Türkiye Bilimsel ve Teknolojik Araştırma Kurumu

27. Ulusal Matematik Olimpiyatı

İkinci Aşama Sınavı

21-22 Aralık 2019

Çözümler

1. a, b, c pozitif gerçel sayıları

$$(\sqrt{ab}-1)(\sqrt{bc}-1)(\sqrt{ca}-1)=1$$

şartını sağlıyor.

$$a-\frac{b}{c},\ \ a-\frac{c}{b},\ \ b-\frac{c}{a},\ \ b-\frac{a}{c},\ \ c-\frac{a}{b},\ \ c-\frac{b}{a}$$

sayılarının en çok kaçı 1 den büyük olabilir?

Çözüm : Cevap: 4.

$(a,b,c)=\left(\frac{5}{4},\frac{5}{4},\frac{36}{5}\right)$ alırsak soruda verilen şart sağlanır ve

$$a-\frac{b}{c}=b-\frac{a}{c}=\frac{155}{144},\ a-\frac{c}{b}=b-\frac{c}{a}=-\frac{451}{100},\ c-\frac{a}{b}=c-\frac{b}{a}=\frac{31}{5}$$

olduğundan tam olarak 4 tane 1 den büyük değer elde ederiz.

Şimdi ise daha fazla 1 den büyük ifade olamayacağını gösterelim. $\sqrt{ab}-1$, $\sqrt{bc}-1$, $\sqrt{ca}-1$ sayıları -1 den büyüktür. Bu üç sayının çarpımı 1 olduğundan, en az biri ≤ 1 ve en az biri ≥ 1 olmalıdır. Genelliği bozmadan $\sqrt{ab}-1\leq 1$ ve $\sqrt{bc}-1\geq 1$ olsun. Bu durumda $ab\leq 4\leq bc$ olur. AGO eşitsizliğinden

$$b+c\geq 2\sqrt{bc}\geq 4\geq ab$$

elde ederiz. Buradan da $b+c\geq ab$ ve $c\geq b(a-1)$ elde edilir ve böylece $a-\frac{c}{b}\leq 1$ olur.
İki durum inceleyeceğiz:

1. Durum : $\sqrt{ca}-1\leq 1$.
Bu durumda $ca\leq 4\leq bc$ ve buradan da $ca\leq b+c$ yani $a-\frac{b}{c}\leq 1$ olur.

2. Durum: $\sqrt{ca}-1\geq 1$.
Bu durumda ise $ab\leq 4\leq ca$ ve $ab\leq c+a$ olduğundan $b-\frac{c}{a}\leq 1$ elde ederiz.

Yani her durumda en az 2 tane 1 den büyük olmayan ifade buluruz. Bu da cevabın 4 olduğunu gösterir.

2. Her n pozitif tam sayısı için $d(n)$ ile n nin pozitif bölenlerinin sayısını gösterelim. k verilmiş bir tek sayı olmak üzere,

$$\text{obeb}(k,\ d(a_1)d(a_2)\cdots d(a_{2019}))=1$$

olmasını sağlayan bir $(a_1, a_2, \dots, a_{2019})$ artan aritmetik pozitif tam sayı dizisi bulunduğunu gösteriniz.

Çözüm: Öncelikle herhangi iki terimi aralarında asal olan 2019 terimli artan bir aritmetik dizi bulalım. Her $1 \leq i \leq 2019$ için $b_i = i \cdot 2019! + 1$ olsun. $i \neq j$ olmak üzere, bir p asal sayısı için $p | i \cdot 2019! + 1$ ve $p | j \cdot 2019! + 1$ ise, $p | (i-j) \cdot 2019!$ olur ve bu da $0 < |i-j| < 2019$ olduğundan $p \leq 2019$ demektir. O halde $p | 2019!$ olur ancak bu $p | i \cdot 2019! + 1$ ile çelişir. Demek ki $(b_1, \dots, b_{2019})$ dizisinin herhangi iki terimi aralarında asaldır.

