Türkiye Cumhuriyeti
SANAYİ VE TEKNOLOJİ BAKANLIĞI

MATEMATİK

23. ULUSAL
MATEMATİK OLİMPİYATI
BİRİNCİ AŞAMA SINAV
SORU VE ÇÖZÜMLERİ

2015

TÜRKİYE BİLİMSEL VE TEKNOLOJİK ARAŞTIRMA KURUMU
BİLİM İNSANI DESTEK PROGRAMLARI BAŞKANLIĞI

ULUSAL MATEMATİK OLİMPİYATLARI SORU ve ÇÖZÜMLERİ

Ankara

Nisan 2019

1. Bir $ABCD$ dikdörtgeninin iç bölgesinde $EF \parallel AC$ olacak şekilde E ve F noktaları veriliyor. E ve F nin AB kenarı üzerindeki izdüşümleri ile beraber oluşturdukları yamuğun alanı 3, BC kenarı üzerindeki izdüşümleri ile beraber oluşturdukları yamuğun alanı 4, CD kenarı üzerindeki izdüşümleri ile beraber oluşturdukları yamuğun alanı 5 olduğuna göre, AD kenarı üzerindeki izdüşümleri ile beraber oluşturdukları yamuğun alanı kaçtır?

Cevap: 4. E ve F nin AB, BC, CD, DA üzerindeki izdüşümleri $E_1, E_2, E_3, E_4, F_1, F_2, F_3, F_4$ olsun. $\text{Alan}(EFF_1E_1) = 3, \text{Alan}(EFF_2E_2) = 4, \text{Alan}(EFF_3E_3) = 5$ verilmiş, $\text{Alan}(EFF_4E_4)$ soruluyor. $EF \parallel AC$ olduğu için $\text{Alan}(E_1E_3F_3F_1) = \text{Alan}(E_2E_4F_4F_2)$ olur. $4 + \text{Alan}(EFF_4E_4) = \text{Alan}(EFF_2E_2) + \text{Alan}(EFF_4E_4) = \text{Alan}(E_2E_4F_4F_2) = \text{Alan}(E_1E_3F_3F_1) = \text{Alan}(EFF_1E_1) + \text{Alan}(EFF_3E_3) = 8 \Rightarrow \text{Alan}(EFF_4E_4) = 4$.

2. Birkaç pozitif tam sayının en küçük ortak katları 2015 ise bu sayıların toplamı en az kaç olabilir?

Cevap: 49. $2015 = 5 \cdot 13 \cdot 31$. En küçük ortak katları 2015 olan birkaç pozitif tam sayının toplamı en az $5 + 13 + 31 = 49$ olur.

3. $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots$ sonsuz geometrik dizisinin bazı elemanları silinerek toplamı S ye eşit olan bir sonsuz geometrik dizi elde edilebiliyorsa, S sayısı $\frac{1}{2015}, \frac{1}{215}, \frac{1}{15}, \frac{1}{5}$ değerlerinden kaçına eşit olabilir?

Cevap: 1. $S = \frac{2^{-k}}{1-2^{-n}}$ oluyor. Buradan $S^{-1}2^{n-k} = 2^n - 1$. elde ederiz. S^{-1} bir tam sayı ve eşitliğin sağ taraf tek sayı olduğundan tek seçenek $n = k$ olur: $S^{-1} = 2^n - 1$. Demek ki S'in alabileceği tek değer $k = n = 4$ durumunda $1/15$ dir.

4. Düzlemdeki n doğrunun her biri diğer doğruların tam olarak 2015 tanesiyle kesişiyorsa, n kaç farklı değer alabilir?

Cevap: 8. Doğruları birbirlerine paralel olan doğru gruplarına ayırırsak her grupta tam olarak $n - 2015$ doğru bulunacak. Grup sayısı k olursa $2015k = n(k-1)$ elde ederiz. k ile $k - 1$ aralarında asal olduğundan $k - 1$ sayısı 2015'i bölecektir. $2015 = 5 \cdot 13 \cdot 31$ olduğundan k sayısı $2, 6, 14, 32, 2016, 5 \cdot 13 + 1, 5 \cdot 31 + 1, 13 \cdot 31 + 1$ olmak üzere 8 farklı değer alıyor.

5. Bir $ABCD$ karesinin $[AC]$ köşegeni üzerinde $|AE| = |EF| = |FC|$ olacak şekilde E ve F noktaları alınıyor. ACD üçgeninin iç bölgesinde bulunan ve AD kenarına teğet olan O_1 merkezli bir çember AC kenarına da E noktasında teğettir. Benzer şekilde ACD üçgeninin iç bölgesinde bulunan ve CD kenarına teğet olan O_2 merkezli bir çember AC kenarına da F noktasında teğettir. Buna göre BO_1O_2 üçgeninin alanının DO_1O_2 üçgeninin alanına oranı kaçtır?

