TÜBİTAK

Türkiye Cumhuriyeti
SANAYİ VE TEKNOLOJİ BAKANLIĞI

MATEMATİK

21. ULUSAL
MATEMATİK OLİMPİYATI
BİRİNCİ AŞAMA SINAV
SORU VE ÇÖZÜMLERİ

2013

TÜRKİYE BİLİMSEL VE TEKNOLOJİK ARAŞTIRMA KURUMU
BİLİM İNSANI DESTEK PROGRAMLARI BAŞKANLIĞI

ULUSAL MATEMATİK OLİMPİYATLARI SORU ve ÇÖZÜMLERİ

Ankara

Nisan 2019

1. $|AC| > |AB|$ olan bir ABC üçgeninin iç teğet çemberinin merkezi I ve ağırlık merkezi G olmak üzere, IG ve BC doğruları birbirine paralel, $|BC| = 2$, ve Alan$(ABC) = 3\sqrt{5}/8$ ise, $|AB|$ nedir?

Cevap: 9/8. AG ve AI doğruları BC kenarını sırasıyla D ve E noktalarında kessin. G ağırlık merkezi ve $IG \parallel BC$ olduğundan $|AI|/|IE| = |AG|/|GD| = 2$ olur. BI ve CI sırasıyla ABE ve ACE açılarının açıortayı olduğundan $|AB|/|BE| = |AC|/|CE| = 2$ olur. $|AC| = b$ ve $|AB| = c$ dersek $b + c = 2|BC| = 4$ elde ederiz. Buradan da üçgenin yarı çevre uzunluğu $u = 3$ bulunur. $|BC| = a = 2$ olmak üzere üçgende alan formülünden $u(u-a)(u-b)(u-c) = 45/64$ ve buradan da $(3-b)(3-c) = 15/64$ ve $b + c = 4$ eşitliğini kullanarak $bc = 207/64$ elde ederiz. b ve c sayıları kökleri 23/8 ve 9/8 olan ikinci derece polinomun kökleridir. $c < b$ olduğundan $c = 9/8$ olur.

2. p, q asal sayılar ve n pozitif bir tam sayı olmak üzere, $1/p+2013/q = n/5$ eşitliğini sağlayan kaç (p, q, n) üçlüsü vardır?

Cevap: 7. Eşitlik $5pq$ ile çarpıldığında $5q+5\cdot 2013p = pqn$ elde edilir. Bu eşitlikten $5q$ sayısının p ile bölündüğü görülür. O halde $p = q$ veya $p = 5$ tir. $p = q$ ise, $pn = 5\cdot 2014 = 2\cdot 5\cdot 19\cdot 53$ gelir ve p asal sayı olduğundan 4 çözüm elde edilir $(2, 2, 5035), (5, 5, 2014), (19, 19, 530), (53, 53, 190)$. $p = 5$ ise, $q(n-1) = 5 \cdot 2013 = 3 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 61$ olduğu görülür. q asal sayı olduğundan 3 yeni çözüm gelir $(5, 3, 3356), (5, 11, 916), (5, 61, 166)$. Toplam 7 çözüm vardır.

3. Katsayıları $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ kümesine ait olan bir polinomun $x-6$ ile bölümünden kalan 2013 ise, bu polinomda x in katsayısı en az kaç olabilir?

Cevap: 5. Bu polinoma $P(x)$ diyelim. O halde, bu polinomunun $x-6$ ile bölümünden kalan $P(6)$ dır, yani $P(6) = 2013$. $P(x) = a_n\cdot x^n+\ldots+a_0$ dersek, $2013 = a_n\cdot 6^n+\ldots+a_0 = (a_n \ldots a_0)_6$ olur. Son eşitliği yazarken P nin katsayılarının $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ kümesine ait olduklarını, yani 6 tabanında rakam olduklarını kullandık. $2013 = (13153)_6$ olduğundan $a_1 = 5$ tir.

4. $1, 2, \ldots, 49$ sayıları 7×7 bir satranç tahtasının birim karelerine, ardışık sayılar ortak bir kenar paylaşan birim karelerde yer alacak biçimde yazıldığında bir satırda en fazla kaç asal sayı olabilir?

Cevap: 5. Herhangi iki komşu karedeki sayıların biri tek, biri çifttir. Bu nedenle bir satırda en fazla 4 tane tek sayı bulunur ve dolayısıyla cevap en fazla 5 olur. Aşağıdaki tablonun üçüncü satırında beş tane asal sayı bulunuyor: 5,2,11,19,43.

7	8	9	16	17	46	45
6	1	10	15	18	47	44
5	2	11	14	19	48	43
4	3	12	13	20	49	42
25	24	23	22	21	40	41
26	29	30	33	34	39	38
27	28	31	32	35	36	37

5. $[BC]$ kenarının uzunluğu 11 olan ABC üçgeninin bu kenarı üstünde bir D noktası $|BD| = 8$ olacak biçimde alınıyor. C ve D noktalarından geçen çember AB doğrusuna bir E noktasında teğettir. B den geçen ve DE doğrusuna dik olan doğru üzerinde bulunan bir P noktası için $|PE| = 7$ ise, $|DP|$ kaçtır?

Cevap: 5. Çemberde kuvvetten $|BE|^2 = |BD| \cdot |BC| = 88$ olur. Pisagor Teoreminden $|BE|^2 - |PE|^2 = |BD|^2 - |PD|^2$ ve buradan da $|PD|^2 = 64 + 49 - 88 = 25$ ve $|PD| = 5$ olur.