$p_1, \dots, p_m$ farklı asal sayılar olmak üzere $n = \prod_{i=1}^m p_i^{\alpha_i}$ ise, $\sigma(n) = \prod_{i=1}^m (\alpha_i + 1)$ olduğunu hatırlayalım. $p | b_1 b_2 \cdots b_{2019}$ olan bir p asal sayısını ele alalım. Bu durumda $p | b_i$ olan tam olarak bir i sayısı vardır. $b_i = p^\alpha t$ olsun ($(p,t) = 1$). $(\alpha + 1, k) \neq 1$ ise, k'nın $\alpha + 1$'i bölen asal bölenleri $p_1, \dots, p_r$, $\alpha + 1$'i bölmeyen asal bölenleri $q_1, \dots, q_s$ olsun. k tek sayı olduğu için $p_1, \dots, p_r, q_1, \dots, q_s$'nin hiçbiri 2 değildir. Çinli kalan teoreminden dolayı her $1 \leq i \leq r$ ve $1 \leq j \leq s$ için

$$\begin{aligned} \beta &\equiv 1 \pmod{p_i} \\ \beta &\equiv 0 \pmod{q_j} \end{aligned}$$

olacak şekilde bir β pozitif tam sayısı vardır. Bu dizinin her terimi p^β ile çarpıldığında dizi terimlerinin pozitif bölen sayılarının çarpımında p'den kaynaklı çarpan $(\beta + 1)^{2018}(\alpha + \beta + 1)$ olur. β'nın seçiminden dolayı da bu çarpan k ile aralarında asaldır. $b_1 b_2 \cdots b_{2019}$'nin her asal böleni için aynı işlem uygulandığında sonuçta oluşan dizi istenen şartı sağlar.

3. 2019 öğrencinin bulunduğu bir okuldaki öğrenci kulüplerine sadece öğrenciler üye olabilmektedir. Her öğrenci kulübünün, kendi üyeleri arasından seçilmiş 12 kişilik bir yönetim kurulu vardır. Bir kulüp toplantısı ancak katılımcıların hepsi kulübün üyeleriyse ve kulübün yönetim kurulunun hepsi katılımcılar arasındaysa gerçekleşebilir. Bu okulda, eleman sayısı en az 12 olan her öğrenci kümesinin, tam olarak bir öğrenci kulübünün toplantılarını gerçekleştirebildiği biliniyor. Buna göre, tam olarak 27 üyesi olan öğrenci kulüplerinin sayısının alabileceği tüm değerleri bulunuz.

Çözüm: Cevap: Sadece $\binom{2003}{11}$.

Her $12 \leq n \leq 2019$ için tam olarak n öğrenciden oluşan kulüplerin sayısı K_n olsun. $K_n = \binom{2030-n}{11}$ eşitliğinin her $12 \leq n \leq 2019$ için sağlandığını göstereceğiz.

$12 \leq m \leq n \leq 2019$ olmak üzere, bir kulüp n öğrenciden oluşuyorsa, bu kulübün toplantısı tam olarak $\binom{n-12}{m-12}$ farklı m öğrencili küme tarafından gerçekleştirilebilir. Dolayısıyla m öğrenciden oluşan kümeleri kulüpler üzerinden sayarak

$$\sum_{n=m}^{2019} K_n \binom{n-12}{m-12} = \binom{2019}{m} \tag{1}$$

özdeşliğini elde ederiz.