Cevap: $\dfrac{13 + 12\sqrt{2}}{17}$. Genelliği bozmadan $|AB| = 1$ alabiliriz. Bu durumda $|AE| = |EF| = |FC| = \dfrac{\sqrt{2}}{3}$ olur. BD doğrusu O_1O_2 ve EF doğrularını sırasıyla X ve

Y noktalarında kessin. Bu durumda $\dfrac{|BX|}{|DX|}$ oranını bulmak yeterlidir. $|XY| = |O_1E| = |AE| \cdot \tan 22.5^\circ = \dfrac{2-\sqrt{2}}{3}$ ve $|BY| = |DY| = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ olduğundan

$$\frac{|BX|}{|DX|} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{2-\sqrt{2}}{3}}{\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{2-\sqrt{2}}{3}} = \frac{13+12\sqrt{2}}{17}$$

olur.

6. 2323^{2323} ün pozitif tam bölenlerinin bazılarından oluşan $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ kümesinde hiçbir eleman bir diğerini tam bölmüyorsa, n nin alabileceği en büyük değer nedir?

Cevap: 2324. $0 \le x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_n \le 2323$ olmak üzere $a_i = 23^{x_i} \cdot 101^{y_i}$ diyebiliriz. a_i lerden hiçbiri bir diğerini tam bölmüyorsa x_i ler birbirinden hep farklı olmalı, o halde cevap 2324'ü geçemez. Öte yandan $1 \le i \le 2324$ için $(x_i, y_i) = (i-1, 2324-i)$ ikilileri istenen şartı sağlar, yani cevap 2324'tür.

7. $xy(x-y) = 1$ ve $x^2 - xy + y^2 = y + 1$ koşullarını sağlayan (x, y) gerçel sayı ikilileri için $x^2 + y^2$ ifadesinin alabileceği en büyük ve en küçük değerlerin farkı kaçtır?

Cevap: $\sqrt{5}$. $xy(x-y) = 1$ olduğundan $x^2 - xy = \dfrac{1}{y}$ ve buradan da $y + 1 = x^2 - xy + y^2 = y^2 + \dfrac{1}{y} \iff (y-1)^2(y+1) = 0$ olur. $y = 1$ için $x^2 - x - 1 = 0$ ve buradan da $x = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ ve $y = -1$ için $x^2 + x + 1 = 0$ olur ve bu durumda gerçel çözüm yoktur.

8. $a_i \in \{0, 1\}$ olmak üzere, kaç $(a_1, a_2, \dots, a_{11})$ onbirlisi $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 \ge a_6 + a_7 + a_8 + a_9 + a_{10} + a_{11}$ koşulunu sağlar?

Cevap: 1024. Cevap T olsun. Bir $(a_1, a_2, \dots, a_{11})$ onbirlisinde ilk beş elemandan 0'a eşt olanların sayı $f(5)$, 1'e eşit olanların sayısı $g(5)$, son altı elemandan 0'a eşt olanların sayı $f(6)$ ve son altı elemandan 1'e eşit olanların sayısı $g(6)$ olsun. T sayısı $f(5) < f(6)$ koşulunu sağlayan onbirlilerin sayısıdır. Simetriden dolayı $g(5) < g(6)$ koşulunu sağlayan onbirlilerin sayısı da T'dir. O zaman $g(5) \ge g(6)$ koşulunu sağlayan onbirlilerin sayısı $2^{11} - T$ olur. Yine simetriden dolayı $f(5) \ge f(6)$ koşulunu sağlayan onbirlilerin sayısı da $2^{11} - T$ olur. Buradan $T + (2^{11} - T) = 2^{11}$ ve $T = 2^{10}$ olur.

9. Bir ABC üçgeninin A köşesinden geçen iç açıortay ile B köşesinden geçen kenarortay P noktasında kesişiyor. $|AP| = \sqrt{3}$, $|BP| = 1$, $|CP| = \sqrt{7}$ ise, ABC üçgeninin alanı kaçtır?