6. 5 tabanına göre yazılımında 3 ve 4 rakamları geçmeyen en küçük 111. pozitif tam sayı nedir?

Cevap: 755. 5 tabanına göre, yazılımında 3 ve 4 rakamı içermeyen sayılar 0,1 ve 2 rakamlarından oluşur. Bu sebepten dolayı, bu pozitif tam sayılar küçükten büyüğe sıralandığında bir sayının sıra nuumarası o sayının 5 tabanına göre yazılımının 3 tabanına göre açılımına eşittir. $111 = (11010)_3$ olduğundan 111. sayı $(11010)_5 = 625 + 125 + 5 = 755$ tir.

7. $x^4 - 8x^3 + 13x^2 - 24x + 9 = 0$ denkleminin gerçel köklerinin toplamı nedir?

Cevap: 7.

$$x^4 - 8x^3 + 13x^2 - 24x + 9 = (x^2 - 7x + 3)(x^2 - x + 3)$$

olduğundan denklemin sadece iki gerçel kökü vardır ve bu gerçel köklerin toplamları 7'dir.

8. Köşeleri, verilen bir düzgün yirmigenin köşelerinden dördünde yer alan kaç deltoid vardır?

Cevap: 85. Düzgün yirmigenin köşeleri $A_1, A_2, \ldots, A_{20}$ olsun. Deltoidin köşegenlerinden biri bu deltoidi iki ikizkenar üçgene ayırıyor. Bu köşegen deltoidi tek türlü belirliyor. Bu köşegenin A_iA_j $(i > j)$ olması için gerek ve yeter koşul $i - j$ sayısının çift olmasıdır. Böyle (i, j) ikililerinin sayısı $2 \cdot \binom{10}{2} = 90$'dır. 5 tane eşkenar deltoid iki kez sayıldı, bu nedenle cevap $90 - 5 = 85$ olur.

9. ABC üçgeninde $|AB| = 18$, $|AC| = 24$ ve $m(\widehat{BAC}) = 150°$ dir. D noktası $[AB]$, E noktası $[AC]$ ve F noktası $[BC]$ kenarları üstünde olmak üzere, $|BD| = 6$, $|CE| = 8$ ve $|CF| = 2\,|BF|$ dir. ABC üçgeninin diklik merkezi H noktasının D, E ve F noktalarına göre simetrikleri sırasıyla, H_1, H_2 ve H_3 noktaları ise, $H_1H_2H_3$ üçgeninin alanı nedir?

Cevap 96. ABC üçgeninin alanına S dersek, AED, CEF, BDF üçgenlerinin alanları sırasıyla $4S/9$, $2S/9$, $S/9$ olur. Buradan da DEF üçgeninin alanı $2S/9$ olur. $H_1H_2H_3$ üçgeni DEF üçgeniyle benzer olup benzerlik oranı 2 dir. Buradan da $H_1H_2H_3$ üçgeninin alanı $8S/9$ olur. Üçgende sinüslü alan formülünü kullanarak $S = 1/2 \cdot 24 \cdot 18 \cdot \sin 150° = 108$ olduğundan $H_1H_2H_3$ üçgeninin alanı $8S/9 = 96$ olur.

10. n den küçük ve n ile aralarında asal olan tam olarak 20 tane pozitif tek tam sayı bulunmasını sağlayan kaç n pozitif tam sayısı vardır?

Cevap: 6. n çift sayı ise, verilen koşul $\phi(n) = 20$ olduğunu gösterir. ϕ fonksiyonunun çarpımsallığı kullanılarak n nin asal bölenlerinin 2,3,5 veya 11 olabileceği görülür ve buradan da $2 \cdot 3 \cdot 11 = 66, 2 \cdot 5^2 = 50$ ve $2^2 \cdot 11 = 44$ çözümleri gelir. n tek ise, verilen koşul $\phi(2n) = 40$ olmasında denktir. n tek olduğundan, bu da $\phi(n) = 40$ demektir. Bu durumdan da $41, 5 \cdot 11 = 55$ ve $3 \cdot 5^2 = 45$ çözümleri gelir. Toplam 6 sayı koşulu sağlar.

11. $x^4 + y^4 + 2x^2y + 2xy^2 + 2 = x^2 + y^2 + 2x + 2y$ eşitliğini sağlayan kaç (x, y) gerçel sayı ikilisi vardır?

Cevap: 4. Verilen ifade

$$(x^2 + y - 1)^2 + (y^2 + x - 1)^2 = 0$$

olarak yazılabilir. Buradan $x^2 + y = y^2 + x = 1$ elde ederiz. $x = y$ durumunda $x = y = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ olur. $x \neq y$ durumunda $x + y = 1$ olur ve buradan da $(x, y) = (0, 1)$ ve $(x, y) = (1, 0)$ çözümleri gelir.

12. 100 öğrenci, öğleden önce 50 tane ikili grup halinde ve öğleden sonra da, yine 50 tane ikili grup halinde ders çalışıyorlar. Öğleden önceki ve sonraki gruplar nasıl oluşturulursa oluşturulsun, herhangi ikisi gün boyunca hiç birlikte çalışmamış n öğrenci bulunabiliyorsa, n sayısı en çok kaç olabilir?

