. 100 den küçük kaç asal sayı ardışık pozitif tam sayıların karelerinin toplamı olarak yazılabilir?

Cevap: 5. Toplamda yer alabilecek tam kareler 1,4,9,16,25,36 ve 49 dur. 1 den başlayan ardışık toplamlarda $1 + 4 = 5$ asal sayısı bulunur. 4 ten başlayan ardışık toplamlarda $4 + 9 = 13$ ve $4 + 9 + 16 = 29$ asal sayıları bulunur. 9 ile başlayanlarda asal sayı bulunmaz. 16 ile başlayanlarda $16 + 25 = 41$ ve 25 ile başlayanlarda $25 + 36 = 61$ asal sayıları bulunurken 36 ile başlayanlarda asal sayı bulunmaz.

27. Tüm x gerçel sayıları için, $\sin x \cos x \leq C\,(\sin^6 x + \cos^6 x)$ olmasını sağlayan en küçük C gerçel sayısı nedir?

Cevap: 2. C'nin pozitif olduğu kolayca görülür. $\sin 2x = t$ olsun.

$$\sin^6 x + \cos^6 x = \left(\frac{1 - \cos 2x}{2}\right)^3 + \left(\frac{1 + \cos 2x}{2}\right)^3 = \frac{1 + 3\cos^2 2x}{4} = \frac{4 - 3t^2}{4}$$

olduğundan sorudaki eşitsizlik tüm $-1 \leq t \leq 1$ için

$$P(t) = 4 - 3t^2 - \frac{2t}{C} \geq 0$$

şekilinde yazılabilir. Buradan $P(1) \geq 0$ ve sonuç olarak $C \geq 2$ gelir. P ikinci dereceden bir polinom olduğğundan $C = 2$ için eşitsiliğin sağlandığı açıktır.

28. Başlangıçta üç kutuda sırasıyla, m, n ve k tane taş bulunuyor. Ayşe ve Burak sırayla hamle yapıyorlar ve sırası gelen oyuncu istediği bir kutudan en az bir tane olmak üzere, istediği sayıda taş alıyor. Son taşı alan oyuncu oyunu kazanıyor. Oyuna her sefer Ayşe başlamak üzere, oyun $(m, n, k) = (1, 2012, 2014)$, $(2011, 2011, 2012)$, $(2011, 2012, 2013)$, $(2011, 2012, 2014)$, $(2011, 2013, 2013)$ için birer kez oynanırsa, Ayşe bunlardan en az kaçını kazanmayı garantileyebilir?

Cevap: 5. Ayşe ilk hamlesinde kutulardaki taş sayılarını $(0, k, k)$ veya $(1, n, n+1)$ yaparsa oyunu kazanıyor. Bunun için $(0, k, k)$ durumunda Burak'ın her hamlesine simetrik hamleler yapması ve $(1, n, n+1)$ durumunda durumu yeniden $(1, k, k+1)$ durumuna getirmesi gerekiyor. Buna göre Ayşe'nin ilk hamlesi durumlara bağlı olarak $(1, 2012, 2014) \to (1, 2012, 2011)$, $(2011, 2011, 2012) \to (2011, 2011, 0)$, $(2011, 2012, 2013) \to (2011, 2012, 1)$, $(2011, 2012, 2014) \to (2011, 2012, 1)$ ve $(2011, 2013, 2013) \to (0, 2013, 2013)$ olacaktır.

29. Dar açılı bir ABC üçgeninin sırasıyla, $[BC]$ ve $[AC]$ kenarları üstünde yer alan D ve E noktaları için, AD ve BE doğruları F noktasında kesişiyor. $|AF| = |CD| = 2|BF| = 2|CE|$ ve $\text{Alan}(ABF) = \text{Alan}(DEC)$ ise, $\text{Alan}(AFC)/\text{Alan}(BFC)$ nedir?

Cevap: 4. Sinüslü alan teoreminden $2\text{Alan}(AFB) = |AF| \cdot |FB| \cdot \sin\angle AFB$ ve $2\text{Alan}(DCE) = |DC| \cdot |CE| \cdot \sin\angle DCE$ ve buradan da $\sin\angle AFB = \sin\angle DCE$ olur. $180° > \angle AFB > \angle DCE > 0°$ olduğundan $\angle AFB = 180° - \angle DCE$ buluruz. Yani $FDCE$ bir kirişler dörtgenidir. FC doğrusu AB kenarını K noktasında kessin. Sinüs teoreminden $|AK|/|KB| = |AF|/|FB| \cdot \sin\angle AFK/\sin\angle BFK$ olur. Çemberdeşlikten $\angle AFK = \angle DFC = \angle DEC$ ve $\angle BFK = \angle CFE = \angle EDC$ dir. Sinüs teoreminden $\sin\angle DEC/\sin\angle EDC = |DC|/|EC| = 2$ olduğundan $\text{Alan}(AFC)/\text{Alan}(BFC) = |AK|/|KB| = 4$ olur.