Cevap: $2\sqrt{3}$. AC kenarının orta noktası D ve $|AD| = |DC| = x, |PD| = y, |AB| = z$ olsun. Kenarortay teoreminden $x^2 + y^2 = 5$ ve açıortay teoreminden $x = yz$ olur. ABD üçgeninde açıortay uzunluğu hesabından $xz - y = 3$ ve buradan da

$x^2-y^2=3y$ bulunur. Buradan da $2y^2=5-3y$ ve $y=1$, $x=2$ olur. $|BP|=|PD|$ olduğundan $AP\perp BD$ elde edilir. Buradan ABC üçgeninin alanı $2\sqrt{3}$ olur.

10. Her $i\in\{1,2\ldots 22\}$ için a_i, a_{i+1} i tam bölecek ve a_{23} de 2015 i tam bölecek biçimde kaç farklı $(a_1,a_2,\ldots,a_{23})$ pozitif tam sayı 23-lüsü vardır?

Cevap: 24^3. $b_1=a_1$, $2\le i\le 23$ için $b_i=\dfrac{a_i}{a_{i-1}}$ ve $b_{24}=\dfrac{2015}{a_{23}}$ dersek, $b_1\cdot b_2\cdots b_{24}=2015$ denkleminin pozitif tam sayı çözümlerini aradığımız görülür. $2015=5\cdot13\cdot31$ olduğundan ve $5,13,31$ den her biri 24 yerden (yani $b_1,b_2,\ldots,b_{24}$) herhangi birine bağımsız olarak gidebileceğinden cevap 24^3 olur.

11. a ve b, $a+b=1$ koşulunu sağlayan gerçel sayılar olmak üzere, $(a^2-b)(b^2-a)$ ifadesinin alabileceği en küçük değer nedir?

Cevap: -5. $(a^2-b)(b^2-a)=(ab)^2+ab-(a+b)\left[(a+b)^2-3ab\right]=(ab)^2+4ab-1=(ab+2)^2-5\ge-5$ olur. Eşitlik durumu $(a,b)=(2,-1)$ iken sağlanır.

12. Köşeleri, verilmiş bir düzgün n-genin köşeleri üzerinde olan ikizkenar üçgenlerin sayısı $s(n)$ olmak üzere, $s(n)>s(n+1)$ koşulunu sağlayan kaç $n\le 2015$ pozitif tam sayısı vardır?

Cevap: 336. İkizkenar üçgeninin tepe noktasını $\binom{n}{1}$ şekilde seçebiliriz. Geriye kalan iki nokta ise ikizkenar üçgen oluşturabilmek için $\lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor$ farklı şekilde seçilebilir. Dolayısıyla oluşturulabilecek ikizkenar üçgen sayısı $n\lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor$ dır. Ancaak, oluşturulan ikizkenar üçgenler içinde eşkenar olanları (varsa) 3 kez saydık. Bu yüzden, eğer n sayısı 3 ile tam bölünüyorsa bu ifadeden $\frac{2n}{3}$ çıkarılmalı. O zaman $n+1$ sayısı 3 ile tam bölünmüyorsa $s(n)\le s(n+1)$ olduğu açık. $s(6k-1)=(6k-1)(3k-1)=18k^2-9k+1$ ve $s(6k)=6k(3k-1)-4k=18k^2-10k$ olduğundan $k\ge1$ için $s(6k-1)>s(6k)$ olur. $s(6k+2)=(6k+2)3k=18k^2+6k$ ve $s(6k+3)=(6k+3)(3k+1)-2(2k+1)=18k^2+11k+1$ olduğundan her $k\ge1$ için $s(6k+2)<s(6k+3)$ olur. O halde şartı sağlayan sayılar $6k-1$ formunda olan sayılardır ve bunlar da $5,11,17,23,\ldots,2015$ tir.

13. Bir ABC üçgeninin $[BC]$ kenarı üzerinde $|BA_1|=|A_1A_2|=|A_2C|$ olacak biçimde A_1 ve A_2 noktaları alınıyor. Benzer şekilde $[CA]$ kenarı üzerinde $|CB_1|=|B_1B_2|=|B_2A|$ olacak biçimde B_1 ve B_2 noktaları alınıyor. AA_1 doğrusu BB_1 ve BB_2 doğrularını sırasıyla X ve W noktalarında, AA_2 doğrusu da BB_1 ve BB_2 doğrularını sırasıyla Y ve Z noktalarına kesiyor. Buna göre $XYZW$ dörtgeninin alanının ABC üçgeninin alanına oranı kaçtır?