Cevap: 50. 100 öğrencinin her biri çizgenin bir köşesi olsun. Öğleden önce birlikte çalışan ikilileri kırmızı, öğleden sonra birlikte çalışan ikilileri mavi kenarla birleştirelim. O zaman çizge her birinin uzunluğu çift sayı olan döngülere ayrılacaktır. Her döngüden komşu olmayan köşeleri seçersek koşulları sağlayan 50 öğrenci seçilmiş olur. 50'den fazla öğrenci seçilemeyeceği için cevap 50 olur.

13. Çevrel çemberinin merkezi O olan bir ABC üçgeninin $[BC]$ kenarı üstündeki D ve E noktaları D, B ile E arasında yer almak üzere, $|AD| = |DB| = 6$ ve $|AE| = |EC| = 8$ koşullarını sağlıyor. ADE üçgeninin iç teğet çemberinin merkezi I noktası ve $|AI| = 5$ ise, $|IO|$ nedir?

Cevap: 23/5. ABD ve ACE üçgenleri ikizkenar olduğundan OD ve OE doğruları ADB ve AEC açılarını ortalar. Yani O noktası ADE üçgeninin DE kenarına teğet olan dış teğet çemberinin merkezidir. A, I, O noktadaştır. ADE üçgeninde I iç teğet, O dış teğet çember merkezi olduğundan $ID \perp DO$ ve $IE \perp EO$ olur. Yani I, D, O, E noktaları çemberdeş ve buradan da $\angle ADI = \angle IDE = \angle AOE$ olur. Öte yandan $\angle DAI = \angle OAE$ olduğundan ADI ve AOE üçgenleri benzer olur. Benzerlikten $|AI| \cdot |AO| = |AD| \cdot |AE|$ ve böylece $|AO| = 6 \cdot 8/5 = 48/5$ ve $|IO| = 23/5$ elde edilir.

14. n tam sayısını bölen pozitif tam sayıların sayısı $d(n)$ ile gösterilmek üzere; 64800 sayısının tüm k pozitif tam sayı bölenleri için, $d(k)$ sayılarının toplamı nedir?

Cevap: 1890. $64800 = 2^5 3^4 5^2$ dir. Bu sayının bir k böleni $2^a 3^b 5^c$ formundadır ve $0 \le a \le 5, 0 \le b \le 4$ ve $0 \le c \le 2$ koşulları sağlanır. $d(2^a 3^b 5^c) = (1+a)(1+b)(1+c)$ olduğundan istenen cevap bu tarz tüm üçlü çarpımların toplamıdır ve bu da $(1+2+3+4+5+6)(1+2+3+4+5)(1+2+3) = 21 \cdot 15 \cdot 6 = 1890$ dır.

15. $[1, 2013]$ aralığında yer alan n gerçel sayı nasıl seçilirse seçilsin, kenar uzunlukları birbirinden farklı olup bu sayılardan bazılarına eşit olan bir çokgen bulunuyorsa, n en az kaç olabilir?

Cevap: 13. Seçilmiş sayılardan biri kendisinden küçük olan birkaç sayısın toplamından küçükse çokgen bulunuyor. $[1, 2013]$ aralığında bu koşulu sağlamayan en fazla on iki eleman bulunur: 1,1,2,4,8,16,32,64,128,256,512,1024. Sonuç olarak cevap 13 oluyor.

16. 16 beyaz ve 4 kırmızı top her biri 5 top alabilen 4 kutuya rastgele dağıtılıyor. Her kutuda tam olarak 1 kırmızı top olma olasılığı nedir?

Cevap: $\dfrac{5^4}{\binom{20}{4}}$. 20 top beşer elemanlı 4 farklı gruba $\dfrac{20!}{5!5!5!5!}$, 16 beyaz top dörder elemanlı 4 farklı gruba $\dfrac{16!}{4!4!4!4!}$, 4 kırmızı top birer elemanlı 4 farklı gruba 4! farklı biçimde dağıtılabilir. O zaman her kutuda tam olarak 1 kırmızı top olma olasılığı

$$P = \frac{5!5!5!5!16!4!}{20!4!4!4!4!} = \frac{5^4}{\binom{20}{4}}$$

olur.

17. Kenar uzunluğu 10 olan bir ABC eşkenar üçgeninin iç bölgesindeki bir P noktası için $|PA|^2 + |PB|^2 + |PC|^2 = 128$ ise, kenar uzunlukları $|PA|, |PB|, |PC|$ olan bir üçgenin alanı nedir?

Cevap: $6\sqrt{3}$. BP doğrusuna göre A ile farklı tarafta $PA'B$ eşkenar üçgen olacak şekilde bir A' noktası alalım. $\angle ABC = \angle PBA' = 60°$ olduğundan $\angle ABP = \angle CBA'$ olur. $|AB| = |BC|$ ve $|BP| = |BA'|$

olduğundan $\triangle ABP \cong \triangle CBA'$ ve böylece $|CA'| = |AP|$ buluruz. Benzer şekilde B' ve C' noktalarını $PB'C$ ve $PC'A$ üçgenleri eşkenar olacak biçimde tanımlarsak $|AB'| = |BP|$ ve $|BC'| = |CP|$ olur. Şimdi ise $AB'CA'BC'$ altıgeninin alanını iki farklı yoldan hesaplayacağız. İlk olarak bu altıgenin alanı $PAB', PB'C, PCA', PA'B, PBC', PC'A$ üçgenlerinin alanları toplamına eşittir. Kenarları $|PA|, |PB|, |PC|$ olan üçgenin alanına S dersek bu altı üçgenin alanları toplamı $3S + (|PA|^2 + |PB|^2 + |PC|^2)\sqrt{3}/4$ e eşittir. İkinci olarak altıgenin alanı $ABC, A'BC, B'CA, C'AB$ üçgenlerinin alanları toplamına da eşittir. Eşliklerden $A'BC, B'CA, C'AB$ üçgenlerinin alanları sırasıyla APB, BPC, CPA üçgenlerinin alanlarına eşittir. Buradan altıgenin alanı ABC üçgeninin alanının iki katı yani $50\sqrt{3}$ e eşit olur. $3S + 128\sqrt{3}/4 = 50\sqrt{3}$ olacağından $S = 6\sqrt{3}$ olur.

