Türkiye Bilimsel ve Teknolojik Araştırma Kurumu

# 15. Ulusal Matematik Olimpiyatı
# İkinci Aşama Sınavı

8-9 Aralık 2007

Çözümler

**1.** Dar açılı bir $ABC$ üçgeninin $AC$ kenarını çap kabul eden çember, $AB$ ve $BC$ yi, $A$ ve $C$ dışında, sırasıyla $K$ ve $L$ noktalarında kesiyor. $ABC$ üçgeninin çevrel çemberi, $CK$ doğrusunu $C$ dışında $F$ noktasında; $AL$ doğrusunu ise, $A$ dışında $D$ noktasında kesiyor. $ABC$ üçgeninin çevrel çemberinin $[AC]$ kirişinin küçük yayı üstünde bir $E$ noktası alıp, $BE$ ile $AC$ nin kesiştiği noktaya $N$ diyelim. Eğer

$$|AF|^2 + |BD|^2 + |CE|^2 = |AE|^2 + |CD|^2 + |BF|^2$$

ise, $m(\widehat{KNB}) = m(\widehat{BNL})$ olduğunu gösteriniz.

**Çözüm:** $[AC]$ çaplı çember $A, K, L, C$ noktalarından geçtiği için $CK \perp AB$ ve $AL \perp BC$ elde edilir. Ayrıca $ABC$ dar açılı bir üçgen olduğu için $K \in (AB]$ ve $L \in [BC)$ olur. ] $CK$ ve $AL$ doğrularının kesişimi $H$ olsun. Bir üçgende yükseklikler noktadaş olduğu için $BH \perp AC$ olur. O zaman $m(\widehat{HBC}) = 90^\circ - m(\widehat{ACB})$ ve $m(\widehat{BHA}) = 180^\circ - m(\widehat{ACB})$ olduğu görülür. $H$ noktasının $AB$ doğrusuna göre yansıması $F'$ olsun. O halde $m(\widehat{BF'A}) = 90^\circ - m(\widehat{ACB})$ ve böylece $F'$ noktasının $ABC$ üçgenini çevrel çemberi üzerinde yer aldığı görülür. Sonuç olarak $F' = F$ olmalı. Benzer şekilde $H$ noktasının $BC$ doğrusuna göre yansımasının $D$ olduğu bulunur. Böylelikle $|AF| = |AH|$, $|CD| = |CH|$ ve $|BD| = |BH| = |BF|$ elde edilir. $|AF|^2+|BD|^2+|CE|^2 = |AE|^2+|CD|^2+|BF|^2$ olduğundan $|AH|^2 + |CE|^2 = |CH|^2 + |AE|^2$ elde edilir ve böylece $HE \perp AC$ olur. $BH \perp AC$ olduğundan $B, H, E$ noktalarının doğrusal olduğu görülür. O zaman $BN \perp AC$ ve $A, K, N, H$ noktaları çemberseldir. Sonuç olarak $m(\widehat{KAH}) = m(\widehat{BNL})$ ve dolayısıyla $m(\widehat{KNB}) = m(\widehat{BNL})$ elde edilir.

**2.** $2007 \times 2007$ bir satranç tahtasının bazı birim kareleri kırmızıya boyanıyor. Tahtanın $i$. satır ve $j$. sütunundaki birim kareyi $(i, j)$ ile; $x \le i$ ve $y \le j$ koşullarını sağlayan kırmızı boyalı $(x, y)$ birim karelerinin kümesini de $S_{i,j}$ ile gösteriyoruz. Başlangıçta boyalı her $(i, j)$ birim karesine $S_{i,j}$ ye ait boyalı karelerin sayısı yazılıyor. Daha sonraki her adımda, boyalı her $(i, j)$ birim karesine, $S_{i,j}$ deki karelere bir önceki adım sonunda yazılmış olan sayıların toplamı yazılıyor. Sonlu sayıda adım sonunda boyalı birim karelere yazılı tüm sayıların tek sayı haline geleceğini gösteriniz.