30. $x^3 + y^3 = x^2yz + xy^2z + 2$ eşitliğini sağlayan kaç (x, y, z) tam sayı üçlüsü vardır?

Cevap: 4. Verilen eşitlik $(x+y)(x^2 - xy + y^2) = xyz(x+y) + 2$ olarak yazılabilir. Buradan $x+y$ sayısının 2 yi böldüğü görülür. Ayrıca $x+y$ nin tek olamayacağı da kolayca görülür ve dolayısıyla $x+y = 2$ veya -2. $x+y = 2$ ise, $4 - 3xy = xyz + 1$ bulunur. $\Rightarrow xy|3$. O zaman (x, y) ikilisi $(1, 1), (3, -1), (-1, 3)$ olabilir. $x+y = -2$ ise, $4 - 3xy = xyz - 1$ elde edilir. $\Rightarrow xy|5$. O halde (x, y) sadece $(-1, -1)$ olabilir. Tüm çözümler $(1, 1, 0), (3, -1, -4), (-1, 3, -4), (-1, -1, 2)$.

31. $f : \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$ fonksiyonu tüm m, n tam sayıları için,

$$m + f(m + f(n + f(m))) = n + f(m)$$

ve $f(6) = 6$ koşullarını sağlıyorsa, $f(2012)$ nedir?

Cevap: -2000. Verilen eşitlikte n yerine $6-f(m)$ yazılırsa, $m+f(m+6)=6$ bulunur. Şimdi m yerine $k-6$ yazılırsa $f(k)=12-k$ bulunur. Bu fonksiyonun da şartı sağladığı kolayca görülür. $f(2012)=-2000$.

32. $1,2,3,4,5,6,7,8,9,10$ sayılarının $(a_1,a_2,\dots,a_{10})$ permütasyonlarından kaçı için, $|a_1-1|+|a_2-2|+\cdots+|a_{10}-10|=4$ olur?

Cevap: 52. $|a_1-1|+|a_2-2|+\cdots+|a_{10}-10|=4$ ve $\sum_{i=1}^{10}(a_i-i)=0$ olduğundan sıfıra eşit olmayan (a_i-i) ifadeleri $\{2,-2\},\{1,1,-1,-1\},\{2,-1,-1\}$ veya $\{-2,1,1\}$ olmalıdır. $\{2,-2\}$ durumuna bir i değeri için $a_i=i+2$ ve $a_{i+2}=i$ olacaktır, toplam 8 çözüm geliyor. $\{1,1,-1,-1\}$ durumunda $1\le i\le 7$ ve $i+2\le j\le 9$ olmak üzere $a_i=i+1, a_{i+1}=i$, $a_j=j+1$ ve $a_{j+1}=j$ olmalıdır. Buradan toplam $1+2+\cdots+7=28$ çözüm geliyor. $\{2,-1,-1\}$ durumunda bir $1\le i\le 8$ değeri için $a_i=i+1, a_{i+1}=i+2$ ve $a_{i+2}=i$ olacaktır, toplam 8 çözüm geliyor. $\{-2,1,1\}$ durumunda bir $1\le i\le 8$ değeri için $a_i=i+2, a_{i+1}=i$ ve $a_{i+2}=i+1$ olacaktır, toplam 8 çözüm geliyor. Buna göre toplam $8+28+8+8=52$ çözüm olur.

33. $|AB|=2|BC|$ olan $ABCDA'B'C'D'$ dikdörtgenler prizmasında $[BB']$ ayrıtı üstündeki E noktası $|EB'|=6|EB|$ koşulunu sağlıyor. AEC ve $A'EC'$ üçgenlerinde E ye ait yüksekliklerin ayakları sırasıyla, F ve F' olmak üzere, $m(FEF')=60^\circ$ ise, $|BC|/|BE|$ nedir?

Cevap: $3\sqrt{15}/2$. $|BC|=x$, $|AB|=2x, |EB|=y, |E'B|=6y$ olsun. Pisagor teoreminden $|EA|=\sqrt{4x^2+y^2}$, $|EC|=\sqrt{x^2+y^2}$, $|EA'|=\sqrt{4x^2+36y^2}$, $|EC'|=\sqrt{x^2+36y^2}$, $|AC|=|A'C'|=\sqrt{5}x$ olur. Yine Pisagor teoreminden $3x^2=|AF|^2-|CF|^2=|A'F'|^2-|C'F'|^2$ ve $|AC|=|A'C'|$ olduğundan $|AF|=|A'F'|=4x/\sqrt{5}$ ve $|CF|=|C'F'|=x/\sqrt{5}$ elde ederiz. Buradan da $|FF'|=|AA'|=|BB'|=7y$ olur. Pisagor teoreminden $|EF|=\sqrt{4x^2/5+y^2}$, $|EF'|=\sqrt{4x^2/5+36y^2}$ dir. FEF' üçgeninde kosinüs teoreminden $|EF|^2+|EF'|^2-|EF|\cdot|EF'|=|FF'|^2$ ve buradan da $8x^2/5-12y^2=\sqrt{(4x^2/5+y^2)(4x^2/5+36y^2)}$ elde ederiz. Bu denklemden $k=x^2/y^2$ için $48k^2-1700k+2700=0$ elde ederiz. $8x^2/5-12y^2\ge 0$ olacağından $k\ge 15/2$ olmalıdır. $48k^2-1700k+2700=(3k-5)(16k-540)$ olduğundan $k=135/4$ ve buradan da $|BC|/|BE|=x/y=\sqrt{k}=3\sqrt{15}/2$ olur.