18. $$\binom{2013}{1} + 2013\binom{2013}{3} + 2013^2\binom{2013}{5} + \cdots + 2013^{1006}\binom{2013}{2013}$$

toplamının 41 ile bölümünden kalan kaçtır?

Cevap: 20. $2013 \equiv 4 \pmod{41}$ dir. Sorudaki toplama T dersek

$$2T \equiv \sum_{i=0}^{1006} 2^{2i+1}\binom{2013}{2i+1} \equiv \frac{(1+2)^{2013} - (1-2)^{2013}}{2} \equiv \frac{3^{2013}+1}{2} \pmod{41}$$

elde edilir. $3^4 \equiv -1 \pmod{41}$ olduğundan $3^{2013} \equiv -3 \pmod{41}$ bulunur. Dolayısıyla $T \equiv 20 \pmod{41}$ elde edilir.

19. x bir gerçel sayı olmak üzere,

$$\sqrt{x^2 - 4x + 7 - 2\sqrt{2}} + \sqrt{x^2 - 8x + 27 - 6\sqrt{2}}$$

ifadesinin alabileceği en küçük değer nedir?

Cevap: $2\sqrt{2}$. A, B ve C noktaları $A = (1,2)$, $B = (3,4)$ ve $C = (\sqrt{2}, x)$ olarak tanımlanırsa, verilen ifade $|AC| + |BC|$ olur. Üçgen eşitsizliğinden $|AC| + |BC| \geq |AB| = 2\sqrt{2}$. Eşitlik $C \in [AB]$ durumunda sağlanır ($x = 1 + \sqrt{2}$) ve cevap $|AB| = 2\sqrt{2}$ olur.

20. Ağırlıkları $1, 2, \ldots, 2013$ gram olan 2013 taşın her birinin üstüne $1, 2, \ldots, 2013$ sayılarından biri, her sayı tam olarak bir kez kullanılarak yazılıyor. Sayılar nasıl yazılırsa yazılsın, tüm taşların üstünde kendi ağırlıklarının yazılıp yazılmadığı, sol kefesindeki ağırlıktan sağ kefesindeki ağırlığın çıkarılmasının sonucunu gösteren iki kefeli bir tartı k kez kullanılarak kontrol edilebiliyorsa, k en az kaç olabilir?

Cevap: 7. Taşlara $2187-2013=174$ tane sıfır ağırlıklı taş ekleyerek taş sayısını $3^7=2187$ olarak alalım. Taşları her biri 729 taştan oluşan en hafif, orta ve en ağır gruba bölelim, hafif grubu sol kefeye, ağır grubu sağ kefeye yerleştirelim. Tartı yanlış bir ağırlık olduğunu kanıtlamıyorsa, bu üç grubu aynı kuralla üçer gruba ayıralım ve en hafif üç grubu sol kefeye, en ağır üç grubu ise sağ kefeye yerleştirelim. Tartı yanlış bir ağırlık olduğunu kanıtlamıyorsa, benzer şekilde devam edelim. Yedinci tartı sonucunda 2187 tane birer elemanlı grup elde edeceğiz. Şimdi 7 den daha az tartıyla yapılamayacağını gösterelim. Her tartı için üç grup tanımlanıyor. Bu grupların birinde ilk tartı sonucunda bir grupta en az $2013/3=671$, ikinci tartı sonucunda en az 224, üçüncü tartı sonucunda en az 75, dördüncü tartı sonucunda en az 25, beşinci tartı sonucunda en az 9, altıncı tartı sonucunda en az 3 eleman olacak. Bu 3 taşın üstüne yazılmış sayıların doğru olup olmadığı kontrol edilmemiş olacaktır.

21. $m(\widehat{C})=90^\circ$ olan bir ABC dik üçgeninin $[AB]$ kenarı üstündeki D ve E noktaları $|AD|=|AC|$ ve $|BE|=|BC|$ koşullarını sağlıyor. AEC ve BDC üçgenlerinin çevrel çemberlerinin ikinci kez kesiştiği F noktası için $|CF|=2$ ise, $|ED|$ nedir?

Cevap: $2\sqrt{2}$. $\angle CBA=\alpha$ olsun. Çemberdeşliklerden $\angle DFC=180-\alpha$, $\angle CFE=90+\alpha$ olur. $|BC|=|BE|$ olduğundan $\angle BEC=90-\alpha/2$ ve $|AC|=|AD|$ olduğundan $\angle CDE=45+\alpha/2$ olur. Yani $\angle CFD=2\angle CED$ ve $\angle CFE=2\angle CDE$ olur. CDE üçgeninin çevrel çember merkezi O olmak üzere $\angle COD=2\angle CED$ ve $\angle COE=2\angle CDE$ olduğundan C,O,F,D ve C,O,F,E noktaları çemberdeştir. Bu ise ancak $O\equiv F$ iken mümkündür. Böylece $|DF|=|FE|=|CF|=2$ olur. Öte yandan çemberdeşlikten $\angle DFE=\angle CBD+\angle CAE=90^\circ$ olduğundan $|DE|=2\sqrt{2}$ olur.