**Çözüm:** $(i, j)$ birim karesine yazılı olan sayının $\pmod 2$ deki değeri $f(i, j)$ olsun. Birim karelere sadece $f(i, j)$ sayılarının yazılacağını farzedebiliriz. Genelliği bozmadan sıfırıncı adımda boyalı her birim karede $f(i, j) = 1$, kalan birim karelerde $f(i, j) = 0$ yazıldığını varsayabiliriz. İspat boyalı birim kare sayısı olan $n$ üzerinden tümevarımla yapılacaktır. $n = 1$ olsun. Bu durumda ilk adımda sadece bir $(i, j)$ birim karesine 1 yazılıyor. $n = k$ için sonlu sayıda adım sonunda boyalı birim karelere yazılı tüm sayıların tek sayı haline geleceğini varsayalım. $n = k + 1$ olsun. Boyalı kareler arasında bir $\ll$ kısmi düzeni tanımlayalım. $i \le s$ ve $j \le t$ ise $(i, j) \ll (s, t)$ olsun. Bu kısmı düzene göre, en büyük elemanlardan biri $(p, q)$ birim karesi olsun. Başlangıçta $(p, q)$ birim karesinin boyalı olmadığı durumda

tümevarım varsayımına göre, $N$ bir tam sayı olmak üzere, $N$ adım sonunda boyalı birim karelere yazılı tüm sayılar tek sayı olacaktır. $(p,q)$ birim karesinin boyalı olması diğer boyalı birim karelerdeki sayıları herhangi bir adımda etkilemiyor. $N$ adım sonunda $f(p,q)=1$ olursa ispat tamamlanmış olur. $N$ adım sonunda $f(p,q)=0$ olsun. Sıfırıncı adımda $f(p,q)=0$ olduğuna göre, ilk $N$ adımda boyalı karelerdeki sayılar değişmemiş olup $f(p,q)$ sayısına 1 eklenmiştir. Demek ki $2N$ adım sonucunda tüm boyalı karelerdeki sayılar $f(i,j)=1$ olacaktır.

**3.** $a+b+c=3$ eşitliğini sağlayan tüm $a,b,c>0$ gerçel sayıları için,

$$\frac{a^2+3b^2}{ab^2(4-ab)}+\frac{b^2+3c^2}{bc^2(4-bc)}+\frac{c^2+3a^2}{ca^2(4-ca)}\geq 4$$

olduğunu gösteriniz.

**Çözüm:** Eşitsizliği

$$A=\frac{a^2}{ab^2(4-ab)}+\frac{b^2}{bc^2(4-bc)}+\frac{c^2}{ca^2(4-ca)}$$

$$B=\frac{3b^2}{ab^2(4-ab)}+\frac{3c^2}{bc^2(4-bc)}+\frac{3a^2}{ca^2(4-ca)}$$

olmak üzere, $A+3B\geq 4$ şekilinde yazalım. $A\geq 1$ ve $B\geq 1$ olduğunu gösterirsek ispat tamamlanmış olur.

Cauchy-Schwartz eşitsizliğine göre,

$$\left(\frac{4-ab}{a}+\frac{4-bc}{b}+\frac{4-ac}{c}\right)\cdot A\geq\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2$$

Buradan $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=C$ olmak üzere, $A\geq\frac{C^2}{4C-3}$ gelir. Aritmetik - Harmonik ortalama eşitsizliğinden $C\geq 3$ olduğuna göre, $C^2-4C+3=(C-3)(C-1)\geq 0$ ve sonuç olarak $A\geq\frac{C^2}{4C-3}\geq 1$ olur.

Cauchy-Schwartz eşitsizliğine göre,

$$\left(\frac{4-ab}{a}+\frac{4-bc}{b}+\frac{4-ac}{c}\right)\cdot B\geq\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2$$

ve benzer şekilde $B\geq 1$ olur.

**4.** $k>1$ bir tam sayı, $p=6k+1$ bir asal sayı ve $m=2^p-1$ olmak üzere,

$$\frac{2^{m-1}-1}{127m}$$

sayısının bir tam sayı olduğunu gösteriniz.

**Çözüm:** Öncelikle hem $m$ nin hem de 127 nin $2^{m-1}-1$ i tam böldüğünü gösterelim. Fermat teoreminden dolayı $2^p\equiv 2 \pmod p$. O halde $m=2^p-1\equiv 1 \pmod p$ ve dolayısıyla $p|m-1$. O zaman $2^p-1|2^{m-1}-1$ ve böylece $m|2^{m-1}-1$ elde edilir. Diğer tarafta, $6|p-1$ olduğu için $63=2^6-1|2^{p-1}-1$.

O halde $7|2^p - 2$ ve dolayısıyla $7|m - 1$. Sonuç olarak $127 = 2^7 - 1|2^{m-1} - 1$ bulunur.

$m$ ve 127 nin aralarında asal olduklarını gösterirsek ispat tamamlanır. 127 asal sayı olduğu için $m$ nin 127 ile bölünmediğini göstermek yeterli olacaktır. $p = 7k + n$ $(0 \leq n < 7)$ olsun. $k > 1$ ise, $p > 7$ olur ve bötlece $p$ sayısı 7 ile bölünmez. O zaman $n \neq 0$. $127 = 2^7 - 1|2^{7k} - 1$ ve sonuç olarak $127|2^{7k+n} - 2^n = 2^p - 2^n$. Eğer $127|m$ ise, $127|2^n - 1$ olur. Ancak $0 < 2^n - 1 < 127$ olduğu için bu mümkün değildir. O zaman $m$ sayısı 127 ile bölünmez ve ispat tamamlanır.

