Türkiye Bilimsel ve Teknolojik Araştırma Kurumu

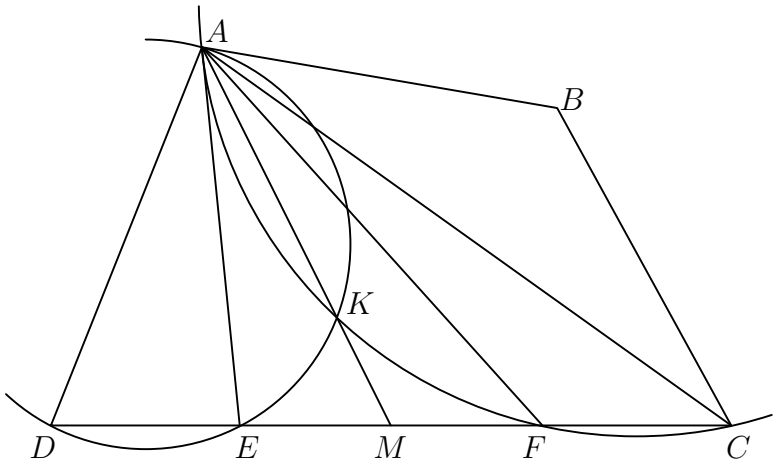
14. Ulusal Matematik Olimpiyatı
İkinci Aşama Sınavı

16-17 Aralık 2007

Çözümler

1. Bir $ABCD$ konveks dörtgeninin $[CD]$ kenarı üzerinde $0 < |DE| = |FC| < |CD|$ olacak şekilde E ve F noktaları alınıyor. ADE ve ACF üçgenlerinin çevrel çemberleri ikinci kez K noktasında; BDE ve BCF üçgenlerinin çevrel çemberleri ikinci kez L noktasında kesişiyor. A, B, K, L noktalarının çemberdeş olduğunu ispat ediniz.

Çözüm:



$\{M\} = DC \cap AK$ ve $\{N\} = DC \cap BL$ olsun. M noktasının ADE çemberine göre kuvvetini ve M noktasının AFC çemberine göre kuvvetini düşünürsek,

$$|ME| \cdot |MD| = |MK| \cdot |MA| = |MF| \cdot |MC|$$

elde ederiz. $|DE| = |FC|$ olduğu için, buradan M nin $[DC]$ nın orta noktası olduğu çıkar. Benzer biçimde,

$$|NE| \cdot |ND| = |NL| \cdot |NB| = |NF| \cdot |NC|$$

olduğu ve N nin de $[CD]$ nın orta noktası olduğu sonucu elde edilir. Dolayısıyla, $M = N$ olmalıdır. Şimdi yukarıdaki eşitliklerden,

$$|MK| \cdot |MA| = |ME| \cdot |MD| = |NE| \cdot |ND| = |NL| \cdot |NB| = |ML| \cdot |MB|$$

ve, dolayısıyla, K, A, L ve B noktalarının çemberdeş olduğu sonucuna ulaşılır.

2. 2006 öğrenci ve 14 öğretmenin bulunduğu bir okulda, her öğrencinin en az bir öğretmen ile tanışık olması koşuluyla, öğretmenler ve öğrenciler arasındaki tanışıklık bağıntısı ne olursa olsun; öğretmenin tanıdığı öğrenci sayısının, öğrencinin tanıdığı öğretmen sayısına oranının en az t olduğu, birbirini

tanıyan bir öğrenci-öğretmen ikilisinin bulunmasını sağlayan en büyük t gerçel sayısını belirleyiniz.

Çözüm: $t = 2006/14$.

Tüm ögrencilerin tüm öğretmenlerle tanışık olduğu durumda, söz konusu oranların hepsi $2006/14$ olacağı için, $t \leq 2006/14$ olmalıdır. Şimdi, $t \geq 2006/14$ olduğunu kanıtlayacağız.

$1 \leq i \leq 14$ için, a_i ile, i. öğretmenin tanıdığı öğrenci sayısını; $1 \leq j \leq 2006$ için de, b_j ile, j. öğrencinin tanıdığı öğretmen sayısını gösterelim. T, birbirini tanıyan tüm (i,j) öğretmen-öğrenci ikililerinin kümesi olsun. Bu gösterimle, $|\{j : (i,j) \in T\}| = a_i \geq 0$ ve $|\{i : (i,j) \in T\}| = b_j \geq 1$ olduğunu gözlemleyelim.