$12 \leq j \leq 2031 - m$ olmak üzere, $\{1, 2, \cdots, 2019\}$ kümesinin en küçük 12-inci elemanı j olan m elemanlı altkümelerinin sayısı $\binom{j-1}{11}\binom{2019-j}{m-12}$'dir. Buradan

$$\sum_{j=12}^{2031-m} \binom{j-1}{11}\binom{2019-j}{m-12} = \binom{2019}{m} \tag{2}$$

elde edilir. (2)'de $j = 2031 - n$ yazılırsa

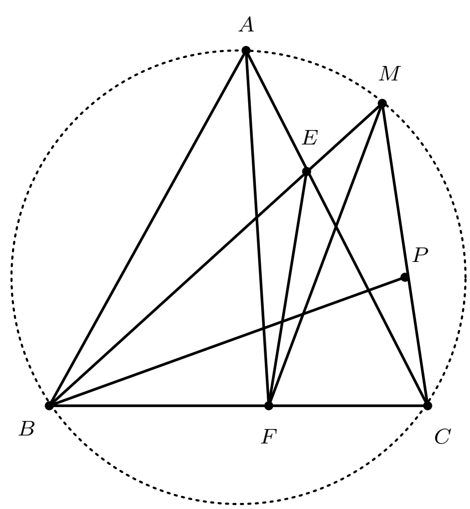
$$\sum_{n=m}^{2019} \binom{2030-n}{11}\binom{n-12}{m-12} = \binom{2019}{m} \tag{3}$$

özdeşliği bulunur. (1) ve (3)'te m'yi sırasıyla 2019, 2018, 2017,... alarak $12 \leq n \leq 2019$ için $K_n = \binom{2030-n}{11}$ elde edilir. Sonuç olarak $K_{27} = \binom{2003}{11}$'dir.

Son olarak soru koşullarının sağlandığı bir duruma örnek verelim. Öğrencileri 1'den 2019'a kadar numaralandıralım. Her $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_{12} \leq 2019$ için numaraları $i_1, i_2, \ldots, i_{11}, i_{12}, i_{12}+1, i_{12}+2, i_{12}+3, \ldots, 2019$ olan öğrenciler bir kulüp oluştursun ve bu kulübün yönetim kurulu $i_1, i_2, \ldots, i_{11}, i_{12}$ numaralı öğrenciler olsun. Bu kulüpler sorudaki şartları sağlar.

4. $|AB| = |AC|$ şartını sağlayan bir ABC üçgeninin çevrel çemberinin küçük AC yayı üzerinde uç noktalardan farklı bir M noktası alınıyor. BM nin AC yi kestiği nokta E, BMC açısının iç açıortayının BC yi kestiği nokta F olmak üzere $m(\widehat{AFB}) = m(\widehat{CFE})$ eşitliği sağlanıyor. ABC nin eşkenar olduğunu gösteriniz.

Çözüm:



BMC üçgeninde iç açıortay teoreminden

$$\frac{|BM|}{|CM|} = \frac{|BF|}{|CF|} \tag{4}$$

elde edilir. MC doğrusu üzerinde $m(\widehat{ABM}) = m(\widehat{PBM})$ olacak şekilde bir P noktası alalım. A, B, C, M çembersel olduğundan $m(\widehat{ACM}) = m(\widehat{ABM})$'dir. Dolayısıyla $MBP \sim MCE$ (A.A.A) elde edilir. Bu benzerlikten

$$\frac{|BM|}{|CM|} = \frac{|BP|}{|CE|} \tag{5}$$

olduğu görülür. Öte yandan $m(\widehat{AFB}) = m(\widehat{CFE})$ ve $m(\widehat{ABF}) = m(\widehat{ECF})$ olduğundan $ABF \sim ECF$ (A.A.A) elde edilir ve bu benzerlikten

$$\frac{|AB|}{|CE|} = \frac{|BF|}{|CF|} \tag{6}$$

sonucu çıkar. (4), (5) ve (6) eşitliklerinden $|AB| = |BP|$ elde edilir. O halde ABP bir ikizkenar üçgendir ve $m(\widehat{ABM}) = m(\widehat{PBM})$ olduğundan $[AP]$'nin orta dikmesi BM'dir. Dolayısıyla $m(\widehat{AMB}) = m(\widehat{PMB}) = m(\widehat{CMB})$'dir ve A, B, C, M'nin çembersel olmasından $m(\widehat{BAC}) = m(\widehat{ACB}) = m\widehat{ABC})$ olduğu görülür. Sonuç olarak ABC bir eşkenar üçgendir.