22. $n^4+2n^3-20n^2+2n-21$ sayısı, $0\le n<2013$ koşulunu sağlayan kaç n tam sayısı için, 2013 ile bölünür?

Cevap: 6. $n^4+2n^3-20n^2+2n-21=(n^2+2n-21)(n^2+1)=((n+1)^2-22)(n^2+1)$. $2013=3\cdot 11\cdot 61$ dir. Verilen sayının 3 ile bölünmesi için $n\equiv 0,1 \pmod 3$ olması gerekir. 11 ile bölünebilmesi için $n\equiv -1 \pmod{11}$ olmalıdır. 61 ile bölünmesi için $n+1\equiv \pm 12 \pmod{61}$ veya $n\equiv \pm 11 \pmod{61}$ olmalıdır. Dolayısıyla $n\equiv 11,48,50 \pmod{61}$ olabilir. Çinli Kalan Teoremi'nden çözüm sayısı $2\cdot 1\cdot 3=6$ bulunur.

23. f ve g fonksiyonları tüm $x \neq -1$ gerçel sayıları için,

$$f(2x+1) + g(3-x) = x$$
$$f((3x+5)/(x+1)) + 2g((2x+1)/(x+1)) = x/(x+1)$$

koşullarını sağlıyorsa, $f(2013)$ nedir?

Cevap: 3016. İlk denklemde x yerine $\dfrac{x+2}{x+1}$ yazarsak

$$f(\frac{3x+5}{x+1}) + g(\frac{2x+1}{x+1}) = \frac{x+2}{x+1}$$

elde ederiz. Buradan

$$f(\frac{3x+5}{x+1}) = \frac{2x+4}{x+1} - \frac{x}{x+1} = \frac{x+4}{x+1}$$

gelir. Şimdi x yerine $\dfrac{5-x}{x-3}$ yazarsak $f(x) = \dfrac{3x-7}{2}$ ve $f(2013) = 3016$.

24. Ağırlıkları $1, 2, \ldots, 77$ gram olan 77 taş ağırlıkları birbirinden farklı olan k gruba, her grup kendinden daha hafif gruptan daha az taş içerecek biçimde dağıtılabiliyorsa, k sayısı $\{9, 10, 11, 12\}$ değerlerinden kaçını alabilir?

Cevap: 0. Taşların toplam ağırlığı $1 + 2 + \cdots + 77 = 3003$'e eşittir.
$k = 12$ olsun. Grupların içerdikleri taş sayıları birbirinden farklı olduğundan en az $1 + 2 + \cdots + 12 = 78 > 77$ taş vardır, çelişki.
$k = 11$ olsun. En ağır grubun ağırlığı en az $\dfrac{3003}{11} = 273$ olacak ve grup en az 4 taş içerecektir. Bu nedenle en az $4 + 5 + \cdots + 14 = 99 > 77$ taş vardır, çelişki.
$k = 10$ olsun. En ağır grubun ağırlığı en az $\dfrac{3003}{10} = 300,3$ olacak ve grup en az 4 taş içerecektir. Bu nedenle en az $4+5+\cdots+13 = 85 > 77$ taş vardır, çelişki.
$k = 9$ olsun. En ağır grubun ağırlığı en az $\dfrac{3003}{9} = 333,66$ olacak ve grup en az 5 taş içerecektir. Bu nedenle en az $5+6+\cdots+13 = 81 > 77$ taş vardır, çelişki.

25. $|AB| = |AC|$ olan bir ABC üçgeninde D noktası $[AB]$ kenarı üstünde yer almak üzere, $[CD]$ iç açıortay ve $m(\widehat{ABC}) = 40°$ dir. $[AB]$ kenarının uzantısı üstünde ve B den sonra yer alan bir F noktası için, $|BC| =$

$|AF|$ dir. $[CF]$ nin orta noktası E olmak üzere, ED ve AC doğrularının kesişim noktası G ise, $m(\widehat{FBG})$ nedir?

Cevap: $150°$. $|AB| = |AC| = x$, $|BC| = y$, $|BD| = z$, $|AG| = k$ olsun. $AD = x - z$, $BF = y - x$ olur. Açıortay teoreminden $z/(x-z) = y/x$ ve buradan da $z = xy/(x+y)$ olur. FAC üçgeninde GE kesenine göre Menelaus teoreminden $k/(k+x) = (x-z)/(y-x+z)$ ve buradan da $k = x^3/(y^2 - 2x^2 + xy)$ olur. ABC üçgeninde sinüs teoreminden $y/x = \sin 100/\sin 40 = 2\cos 40$ ve $-1/2 = \cos 120 = 4\cos^3 40 - 3\cos 40$ olduğundan $-1/2 = 4[y/(2x)]^3 - 3y/(2x)$ ve buradan da $x^3 + y^3 = 3x^2y$ elde ederiz. Son eşitlik $x^3/(y^2 - 2x^2 + xy) = y - x$ eşitliğine denktir. Yani $k = y - x$ ve $|GC| = |BC| = y$ buluruz. Buradan da $DC \perp BG$ olur. Son olarak $\angle GBD = 30°$ ve $\angle FBG = 150°$ olur.