Cevap: $\dfrac{9}{70}$. Menelaus teoreminden

$$\frac{|A_2Y|}{|AY|}=\frac{|BA_2|}{|BC|}\cdot\frac{|CB_1|}{|B_1A|}=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{3}$$

$$\frac{|A_2Z|}{|AZ|}=\frac{|BA_2|}{|BC|}\cdot\frac{|CB_2|}{|B_2A|}=\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{1}=\frac{4}{3}$$

olduğundan

$$|AZ| : |ZY| : |A_2Y| = 12 : 9 : 7$$

olur. Yine Menelaus teoreminden

$$\frac{|A_1X|}{|AX|} = \frac{|BA_1|}{|BC|} \cdot \frac{|CB_1|}{|B_1A|} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$

$$\frac{|A_1W|}{|AW|} = \frac{|BA_1|}{|BC|} \cdot \frac{|CB_2|}{|B_2A|} = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{1} = \frac{2}{3}$$

olduğundan

$$|AW| : |WX| : |A_1X| = 21 : 9 : 5$$

olur. Buradan da

$$\frac{\mathrm{A}(WXYZ)}{\mathrm{A}(ABC)} = \frac{\mathrm{A}(AXY)}{\mathrm{A}(ABC)} - \frac{\mathrm{A}(AWZ)}{\mathrm{A}(ABC)} = \frac{1}{3} \cdot \frac{30 \cdot 21 - 21 \cdot 12}{35 \cdot 28} = \frac{9}{70}$$

olur.

14. 2015 den büyük olmayan pozitif tam sayılardan oluşan $\{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ kümesinde herhangi iki elemanın farkı bu iki elemanın toplamını tam bölmüyorsa, k en fazla kaç olabilir?

Cevap: 672. 672 için örnek gösterelim: $\{1, 4, 7, \ldots, 2014\}$. Bu dizideki herhangi iki $1 + 3n$ ve $1 + 3m$ sayılarının farkı $3(m - n)$, toplamı $2 + 3(m + n)$ olduğundan koşullar sağlanıyor. Herhangi üç ardışık sayıdan en fazla 1 eleman alınabildiğinden cevap 672'den fazla olamaz.

15. $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ ve $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ fonksiyonları, her $x \neq 0$ için

$$f(2x + 1) + g(x - 1) = 3x + 2$$

$$f\left(\frac{x+1}{x}\right) + 3g\left(\frac{1-2x}{2x}\right) = \frac{1}{2x} + 4$$

eşitliklerini sağlıyorsa $f(2015) + g(2015)$ kaçtır?

Cevap: 2014. İkinci eşitlikte x yerine $\frac{1}{2x}$ yazılırsa $f(2x + 1) + 3g(x - 1) = x + 4$ elde edilir. Birinci eşitlik de kullanılarak $g(x - 1) = 1 - x$ ve $f(2x + 1) = 4x + 1$ olduğu görülür. Dolayısıyla $f(2015) + g(2015) = 4029 - 2015 = 2014$ olur.

16. Bir çember etrafına yüz sayı dizilmiştir. Saat yönünde kendisinden sonra gelen ilk iki sayıdan büyük olan sayılara A tipi, saat yönünde kendisinden önce gelen ilk iki sayıdan küçük olan sayılara ise B tipi sayı diyelim (bir sayı hem A hem de B tipi olabilir). A tipi sayıların sayısı 80 ise, B tipi sayıların sayısı en az kaç olabilir?

Cevap: 61. A olmayanlara C diyelim. Bir C ve C den önce gelen en uzun A tipli sayı grubuna blok diyelim. Toplamda $100 - 80 = 20$ tane C tipi sayı var. Demek ki 20 blok var (bloklar tek elemanlı olabiliyor). En büyük sayı T olsun. T den önce gelen iki sayı da C tipidir. O zaman en az bir blokun eleman sayısı birdir. Her blokta soldan ilk 2 eleman dışındakiler B tipidir. Demek ki en az $100 - 19 \cdot 2 - 1 = 61$

B tipi sayı vardır. 19 blokun her birinin en az 4 elemanlı olduğu durum 61 için örnek oluşturur.

17. Düzlemde bir çember ve bu çemberin dış bölgesinde $A_1, A_2, \dots A_n$ noktaları veriliyor. Bu çemberin üzerindeki her A noktası için, $[AA_1], [AA_2], \dots [AA_n]$ doğru parçalarından en az üçü çemberi yalnızca A noktasında kesiyorsa, n en az kaç olabilir?

Cevap: 7. Çemberin merkezi O olsun. A_1O ya paralel olup çembere teğet olan iki doğru vardır, bu doğrular ℓ_1, ℓ_2 ve çembere değdikleri noktalar P_1, P_2 olsun. Soruda verilen koşulu $A = P_1$ ve $A = P_2$ için değerlendirirsek, $A_1, A_2, \dots A_n$ den en az 3'ünün ℓ_1 e göre çember ile farklı tarafta ve en az 3'ünün ℓ_2 ye göre çember ile farklı tarafta olduğunu görürüz, bir de A_1 var, böylece $n \geq 7$ dir. Çember ile merkezdeş olan çok büyük bir düzgün 7-genin köşeleri verilen şartı sağlar, o halde cevap 7.