5. $f : \{1, 2, \ldots, 2019\} \to \{-1, 1\}$ bir fonksiyon olmak üzere, her $k \in \{1, 2, \ldots, 2019\}$ için öyle bir $\ell \in \{1, 2, \ldots, 2019\}$ vardır ki,

$$\sum_{i \in \mathbb{Z} \,:\, (\ell - i)(i - k) \geq 0} f(i) \leq 0$$

eşitsizliği sağlanır. Buna göre,

$$\sum_{i \in \mathbb{Z} \,:\, 1 \leq i \leq 2019} f(i)$$

toplamının alabileceği en büyük değer kaçtır?

Çözüm: Cevap: 673.

Sorudaki koşulları sağlayan

$$f(i) = \begin{cases} -1 & 674 \leq i \leq 1346 \\ \\ 1 & 0 \leq i \leq 673 \text{ ve } 1347 \leq i \leq 2019 \end{cases}$$

foksiyonu için $\sum_{i \in \mathbb{Z} \,:\, 1 \leq i \leq 2019} f(i) = 673$ olur.

Şimdi cevabın en fazla 673 olabileceğini gösterelim. Her k sayısı için, eşitsizliği sağlayan $l \leq k$ sayılarının en büyüğü $l^-(k)$ ve eşitsizliği sağlayan $k \leq l$ sayılarının en küçüğü $l^+(k)$ olsun. Koşullara göre, her k için $l^-(k)$ ve $l^+(k)$ sayılarının en az biri bulunacaktır ve var olmaları halinde $f(l^-(k)) = -1$ ve $f(l^+(k)) = -1$ olacaktır. Tanıma göre, $l^-(k_1) = l^-(k_2)$ veya $l^+(k_1) = l^+(k_2)$ ise $k_1 = k_2$ olduğu görülür. Sonuç olarak $f(l) = -1$ olan bir l sayısı en fazla bir k sayısı için $l^-(k)$ ve en fazla bir k sayısı için $l^+(k)$ olabilir. Buna göre, $f(l) = -1$ olan l sayılarının sayısı $2019/3 = 673$ sayısından az olamaz ve böylece ispat tamamlanır.

6. Bir $n > 2$ tam sayısı ve bir a tam sayısı verildiğinde $n \mid a^d - 1$ ve $n \nmid a^{d-1} + \ldots + a + 1$ şartlarını sağlayan bir d pozitif tam sayısı bulunuyorsa, *a tam sayısı n-ayırandır* diyelim. Bir $n > 2$ tam sayısı verildiğinde, $0 < a < n$ ve obeb$(a, n) = 1$ olup n-ayıran olmayan a tam sayılarının sayısına *n nin kusuru* diyelim. Kusuru en küçük mümkün değere eşit olan tüm $n > 2$ tam sayılarını bulunuz.

Çözüm: Cevap: $n = 2^k$ ($k \in \mathbb{Z}$ ve $k \geq 2$) ve $n = 2^k \cdot 3$ ($k \in \mathbb{Z}^+$) formundaki sayılar.

$n = 2^k$ ve $n = 2^k \cdot 3$ için kusurun 1, diğer sayılar için 1 den çok olduğunu göstermek istiyoruz. Öncelikle n-ayıran olup olmamanın a'nın (mod n)'deki değerine ait bir özellik olduğunu belirtelim.

Lemma 1. $a = -1$ sayısı n-ayıran değildir.
İspat. $n \mid a^d - 1 \Rightarrow 2 \mid d \Rightarrow n \mid a^{d-1} + a^{d-2} + \ldots + a + 1$.