26. n pozitif bir tam sayı olmak üzere, $n^3 + 2$ ve $(n+1)^3 + 2$ sayılarının her ikisini de bölen asal sayıların sayısı en çok kaç olabilir?

Cevap: 1. İkisini birden bölen bir p asal sayısı (varsa) ele alalım. $\Rightarrow p|(n+1)^3 + 2 - (n^3+2) = 3n^2 + 3n + 1$. $\Rightarrow p|n(3n^2 + 3n + 1) - 3(n^3 + 2) = 3n^2 + n - 6$. $\Rightarrow p|(3n^2 + 3n + 1) - (3n^2 + n - 6) = 2n + 7$. $\Rightarrow p|8n^3 + 343 - 8(n^3 + 2) = 327 = 3 \cdot 109$. O halde p, 3 veya 109 olabilir. 3 ün iki sayıyı birden bölemeyeceği açık. $n = (109 - 7)/2 = 51$ için iki sayı da 109 ile bölünür.

27. (a, b) ikilisinin $(1, 2)$, $(3, 5)$, $(5, 7)$, $(7, 11)$ değerlerinden kaçı için $P(x) = x^5 + ax^4 + bx^3 + bx^2 + ax + 1$ polinomunun tam olarak bir gerçel kökü vardır?

Cevap: 2. a ve b' nin tüm değerlerinde $P(-1) = 0$. $Q(x)$ polinomunu $P(x) = (x+1)Q(x)$ olarak tanımlarsak

$$Q(x) = (x^4 + (a+1)x^3 + (b-a+1)x^2 + (a-1)x + 1$$

ve

$$Q(x) = (x^2+1)(x^2 + (a-1)x + 1) + (b-a-1)x^2$$

elde ederiz. İlk eşitlikten $(a, b) = (1, 2)$ durumunda $Q(x) > 0$ olur. İkinci eşitlikten $(a, b) = (3, 5)$ durumunda $Q(x) > 0$ olur. $(a, b) = (5, 7)$ ve $(a, b) = (7, 11)$ durumlarında $Q(0) = 1$ ve $Q(-1) < 0$ olduğundan ara değer teoremine göre $(-1, 1)$ aralığında en az yeni bir gerçel kök bulunacaktır.

28. Başlangıçta tahtaya bir (m,n) pozitif tam sayı ikilisi yazılmıştır. Ayşe ve Burak sırayla hamle yapıyorlar ve sırası gelen oyuncu sayılardan birini seçip silerek, yerine bu sayının yarısından küçük olmayan daha küçük bir tam sayı yazıyor. Hamle yapamayan oyunu kaybediyor. Oyuna her sefer Ayşe başlamak üzere, oyun $(m,n) = (7,79),(17,71),(10,101),(21,251),(50,405)$ için birer kez oynanırsa, Ayşe bunlardan kaçını kazanmayı garantileyebilir?

Cevap: 4. (n,n) durumunda hamle yapan oyunu kaybeder: rakip (k,n) hamlesine karşılık olarak durumu (k,k) yapacaktır. $(n,2n+1)$ durumunda hamle yapan oyunu kaybeder: rakip durumu ya (n,n) yada $(k,2k+1)$ yapacaktır. $(n,4n+3)$ durumunda hamle yapan oyunu kaybeder: rakip durumu ya $(n,2n+1)$ yada $(k,4k+3)$ yapacaktır. Benzer şekilde devam edersek $(n,2^{l+1}n+2^l)$ durumunda hamle yapanın oyunu kaybedeceği görülür. Kalan durumlarda hamle yapan oyunu $(n,2^{l+1}n+2^l)$ durumuna getirerek kazanıyor. $(m,n) = (7,79),(17,71),(10,101),(21,251),(50,405)$ durumlarından sadece $(17,71) = (17,2^2\cdot 17+2^2-1)$ gibi gösteriliyor. Bu nedenle cevap 4 olur.

29. $|AB| = 5$, $|BC| = 6$ ve $|AC| = 7$ olan bir ABC üçgeninin çevrel çemberinin merkezi O nun BC, AC ve AB doğrularına göre simetriği sırasıyla, A_1, B_1 ve C_1 noktaları olsun. $A_1B_1C_1$ üçgeninin çevrel çemberinin merkezinin A noktasına uzaklığı nedir?

Cevap: $19/(2\sqrt{6})$. BC, CA, AB kenarlarının orta noktaları sırasıyla D,E,F olsun. $AB \parallel DE \parallel A_1B_1$ ve $|A_1B_1| = 2|DE| = |AB|$ olduğundan $\triangle ABC \cong \triangle A_1B_1C_1$ olur. Öte yandan açı yazarak $\angle AB_1C_1 = \angle AC_1B_1 = 90^\circ - \angle BAC$ olduğunu görebiliriz. $A_1B_1C_1$ üçgeninin çevrel çember merkezi O_1 olmak üzere $|O_1A| = 2|OD|$ olur. ABC üçgeninde çevrel çember yarıçapı R ve alan S olsun. $S = \sqrt{9\cdot 4\cdot 3\cdot 2} = 6\sqrt{6}$ ve $R = (5\cdot 6\cdot 7)/(4S) = 35/(4\sqrt{6})$ olur. Son olarak $|O_1A| = 2|OD| = 2\sqrt{R^2 - |BC|^2/4} = 19/(2\sqrt{6})$ olur.

30. 2013 den küçük kaç n pozitif tam sayısı için, n yi bölen en küçük asal sayı p olmak üzere, p^2+p+1 sayısı n yi böler?