18. $0 \leq n < 23^2$ koşulunu sağlayan kaç farklı n tam sayısı için, $n^5 + 2n^4 + n^3 - 3n + 2$ sayısı 23^2 ile tam bölünür?

Cevap: 1. $n^5 + 2n^4 + n^3 - 3n + 2 = (n+2)\,[n^4 + (n-1)^2]$ dir. $23 \equiv 3 \pmod 4$ olduğundan -1 sayısı 23 modunda kare kalan değildir. Bu yüzden $n^4 + (n-1)^2$ ifadesi hiçbir n tam sayısı için 23 ile tam bölünmez. Tek çözüm $n = 23^2 - 2$ dir.

19. $f(x) = ax^2 - 3ax + 2a + 23$ fonksiyonu her $1 \leq x \leq 2$ için $|f(x)| \leq 23$ koşulunu sağlıyorsa, a nın alabileceği en büyük değer nedir?

Cevap: 184. $f(x) = a((x - \frac{3}{2})^2 - \frac{1}{4}) + 23$ tür. $1 \leq x \leq 2$ iken $|f(x)| \leq 23$ olması için $a \geq 0$ olması gereklidir. Açıkça görüleceği üzere $[1,2]$ aralığında f en büyük değerini $x = 1$ ve $x = 2$ de alırken en küçük değerini $x = \frac{3}{2}$ de alır. $f(1) = f(2) = 23$ ve $f(\frac{3}{2}) = -\frac{a}{4} + 23 \geq -23$ olması gerektiğinden $a \leq 4 \cdot 46 = 184$ olduğu görülür. $a = 184$ iken de istenen şartlar sağlanır.

20. Başlangıçta 101 top içeren bir kırmızı kutu ve boş bir beyaz kutu bulunuyor. Aslı ve Burak sırayla hamle yaparak bir oyun oynuyorlar. Aslı her hamlesinde bir pozitif tam sayı seçiyor ve kırmızı kutudan seçtiği sayıda topu beyaz kutuya aktarıyor. Burak da her hamlesinde bir pozitif tam sayı seçiyor ve beyaz kutudan seçtiği sayıda topu kırmızı kutuya aktarıyor. Bir sayı en fazla bir kez seçilebiliyor. Sırası gelen oyuncu hamle yapamazsa oyun bitiyor. İlk hamleyi yapan Aslı, beyaz kutuda en fazla kaç top kalmasını garantileyebilir?

Cevap: 101. Aslı ilk olarak 2 sayısını seçiyor ve bundan sonraki her hamlesinde Buraka hamle yapmak için tek seçenek bırakıyor. Buna göre seçilen sayılar dizisi

$$2, -1, 3, -4, 6, -5, 7, -8, \dots, 95, -96, 98, -97, 99, -100, 101$$

olursa oyunun sonunda beyaz kutuda 101 top kalıyor.

21. $|AB| = 11$ ve $|AC| = 9$ koşullarını sağlayan bir ABC üçgeninin iç bölgesinde $|BP| = 7$ ve $|CP| = 3$ koşullarını sağlayan bir P noktası alınıyor. Buna göre $|AP|$ uzunluğunun alabileceği kaç farklı tam sayı değeri vardır?

Cevap: 2. $|AB|^2 + |PC|^2 = 121 + 9 = 81 + 49 = |AC|^2 + |BP|^2$ olduğundan $AP \perp BC$ olur. Buradan da $m(\widehat{APC}) > 90°$ bulunur. $|AP| = x$ dersek $x^2 + 9 < 81$ ve x tamsayı olduğundan $x \leq 8$ olur. Üçgen eşitsizliğinden $6 < x$ olur. Buradan $x = 7, 8$ değerlerini alabilir. Her iki durumda da şartları sağlayan üçgenler mevcuttur.

22. $x^2 + 1 \equiv ax \pmod{23}$ olacak şekilde en az bir x tam sayısının bulunmasını sağlayan kaç farklı $0 \leq a < 23$ tam sayısı vardır?