Lemma 2. $n = 2^r \cdot s$ olsun. $\text{obeb}(a, n) = 1$ olup da $a \equiv -1 \pmod{2^r}$, $\text{obeb}(a-1, s) = 1$ ve $2 \mid \text{mertebe}_s(a)$ olmasını sağlayan bir a sayısı n-ayıran değildir.
İspat. $\text{mertebe}_n(a) = \text{mertebe}_{(a-1)n}(a)$ olduğunu gösterelim. $a \equiv -1 \pmod 4$ varsayabiliriz. $a-1 = 2t$ diyelim.

$$\text{mertebe}_{(a-1)n}(a) = \text{mertebe}_{2^{r+1}ts}(a) = \text{okek}(\text{mertebe}_{2^{r+1}}(a), \text{mertebe}_t(a), \text{mertebe}_s(a)) = \text{mertebe}_s(a),$$

çünkü okek içindeki ilk terim 1 veya 2, ikinci terim 1'e eşit. Aynı şekilde,

$$\text{mertebe}_n(a) = \text{mertebe}_{2^r s}(a) = \text{okek}(\text{mertebe}_{2^r}(a), \text{mertebe}_s(a)) = \text{mertebe}_s(a)$$

çünkü okek içindeki ilk terim 1 veya 2'ye eşit. Bu durumda,

$$n \mid a^d - 1 \Rightarrow (a-1)n \mid a^d - 1 \Rightarrow n \mid a^{d-1} + a^{d-2} + \ldots + a + 1 = \frac{a^d - 1}{a - 1}.$$

Lemma 3. $n = 2^r \cdot s$ olsun. $s > 3$ ise, önceki lemmanın (Lemma 2) koşullarını sağlayan ve $a \not\equiv -1 \pmod n$ olan a sayısı vardır.
İspat. $s = p^n \cdot q$, p asal, $p \nmid q$ ve $p^n > 3$ olsun. Çinli kalan teoreminden $a \equiv -1 \pmod{2^r}$, $a \equiv 2 \pmod q$ ve a sayısı (mod p^n)'de ilkel kök olacak şekilde bir a vardır. Bu a koşulları sağlar.

Sonuç. $n = 2^r \cdot s$ olsun. $s > 3$ ise, n'nin kusuru en az 2'dir. Bu Lemma 1 ve Lemma 3'ten çıkar.

Lemma 4. $n = 2^r \cdot s$ ve $s \in \{1, 3\}$ olsun. $\text{obeb}(a, n) = 1$ ve $a \not\equiv -1 \pmod n$ ise, a sayısı n-ayırandır.
İspat. $a \not\equiv -1 \pmod{2^r}$ ve $a \not\equiv 1 \pmod{2^r}$ olsun.

$$\text{mertebe}_n(a) = \text{mertebe}_{2^r s}(a) = \text{okek}(\text{mertebe}_{2^r}(a), \text{mertebe}_s(a)) = \text{mertebe}_{2^r}(a),$$

çünkü okek içindeki ilk terim çift, ikincisi 1 veya 2'ye eşit. Ayrıca, $2 \cdot \text{mertebe}_{2^r}(a) = \text{mertebe}_{2^{r+1}}(a) \mid \text{mertebe}_{(a-1)n}(a)$. Yani $d = \text{mertebe}_n(a)$ için $n \mid a^d - 1$, ancak $(a-1) \cdot n \nmid a^d - 1 \Rightarrow n \nmid a^{d-1} + a^{d-2} + \ldots + a + 1$ olur.

$a \equiv 1 \pmod{2^r}$ ve $r \geq 2$ olsun. $s \mid a^2 - 1$ olduğundan $n \mid a^2 - 1$ olur. Ancak $n \nmid a + 1$.

Geriye kalan durumda $a \equiv -1 \pmod{2^r}$ olmalıdır. $a \not\equiv -1 \pmod n$ olduğundan $s = 3$ ve $a \equiv 1 \pmod 3$ olmalıdır. Yine $n \mid a^2 - 1$ olur ancak $3 \nmid a + 1 \Rightarrow n \nmid a + 1$ olur.

Sonuç. $n = 2^r \cdot s$ ve $s \in \{1, 3\}$ olsun. n'nin kusuru 1'dir. Bu Lemma 1 ve Lemma 4'ten çıkar.