34. $n\ge 2012$ olmak üzere, $1\cdot 2^1+2\cdot 2^2+3\cdot 2^3+\cdots+n\cdot 2^n$ sayısının 10 ile bölünmesini sağlayan en küçük n tam sayısı nedir?

Cevap: 2013. Verilen toplam $(n-1)2^{n+1}+2$ ye eşittir. $n=2012$ için toplamın son basamağı $1\cdot 2+2=4$ tür. $n=2013$ için $2\cdot 4+2=10$ olduğundan toplamın son basamağı 0 dır ve toplam 10 ile bölünür.

35. $x^3+y^4=x^2y$ eşitliğini sağlayan tüm (x,y) pozitif gerçel sayı ikililerinde x in aldığı en büyük değer A ve y nin aldığı en büyük değer B ise, A/B nedir?

Cevap: $\dfrac{A}{B}=\dfrac{\frac{27}{256}}{\frac{4}{27}}=\dfrac{729}{1024}$. x pozitif bir değerde sabitlenirse $y^4-x^2\cdot y+x^3$ polinomu $0<y<\sqrt[3]{\frac{x^2}{4}}$ için azalan ve $\sqrt[3]{\frac{x^2}{4}}<y$ için artandır. $y=\sqrt[3]{\frac{x^2}{4}}$ için $y^4-x^2\cdot y+x^3=x^{8/3}\cdot(x^{1/3}-\frac{3}{4\sqrt[3]{4}})$ olduğundan $y=\frac{9}{64}, x=\frac{27}{256}$ olduğunda eşitlik sağlanır ve $x>\frac{27}{256}$ olduğunda her $y>0$ için $x^3+y^4>x^2y$ olur. Yani $A=\frac{27}{256}$. y pozitif bir değerde sabitlenirse $x^3-y\cdot x^2+y^4$ polinomu $0<x<\frac{2y}{3}$ için azalan ve $\frac{2y}{3}<x$ için artandır. $x=\frac{2y}{3}$ için $x^3-y\cdot x^2+y^4=y^3\cdot(y-\frac{4}{27})$ olduğundan $x=\frac{8}{81}, y=\frac{4}{27}$ olduğunda eşitlik sağlanır ve $y>\frac{4}{27}$ olduğunda her $x>0$ için $x^3+y^4>x^2y$ olur. Yani $B=\frac{4}{27}$.

36. Her kutuda en çok 20 taş olmak koşuluyla k tane taş 2012 kutuya nasıl dağıtılmış olursa olsun, bu kutulardan bazılarını seçip, seçtiğimiz kutulardan istediklerimizden istediğimiz sayıda taş atarak, seçtiğimiz kutularda toplam olarak en az 100 tane ve bu kutuların her birinde eşit sayıda taş kalmasını sağlayabiliyorsak, k en az kaç olabilir?

Cevap: 349. En az t taş içeren kutu sayısı $f(t)$ olsun. 348 taşı $f(20)=4, f(19)=5, f(18)=5, f(17)=5, f(16)=6, f(15)=6, f(14)=7, f(13)=7, f(12)=8, f(11)=9, f(10)=9, f(9)=11, f(8)=12, f(7)=14, f(6)=16, f(5)=19, f(4)=24, f(3)=33, f(2)=49, f(1)=99$ olacak şekilde dağıtabiliriz. Bunun için ilk aşama 99 kutuya birer taş koyuyoruz, ikinci aşamada bu kutulardan 49 tanesine birer taş ekliyoruz, üçüncü aşamada ikişer taş içeren kutulardan 33 tanesine birer taş ekliyoruz, dördüncü aşamada üçer taş içeren kutulardan 24 tanesine birer taş ekliyoruz. Benzer şekilde devam edersek istenilen dağılım elde edilir. $1\cdot 99<100, 2\cdot 49<100, 3\cdot 33<100, 4\cdot 24<100,\cdots, 20\cdot 4<100$ olduğundan bu dağılımda kutulardan bazılarını seçip, seçtiğimiz kutulardan istediklerimizden istediğimiz sayıda taş atarak, seçtiğimiz kutularda toplam olarak en az 100 tane ve bu kutuların her birinde eşit sayıda taş kalmasını sağlayamayız. Taş sayısı 349 olursa, $i = 1, 2, \ldots, 20$ olmak üzere, $f(i)$ sayılarının en az biri artacak ve istenilen koşul sağlanacaktır.