Cevap: 12. $x^2 + 1 \equiv ax \pmod{23} \iff \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 \equiv \left(\frac{a}{2}\right)^2 - 1 \pmod{23}$ olacağından 23 modunda $x^2 - 1$ formundaki kare kalan sayısını bulmamız gereklidir. Tüm kare kalanlar $0, 1, 4, 9, 16, 2, 13, 3, 18, 12, 8, 6$ ve $x^2 - 1$ formundaki tüm sayılar de $22, 0, 3, 8, 15, 1, 12, 2, 17, 11, 7, 5$ sayılarıdır. Bunlardan $0, 3, 8, 1, 12, 2$ sayıları kare kalan olur. Karşılık gelen a değerleri sırasıyla $2, 21, 4, 19, 6, 17, 10, 13, 12, 11, 14, 9$ olur.

23. Çevresi 23 birim ve alanı 23 birim kare olan kaç farklı ikizkenar üçgen vardır?

Cevap: 2. Kenar uzunlukları $\frac{23}{2} - a, \frac{23}{2} - a, 2a$ olan üçgenin tabana dik olan yüksekliğinin uzunluğu $h = \sqrt{(\frac{23}{2} - a)^2 - a^2} = \sqrt{\frac{23}{2} \cdot (\frac{23}{2} - 2a)}$ dır. O halde biz $23 = a \cdot h = a \cdot \sqrt{\frac{23}{2} \cdot (\frac{23}{2} - 2a)} \Leftrightarrow a^2 \cdot \frac{23}{2} \cdot (\frac{23}{2} - 2a) = 23^2 \Leftrightarrow a^2 \cdot (23 - 4a) = 4 \cdot 23$ denkleminin çözümlerini arıyoruz. $a = \frac{23}{6}$ değerini denediğimizde (yani eşkenar üçgen), $a^2 \cdot (23 - 4a) = \frac{23^3}{6^2 \cdot 3} > 4 \cdot 23$ olur. O halde verilen denklemin en az bir adet $0 < a < \frac{23}{6}$ olmak üzere ve en az bir adet $\frac{23}{6} < a < \frac{23}{4}$ olmak üzere iki çözümü vardır. Bir de $a < 0$ şartını sağlayan ve geometrik anlamı olmayan bir çözüm olduğuna göre başka çözüm olamaz, çünkü denklem 3'üncü derecedir. Yani istenen şartları sağlayan 2 üçgen vardır.

24. Bir sınıftaki 23 öğrenci üç gruba, birbirleriyle arkadaş olan öğrenciler aynı grupta olmayacak şekilde tek türlü dağıtılabiliyorsa, sınıftaki arkadaş ikilisi sayısı en az kaç olabilir?

Cevap: 43. Her öğrenciyi bir nokta ve arkadaşlıkları da bu noktaları birleştiren kenarlarla gösterelim. Gruplar A, B ve C olsun. $A \cup B$ çizgesi bağlantılı olmayıp $A \cup B = G_1 + G_2$ olduğunu varsayalım. O zaman $A \cap G_1$ ve $B \cap G_1$'deki elemanların yerleri değistirilebilir ve bu da tek türlü dağıtılabilme koşuluyla çelişki oluşturur. Benzer şekilde $B \cup C$ ve $A \cup C$ çizgeleri de bağlantılıdır. A, B ve C'nin eleman sayıları sırasıyla a, b ve c olsun. O zaman toplam kenar sayısı en az $a + b - 1 + b + c - 1 + a + c - 1 = 2n - 3 = 46 - 3 = 43$ olacaktır. 43 için örnek: A ve B

hem kendi aralarında hem de herkesle arkadaş olup, A ve B dışındaki herhangi ikili aralarında arkadaş olmazsa koşullar sağlanmış olur.

25. Köşeleri bir çember üzerinde bulunan bir $ABCDE$ beşgeninin kenar uzunlukları $|AB| = |BC| = 7, |CD| = |AE| = 15$ ve $|DE| = 24$ olarak veriliyor. Bu beşgenin alanı kaçtır?

Cevap: 276. C noktasını BD ye paralel olarak kaydırıp çember üzerinde yerleşebileceği diğer noktaya götürürsek $|AB| = |CD| = 7, |AE| = |BC| = 15$ ve $|DE| = 24$ olur ve beşgenin alanı değişmez. $[CE]$ doğru parçası CDE üçgeni ve $ABCE$ ikizkenar yamuğunun ortak kenarıdır. $m(\widehat{CDE}) = 90° \Leftrightarrow |CE| = 25 \Leftrightarrow m(\widehat{CAE}) = m(\widehat{CBE}) = 90°$ olduğunu gözlemlemek kolaydır. O halde, $|CE| > 25$ olsa $m(\widehat{CDE}) + m(\widehat{CAE}) > 90 + 90 = 180$ çelişkisi ve $|CE| < 25$ olsa $m(\widehat{CDE}) + m(\widehat{CAE}) < 90 + 90 = 180$ çelişkisi elde edileceğinden $|CE| = 25$ ve $m(\widehat{CDE}) = m(\widehat{CAE}) = m(\widehat{CBE}) = 90°$ olmalı. Yani $\text{Alan}(ABCDE) = \text{Alan}(CDE) + \text{Alan}(ABCE) = 84 + 192 = 276$ olur.