Cevap: 173. $p=2$ ise, n sayısı 14 ile bölünmeli. $2013 = 14\cdot 143 + 11$ olduğundan 143 sayı bulunur. $p=3$ ise, n sayısı 39 ile bölünmeli ve 2 ile bölünmemeli. $2013 = 39\cdot 51 + 24$ olduğundan bu durumda 26 sayı elde edilir. $p=5$ ise, n sayısı 155 ile bölünmeli ancak 2 veya 3 böleni olamaz.

$2013 = 155 \cdot 12 + 153$ olduğundan bu durumda 4 sayı bulunur. $p = 7$ ise, 57 sayısı 3 ile böländüğünden çözüm gelmez. $p = 11$ ise, 133 sayısı 7 ile bölündüğünden çözüm gelmez. $p \geq 13$ için ise, $p(p^2+p+1) > 2013$ olduğundan çözüm bulunmaz. Toplam $143 + 26 + 4 = 173$ sayı şartı sağlar.

31. Gerçel sayılardan oluşan $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ dizisi her $n \geq 3$ için,

$$a_n = (n-1)\,a_1 + (n-2)\,a_2 + \cdots + 2\,a_{n-2} + a_{n-1}$$

eşitliğini sağlamaktadır. $a_{2011} = 2011$ ve $a_{2012} = 2012$ ise, a_{2013} nedir?

Cevap: 4025. $n \geq 3$ olmak üzere verilen formül n ve $n+1$ için yazılıp taraf tarafa çıkarılırsa, $a_{n+1} - a_n = a_n + \ldots + a_1$ bulunur. Bu formül de n ve $n+1$ için yazılıp taraf tarafa çıkarılırsa $a_{n+2} + a_n = 3 \cdot a_{n+1}$ bulunur. O halde, $a_{2013} + a_{2011} = 3 \cdot a_{2012} \Rightarrow a_{2013} = 3 \cdot 2012 - 2011 = 4025$.

32. Yalnızca 1, 2, 3 rakamları kullanılarak, ilk ve son basamaklarında aynı rakam yer alan ve herhangi ardışık iki basamağında aynı rakam yer almayan kaç farklı 10 basamaklı pozitif tam sayı yazılabilir?

Cevap: 510. Yalnızca 1, 2, 3 rakamları kullanılarak, ilk ve son basamaklarında aynı rakam yer alan ve herhangi ardışık iki basamağında aynı rakam yer almayan n basamaklı pozitif tam sayı sayısı $f(n)$ olsun. O zaman $f(1) = 3, f(2) = 0, f(3) = 6$ olup

$$f(n) = 3 \cdot 2^{n-2} - f(n-1)$$

olacaktır (ilk basamak için 3 seçenek bulunuyor ve bundan sonra her yeni basamak için 2 seçenek var, fakat ilk basamakla $n-1$. basamak aynı olamaz). O zaman $f(4) = 6, f(5) = 18, f(6) = 30, f(7) = 66, f(8) = 126, f(9) = 258$ ve $f(10) = 510$ olur.

33. Bir ABC üçgeninde $[BC]$ kenarı üstünde $|BD| = 4$ ve $|DC| = 3$ olacak biçimde yer alan D noktası için, $[AD]$ iç açıortaydır. $[AB]$ kenarı üstünde yer alan ve $m(\widehat{BED}) = m(\widehat{DEC})$ koşulunu sağlayan A dan farklı bir E noktası için, $[AE]$ doğru parçasının orta dikmesi ile BC doğrusu M noktasında kesişiyorsa, $|CM|$ nedir?

Cevap: 9. D noktası AEC üçgeninin EC kenarına teğet olan dış teğet çemberinin merkezidir. $|BE| = 4k$ ve $|AB| = 4\ell$ dersek $|EC| = 3k$ ve $|AC| = 3\ell$ olur. $[AE]$ nin orta noktası F olsun. $|AF| = |FE| = 2\ell - 2k$ olur. D den AB doğrusuna inilen dikmenin ayağı T olsun. D dış teğet çember merkezi olduğundan $|AT|$ uzunluğu AEC üçgeninin yarı çevre uzunluğuna eşittir. Yani $|AT| = (7\ell - k)/2$ ve $|TL| = (7k - \ell)/2$ olur. Buradan da $|BT| = (k+\ell)/2 = |BF|/4$ elde ederiz. $DT \parallel MF$ olduğundan $1/4 = |BT|/|BF| = |BD|/|BM|$ ve $|BM| = 16$, $|CM| = 9$ olur.

34. $a! + b^3 = 18 + c^3$ eşitliğini sağlayan kaç (a, b, c) pozitif tam sayı üçlüsü vardır?

Cevap: 1. $a \geq 7$ ise, eşitliği (mod 7) de inceleyelim. Bir tam küp (mod 7) de $-1, 0, 1$ değerlerini alabildiğinden $b^3 \equiv 4 + c^3 \pmod 7$ denkliğini sağlayan tam sayılar bulunmaz. O halde $a \leq 6$. $a = 1$ veya $a = 2$ için çözüm olmadığını görmek kolay. $3 \leq a \leq 5$ için $a! \equiv 3, 6 \pmod 9$. Öte yandan bir tam küp (mod 9) da $-1, 0, 1$ değerlerini alabilir ve bu sebepten eşitlik (mod 9) da incelendiğinde çözüm olmadığı görülür. O zaman a yalnızca 6 olabilir. $\Rightarrow c^3 - b^3 = (c-b)(c^2 + cb + b^2) = 702 = 2 \cdot 3^3 \cdot 13$. O halde $c - b = 2, 3, 6$ olabilir çünkü $(c-b)^2 + 3cb = c^2 + cb + b^2$. Aynı eşitlik kullanılarak tek çözümün $c = 9$ ve $b = 3$ olduğu görülür. Sadece $(6, 3, 9)$ üçlüsü eşitliği sağlar.