$(i_o, j_o) \in T$ ikilisi, her $(i,j) \in T$ için, $a_{i_o}/b_{j_0} \geq a_i/b_j$ koşulunu sağlasın. O zaman, tüm $(i,j) \in T$ için, $a_{i_o}/b_{j_o} \cdot 1/a_i \geq 1/b_j$ eşitsizliklerini toplarsak,

$$\frac{a_{i_o}}{b_{j_o}} \sum_{(i,j)\in T} \frac{1}{a_i} \geq \sum_{(i,j)\in T} \frac{1}{b_j}$$

eşitsizliğini elde ederiz.

Şimdi,

$$\sum_{(i,j)\in T} \frac{1}{a_i} = \sum_{i=1}^{14} \sum_{\{j:(i,j)\in T\}} \frac{1}{a_i} = \sum_{i=1}^{14} \frac{|\{j : (i,j) \in T\}|}{a_i} = \sum_{\{i:a_i\neq 0\}} \frac{a_i}{a_i} = \sum_{\{i:a_i\neq 0\}} 1 \leq 14$$

ve benzer şekilde,

$$\sum_{(i,j)\in T} \frac{1}{b_j} = \sum_{j=1}^{2006} \sum_{\{i:(i,j)\in T\}} \frac{1}{b_j} = \sum_{j=1}^{2006} \frac{|\{i : (i,j) \in T\}|}{b_j} = \sum_{j=1}^{2006} \frac{b_j}{b_j} = \sum_{j=1}^{2006} 1 = 2006$$

olduğunu kullanırsak, $a_{i_o}/b_{j_o} \geq 2006/14$ çıkar. Bu da, $t \geq 2006/14$ olması gerektiği anlamına gelir.

3.

$$P_n(x) = (x^2+x+1)^n - (x^2+x)^n - (x^2+1)^n - (x+1)^n + x^{2n} + x^n + 1$$

polinomumun tüm katsayılarının 7 ile bölünmesini sağlayan bütün n pozitif tam sayılarını bulunuz.

Çözüm: Öncelikle, $Q(x)$ tam sayı katsayılı bir polinom ve m pozitif bir tam sayıysa,

$$Q(x)^{7^m} \equiv Q(x^{7^m}) \pmod 7$$

olduğunu kullanarak; $0 \leq k \leq l$ tam sayılar olmak üzere, $n = 7^k$ ve $n = 7^k + 7^l$ şeklindeki sayıların istenilen koşulu sağladığını görürüz.

Şimdi, n bunlardan farklı bir pozitif tam sayı ise, istenilen koşulun sağlanmadığını göstereceğiz. n nin 7 ile bölünmediğini varsayabiliriz.

$n > 2$ olduğu için, $P_n(x)$ polinomunda x^3 ün katsayısı $n(n-1)$ olur. $7|n(n-1)$ ise, $7|n-1$ olmalıdır. $a \geq 1$ ve $b \geq 2$ tam sayılar ve $7 \nmid b$ olmak üzere, $n = 1 + 7^a b$ olsun. Tüm denklikler 7 modunda olmak

üzere,

$$\begin{aligned}
(x^2+x+1)^n &\equiv (x^2+x+1)(x^2+x+1)^{7^a b} \equiv (x^2+x+1)(x^{2\cdot 7^a}+x^{7^a}+1)^b \\
&\equiv 1+x+x^2+bx^{7^a}+bx^{7^a+1}+bx^{7^a+2} \\
&\qquad + (\text{derecesi } 2\cdot 7^a \text{ veya daha büyük olan terimler}) \\
(x+1)^n &\equiv 1+x+bx^{7^a}+bx^{7^a+1} \\
&\qquad + (\text{derecesi } 2\cdot 7^a \text{ veya daha büyük olan terimler}) \\
(x^2+1)^n &\equiv 1+x^2+(\text{derecesi } 2\cdot 7^a \text{ veya daha büyük olan terimler}) \\
(x^2+x)^n &\equiv (\text{derecesi } 2\cdot 7^a \text{ veya daha büyük olan terimler toplamı})
\end{aligned}$$

elde ederiz. (En son denklikte, $b \geq 2$ olduğunu kullandık.) Buradan,

$$P_n(x) \equiv bx^{7^a+2} + (\text{derecesi } 2\cdot 7^a \text{ veya daha büyük olan terimler})$$

çıkar. Bu da, b, 7 ile bölünmediği için, $P_n(x)$ te x^{7^a+2} nin katsayısının 7 ile bölünmediğini kanıtlar.