Çözüm 2. Birinci çözümdeki gibi C köşesini kaydıralım. $|AC| = |BE| = x, |CE| = y$ ve $m(\widehat{CDE}) = \alpha \Leftrightarrow m(\widehat{CAE}) = m(\widehat{CBE}) = 180 - \alpha$ diyelim. Batlamyus'tan $x^2 = 7y + 15^2$. Kosinüs teoreminden $y^2 = x^2 + 15^2 + 2 \cdot 15x \cdot \cos(\alpha)$ ve $y^2 = 24^2 + 7^2 - 2 \cdot 24 \cdot 7 \cdot \cos(\alpha)$ olur. O halde $(24 \cdot 7 + 15x) \cdot y^2 = 24 \cdot 7x^2 + (24^2 + 7^2) \cdot 15x + 24 \cdot 7 \cdot 15^2$. Terimleri taşıyarak bir düzenleme yaparsak, $15x \cdot (y^2 - (24^2 + 7^2)) = 24 \cdot 7 \cdot (x^2 - y^2 + 15^2) = 24 \cdot 7 \cdot (7y - y^2 + 2 \cdot 15^2) \Rightarrow 15x \cdot (y - 25) \cdot (y + 25) = -24 \cdot 7 \cdot (y - 25)(y + 18) \Rightarrow (y - 25) \cdot (15x \cdot (y + 25) + 24 \cdot 7 \cdot (y + 18)) = 0$. Son ifadede ikinci terim pozitif olduğundan $y = 25, x = 20, \alpha = 90°$ bulunur ve birinci çözümde olduğu gibi sonuca ulaşılır.

26. $n > 1$ tam sayısının en büyük ve en küçük asal bölenlerinin toplamı $f(n)$ olmak üzere, $f(n) = n - 23$ denklemini sağlayan kaç farklı $n > 1$ tam sayısı vardır?

Cevap: 3. $p_1 \leq p_2 \leq \cdots \leq p_k$ asal sayılar olmak üzere $n = p_1 p_2 \cdots p_k$ şeklinde (farklı olması gerekmeyen) asalların çarpımı biçiminde gösterildiğinde $f(n) = p_1 + p_k = n - 23 \geq p_1 p_k - 23$ ve buradan da $(p_1 - 1)(p_k - 1) \leq 24$ bulunur. (Eğer n sayısı asalsa yani $k = 1$ ise $f(n) = 2p_1 = p_1 - 23$ olacağından çözüm gelmez.) Öte yandan $p_1 + p_k = n - 23$ olduğundan $p_1 \mid p_k + 23$ ve $p_k \mid p_1 + 23$ olmalıdır. Buradan sadece $(2, 5), (3, 13), (5, 7)$ ikilileri sağlar. Bu durumda karşılık gelen n sayıları sırasıyla $30, 39, 35$ olur.

27. $x^{23} - 2015^{2015}x + 23 = c$ denkleminin en az üç farklı gerçel çözümünün bulunmasını sağlayan tüm c tam sayılarının aritmetik ortalaması kaçtır?

Cevap: Hiçbiri. Bu şartı sağlayan c tam sayılarının bir k pozitif reel sabit sayısı için $(23 - k, 23 + k)$ aralığındaki sayılar olması gerektiği görülür. Türev incelemesi ile k yi hesaplayabiliriz, ama bu sorunun cevabını bulmak için buna gerek yok. k ne olursa olsun $(23 - k, 23 + k)$ aralığındaki tam sayıların aritmetik ortalaması 23 tür.

28. Tabanı $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7$ 7-geni olan bir piramidin her ayrıtının kırmızı ve mavi renklerden birine, bu piramidin her köşesinden herhangi bir diğer köşesine hem sadece kırmızıya boyalı hem de sadece maviye boyalı ayrıtlar takip edilerek ulaşılabilecek şekilde boyanmasına *iyi boyama* diyelim. Kaç iyi boyama vardır?