35. $f(x) = x + 1 + \lfloor \sqrt{x} \rfloor$ olmak üzere, $\overbrace{f(f(\cdots(f}^{21 \text{ kere}}(n))) = 2013$ olmasını sağlayan en küçük n pozitif tam sayısı nedir? (Burada $\lfloor a \rfloor$ ile, a gerçel sayısından büyük olmayan en büyük tam sayı gösterilmektedir.)

Cevap: 1178. f kesin artan bir fonksiyondur, o halde birebirdir. $0 < m < n$ ise $f^{-1}(f^{-1}(n(n+1) + m)) = f^{-1}(n^2 - 1 + m) = (n-1)n + m - 1$ olduğu kolaylıkla görülür. $2013 = 44 \cdot 45 + 33$ olduğundan $\overbrace{f^{-1}(f^{-1}(\cdots(f^{-1}}^{20 \text{ kere}}(2013))) = 34 \cdot 35 + 23$ olmalıdır. O halde, $\overbrace{f(f(\cdots(f}^{21 \text{ kere}}(n))) = 2013$ ise $f(n) = 34 \cdot 35 + 23 \Rightarrow n = 34^2 - 1 + 23 = 1178$ olmalıdır.

36. En az 10, en çok 50 üyesi olan bir satranç kulübü, $K > E$ olmak üzere, K kız ve E erkekten oluşuyor. Herhangi iki üyenin kendi aralarında tam olarak bir maç yaptığı bir satranç turnuvasında her galibiyete 1, her beraberliğe $1/2$ ve her yenilgiye 0 puan veriliyor. Turnuva bittiğinde, her üyenin topladığı puanların tam olarak yarısını erkek üyelerle yaptığı maçlardan aldığı gözleniyorsa, E sayısı kaç farklı değer alabilir?

Cevap: 4. Kızlar erkeklere karşı oynadıkları maçlarda toplam a, erkekler ise kızlara karşı oynadıkları maçlarda toplam b puan alsınlar. O zaman $\binom{K}{2} = a$ ve $\binom{E}{2} = b$ ve $a + b = KE$ olur. Buradan $K + E = (K - E)^2$ gelir. Sonuç olarak $K + E$ ifadesinin alabileceği değerler 16,25,36,49, E sayısının alabileceği değerler ise 6, 10, 15, 21 olur. Şimdi bu durumlar için birer örnek kuralım. Tüm örneklerde herhangi iki erkek arasında ve herhangi iki kız arasındaki maçlar beraberlikle sonuçlanıyor ve beraberlikle sonuçlanmayan tüm maçları kızlar kazanıyor. $K = 10$ ve $E = 6$ örneği için kızları 5 tane ikişer elemanlı ve erkekleri 3 tane ikişer elemanlı gruplara ayıralım. Bir gruptaki kızlar T_0, T_1 ve bir başka gruptaki erkekler S_0, S_1 olsun. $i = 0, 1$ için T_i, S_i'yi yenip, S_{i+1} ile $\pmod 2$ berebere kalsın. Diğer grup ikilileri arasındaki maçlar da benzer şekilde biterse koşullar sağlanmış olur. $K = 15$ ve $E = 10$ örneği için kızları 3 tane beşer elemanlı ve erkekleri 2 tane beşer elemanlı gruplara ayıralım. Bir gruptaki kızlar T_0, T_1, T_2, T_3, T_4 ve bir başka gruptaki erkekler S_0, S_1, S_2, S_3, S_4 olsun. $i = 0, 1, 2, 3, 4$ için T_i, S_i ve S_{i+1}'i yenip, $S_{i+2}, S_{i+3}, S_{i+4}$ ile $\pmod 5$ berebere kalsın. Diğer grup ikilileri arasındaki maçlar da benzer şekilde biterse koşullar sağlanmış olur. $K = 21$ ve $E = 15$ örneği için kızları 7 tane üçer elemanlı ve erkekleri 5 tane üçer elemanlı gruplara ayıralım. Bir gruptaki kızlar T_0, T_1, T_2 ve bir başka gruptaki erkekler S_0, S_1, S_2 olsun. $i = 0, 1, 2$ için T_i, S_i'i yenip, S_{i+1}, S_{i+2} ile $\pmod 3$ berebere kalsın. Diğer grup ikilileri arasındaki maçlar da benzer şekilde biterse koşullar sağlanmış olur. $K = 28$ ve $E = 21$ örneği için kızları 4 tane yedişer elemanlı ve erkekleri 3 tane yedişer elemanlı gruplara ayıralım. Bir gruptaki kızlar $T_0, T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_6$ ve bir başka gruptaki erkekler $S_0, S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6$ olsun. $i = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$ için T_i, S_i ve S_{i+1}'i yenip, $S_{i+2}, S_{i+3}, S_{i+4}, S_{i+5}, S_{i+6}$ ile $\pmod 7$ berebere kalsın. Diğer grup ikilileri arasındaki maçlar da benzer şekilde biterse koşullar sağlanmış olur.