4. $n \geq 2$ ve $a_1, a_2, \ldots, a_n$ pozitif gerçel sayılar olmak üzere

$$t = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2$$

ise,

$$\sum_{i\neq j} \frac{a_i}{a_j} \geq \frac{(n-1)^2 t}{t-1}$$

olduğunu gösteriniz.

Çözüm: Cauchy-Schwarz eşitsizliğinden dolayı,

$$\sum_{i\neq j} \frac{a_i}{a_j} \cdot \sum_{i\neq j} a_i a_j \geq \left(\sum_{i\neq j} a_i\right)^2 = \left((n-1)\sum_{i=1}^n a_i\right)^2 = (n-1)^2 t^2$$

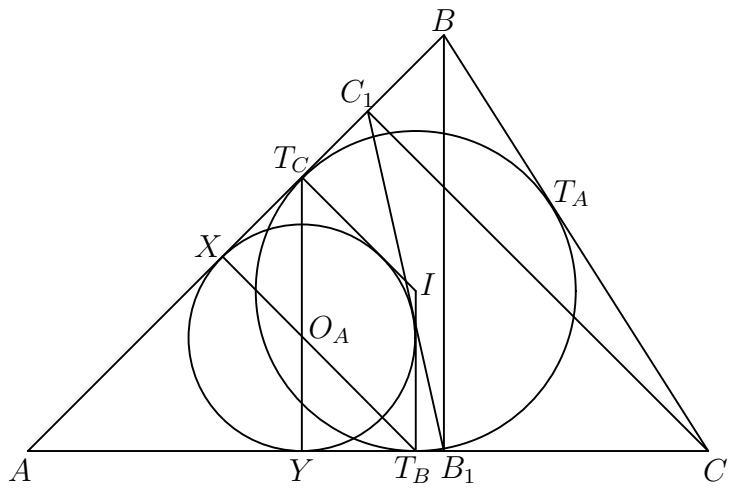
olur. Diğer taraftan,

$$\sum_{i\neq j} a_i a_j = \left(\sum_{i=1}^n a_i\right)^2 - \left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right) = t^2 - t$$

olduğu için, istenilen eşitsizlik elde edilir.

5. Dar açılı bir ABC üçgeninin yükseklikleri $[AA_1]$, $[BB_1]$ ve $[CC_1]$ olsun. AB_1C_1, BC_1A_1 ve CA_1B_1 üçgenlerinin iç merkezleri, sırasıyla, O_A, O_B ve O_C olsun. ABC üçgeninin içteğet çemberi BC, CA ve AB kenarlarına, sırasıyla, T_A, T_B ve T_C noktalarında teğet ise, $T_AO_CT_BO_AT_CO_B$ altıgeninin eşkenar olduğunu gösteriniz.

Çözüm:.



ABC üçgeninin iç çemberinin yarıçapı r, merkezi de I olsun. ABC üçgeni, AB_1C_1 üçgenine $\cos\widehat{A}$ benzerlik oranı ile benzerdir. X ve Y, AB_1C_1 üçgeninin iç çemberinin, sırasıyla, AC_1 ve AB_1 doğrularına teğet olduğu noktalar olsun. Benzerlikten ötürü $|AX|/|AT_B| = \cos\widehat{A}$ olduğu için, $[T_BX]$ nın $[AB]$ na dik olduğu ve, dolayısıyla, O_A noktasından geçtiği sonucuna ulaşırız. Demek ki, T_BO_A doğrusu AB doğrusuna diktir. Benzer şekilde, T_CO_A doğrusu AC doğrusuna diktir.

Öte yandan, IT_C ve IT_B doğruları da, sırasıyla, AB ve AC doğrularına dik olduğu için, $IT_BO_AT_C$ dörtgeni bir parelelkenardır ve, $|IT_C| = |IT_B| = r$ olduğu için de, bu parelelkenar bir eşkenar dörtgendir. Buradan, $|T_BO_A| = |O_AT_C| = r$ olduğu elde edilir ve ispat biter.

6. Kenarları, alanı ve iç açılarının derece cinsinden ölçüleri rasyonel sayılar olan bir üçgenin bulunmadığını ispat ediniz.