Cevap: 252. Taban dışındaki kenarların boyama sayısı 2^7. Bir iyi boyamada bu yedi kenarın tümü kırmızı, veya tümü mavi olamaz: $2^7 - 2$. Piramidin tepe noktası O olmak üzere, genelliği bozmadan $[OA_i]$ kırmızı, $[OA_{i+1}]$ mavi renge boyanmış olsun. $[A_iA_{i+1}]$ kenarını herhangi bir renge boyayalım, bu renk de genelliği bozmadan mavi olsun. O zaman $[A_{i+1}A_{i+2}]$ kenarı kırmızı renge boyanma zorunda olacaktır. Benzer şekilde devam edersek diger taban kenarların da tek türlü boyanma zorunda olacaklarını göreceğiz. Demek ki iyi boyama sayısı $2(2^7 - 2) = 252$ dir.

29. İç teğet çemberinin merkezi I olan ve $|AB| = 3$, $|BC| = 7$, $|CA| = 5$ koşullarını sağlayan bir ABC üçgeni verilmiştir. BIC üçgeninin çevrel çemberi üzerinde BC doğrusuna göre I ile farklı tarafta kalacak biçimde alınan bir D noktasından $[BC]$ kenarına inilen dikmenin ayağı E dir. Buna göre $\dfrac{|BE|}{|CE|} = \dfrac{9}{5}$ ise $m\left(\widehat{BAD}\right)$ kaçtır?

Cevap: $60°$. ABC üçgeninde kosinüs teoreminden $\cos A = -1/2$ ve buradan da $m(\widehat{BAC}) = 120°$ elde edilir. ABC üçgeninde BC kenarına teğet olan dış teğet çemberin merkezi J_A olmak üzere bu çemberin BC kenarına değdiği noktaya K dersek $\dfrac{|BK|}{|CK|} = 9/5$ olduğu kolaylıkla görülebilir. Öte yandan J_A noktası BIC üçgeninin çevrel çemberi üzerindedir. Yani D ile J_A çakışık olur. Bu durumda $m(\widehat{BAD}) = 60°$ bulunur.

30. $3(m^3n + n^2 + 1) = m(n^3 + 9m + n)$ denklemini sağlayan kaç farklı (m, n) tam sayı ikilisi vardır?

Cevap: 4. $3(m^3n + n^2 + 1) - m(n^3 + n + 9m) = (mn - 3)(3m^2 - n^2 - 1)$ ve $n^2 \equiv 2 \pmod 3$ denkliğinin tam sayılarda çözümü olmadığından $mn = 3$ olmalıdır. Buradan $(3, 1), (1, 3), (-3, -1), (-1, -3)$ çözümleri gelir.

31. Elemanları 23 den büyük olmayan $a_1, a_2, \ldots, a_n$ pozitif tam sayılar dizisinde ilk ve son eleman dışındaki her eleman iki komşusunun aritmetik ortalamasından büyüktür. Buna göre n' nin alabileceği en büyük değer nedir?

Cevap: 14. Sayı $a_1, \ldots, a_n$ olsun. O zaman

$$a_1 - a_2 < a_2 - a_3 < \cdots < a_{n-1} - a_n$$

oluyor. $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21$ olduğundan $a_i - a_{i+1}$ dizisinde en fazla 6 negatif ve 6 pozitif terim olabiliyor. Demek ki $n \leq 14$. 14 için örnek: 1,7,12,16,19,21,22,22,21,19,16,12,7,1.

32. 23 kentin bulunduğu bir ülkede 250 kent ikilisi arasında karşılıklı uçak seferleri, ülkedeki herhangi bir kentten bir diğerine (doğrudan veya birkaç aktarmayla) en fazla 5 saatlik uçuş süresi sonucunda ulaşılabilecek biçimde nasıl düzenlenirse düzenlensin, k saatlik uçuş sonucunda bir kentten başlayıp her kente en az bir kez uğrayarak baştaki kente dönülebiliyorsa, k nın alabileceği en küçük değer nedir?

Cevap: 110. $250 < \binom{23}{2} = 253$ olduğundan aralarında karşılıklı uçak seferleri bulunmayan en az iki kent vardır. Bune göre A dan B ye en kısa sefer $A \to C \to B$ olacak şekilde A,B ve C kentleri bulunur. O zaman $A \to C \to B \to \cdots \to A$ en fazla $22 \cdot 5 = 110$ saat olur. 110 saat için örnek: Bir A kenti ile diğer tüm kentlerarasında her biri 2.5 saat süren karşılıklı uçak seferleri olsun. A dışındaki kenlerin bazıları arasında da toplam 100 sefer elde etmek için her biri 10 saat süren yollarla birleştirilsin.