Çözüm: Sinüs ve kosinüs kurallarından ötürü, böyle bir üçgenin iç açılarının sinüs ve kosinüslerinin de rasyonel sayılar olması gerektiği görülür.

Şimdi, θ açısının derece cinsinden ölçüsü, 90 nın tam katı olmayan bir rasyonel sayıysa, hem $\sin\theta$, hem de $\cos\theta$ nın rasyonel sayılar olamayacağı ispatlayacağız ve böylece istenilen koşulları sağlayan bir üçgen olmadığı kanıtlanmış olacak.

u, v ve $w > 1$ ikişer ikişer aralarında asal olan tam sayılar ve $\sin\theta = u/w$, $\cos\theta = v/w$ olsun. $u^2 + v^2 \equiv w^2 \equiv 0 \pmod 4$ denkliği olanaksız olduğu için, w çift olamaz.

p ve $q > 0$, aralarında asal tam sayılar olmak üzere $\theta = p/q$ ve d de, 90 ve p nin en büyük ortak böleni olsun. $d = m \cdot 90 + n \cdot p = m \cdot 90 + nq \cdot \theta$ olacak biçimde m ve n tam sayıları vardır. Toplamın sinüsü ve kosinüsü formüllerini kullanarak, $\sin(d^\circ)$ ve $\cos(d^\circ)$ nin rasyonel sayılar olduğu sonucuna varırız. Ancak, $\cos(30^\circ) = \sqrt{3}/2$, $\sin(45^\circ) = 1/\sqrt{2}$ ve $\sin(18^\circ) = (\sqrt{5}-1)/4$ olduğu için, $d = 90$ olmalıdır. Demek ki, bir k tam sayısı için, $\theta = 90k/q$ ve q tektir.

Tüm $n \geq 0$ tam sayıları için, $Q_n(x)$ ve $R_n(x)$ polinomlarını, $Q_0(x) = 1$, $R_0(x) = x$ ve $n \geq 1$ için,

$$Q_n(x) = (1-2x^2)Q_{n-1}(x) - 2xR_{n-1}(x)$$
$$R_n(x) = 2x(1-x^2)Q_{n-1} + (1-2x^2)R_{n-1}(x)$$

koşullarıyla tanımlayalım. Tümevarımla, $Q_n(x)$ ve $R_n(x)$ nin başkatsayıları $(-4)^n$ olan tam sayı

katsayılı polinomlar olduğu görülür. Öte yandan, $n \geq 1$ için,

$$\cos(2n+1)\theta = (1-2\sin^2\theta)\cos(2n-1)\theta - 2\sin\theta\cos\theta\sin(2n-1)\theta$$
$$\sin(2n+1)\theta = 2\sin\theta\cos\theta\cos(2n-1)\theta + (1-2\sin^2\theta)\sin(2n-1)\theta$$

özdeşliklerini kullanarak, yine tümevarımla, her $n \geq 0$ için, $\cos(2n+1)\theta = \cos\theta\ Q_n(\sin\theta)$ ve $\sin(2n+1)\theta = R_n(\sin\theta)$ eşitliklerini elde ederiz. Böylece, $n = (q-1)/2$ için, $\sin\theta$ rasyonel sayısının, tam sayı katsayılı $R_n(x) - \sin(90^\circ k)$ polinomunun bir kökü olduğu sonucuna varırız. Bu durumda, w, bu polinomun başkatsayısı olan $(-4)^n$ yi bölmelidir. Ancak, $w > 1$ ve tek olduğu için, bu olanaksızdır.

Alternatif çözüm: Yukarıdaki üçüncü paragraftan sonra ispat şu şekilde tamamlanabilir:

$n \geq 2$ için, $\cos n\theta = 2\cos\theta\cos(n-1)\theta - \cos(n-2)\theta$ özdeşliğini kullanarak, tümevarımla, her $n \geq 1$ için, $w^n \cos n\theta = 2^{n-1}v^n + k_n w$ koşulunu sağlayan k_n tam sayılarının bulunduğunu görürüz. n pozitif tam sayısı, $\cos n\theta = 1$ olacak biçimde seçilince elde edilen $w^n = 2^{n-1}v^n + k_n w$ eşitliği, $(w, 2v) = 1$ ve $w > 1$ olduğu için, olanaksızdır.