**5.** $m(\widehat{B}) = 90^o$ olan bir $ABC$ üçgeninin iç teğet çemberi, $BC$ kenarına $D$ noktasında değiyor. $ABD$ ve $ADC$ üçgenlerinin iç merkezleri sırasıyla $X$ ve $Z$ olmak üzere, $XZ$ ve $AD$ doğruları $K$ noktasında kesişiyor. $XZ$ nin $ABC$ nin çevrel çemberini kestiği noktalar $U$ ve $V$; $[UV]$ doğru parçasının orta noktası $M$; $AD$ nin $ABC$ nin çevrel çemberini $A$ dışında kestiği nokta $Y$ olmak üzere, $|CY| = 2|MK|$ olduğunu gösteriniz.

**Çözüm:.** $ABD$ üçgeninin iç teğet çemberi $BC$ kenarına $T$ noktasında, $ADC$ üçgeninin iç teğet çemberi $BC$ kenarına $S$ noktasında teğet olsun. $ABD$ ve $ADC$ üçgenlerinin iç teğet çemberlerinin yarıçapları sırasıyla $r_1$ ve $r_2$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned}
|DS| &= \frac{|AD| + |DC| - |AC|}{2} = \frac{|AD| + |BC| - |BD| - |AC|}{2} \\
&= \frac{|AD| - |BD| - |AB| + |AB| + |BC| - |AC|}{2} \\
&= \frac{|AB| + |BC| - |AC|}{2} - \frac{|AB| + |BD| - |AD|}{2} \\
&= |BD| - |BT| \\
&= |TD|
\end{aligned}$$

olur. $X$ ve $Z$ iç teğet çemberlerin merkezleri oldukları için $XD \perp DZ$ bulunur. Dolayısıyla

$$|XZ|^2 = |XD|^2 + |DZ|^2 = r_1^2 + |TD|^2 + r_2^2 + |TD|^2$$

elde edilir. Öte yandan

$$|XZ|^2 = (r_1 - r_2)^2 + |TS|^2 = (r_1 - r_2)^2 + 4|TD|^2$$

olduğu için

$$\begin{aligned}
r_1^2 + r_2^2 + 2|TD|^2 &= (r_1 - r_2)^2 + 4|TD|^2 \\
2r_1r_2 &= 2|TD|^2
\end{aligned}$$

olur. Sonuç olarak

$$\begin{aligned}
|XZ|^2 &= r_1^2 + r_2^2 + 2|TD|^2 = (r_1 + r_2)^2 \\
|XZ| &= r_1 + r_2
\end{aligned}$$

elde edilir. Açık bir şekilde $|XK| \geq r_1$ ve $|ZK| \geq r_2$'dir. $|XK| + |ZK| = r_1 + r_2$ olduğundan, $|XK| = r_1$, $|ZK| = r_2$ ve $XZ \perp AD$ olur. $ABC$ üçgeninin çevrel çemberinin merkezi $O$ olsun. O zaman $OM \perp UV$ bulunur. $[AC]$ yarıçap olduğundan $CY \perp AY$ elde edilir. O halde $UV$ ve $CY$ doğruları paraleldir. $OM \cap CY = \{N\}$ olsun. O zaman $ON \perp CY$ ve $|YN| = |NC|$ elde edilir. $KYNM$ dikdörtgeninde $|MK| = |NY|$'dir ve sonuç olarak $|CY| = 2|MK|$ elde edilir.

**6.** $n$ kentin bulunduğu bir ülkede, herhangi iki kent arasında, bu kentleri doğrudan birleştiren en çok bir yol bulunuyor. Farklı yolların sadece kentlerde kesiştiği bu ülkede, herhangi bir kentin tüm yolları kapansa bile, bu kent dışındaki her kentten başka her kente, gerekirse diğer kentlerden geçerek ulaşılabiliyor. Farklı $A$ ve $B$ kentleri verildiğinde, seçtiğimiz en çok $k$ yolu istediğimiz gibi tek yönlü yapmak suretiyle, geri kalan yollar nasıl tek yönlü yapılırsa yapılsın, iki kenti doğrudan birleştiren herhangi bir $l$ yolu için, $A$ dan başlamak, belirlenmiş yönlere uymak, $l$ yolunu kullanmak ve herhangi bir kentten en çok bir kez geçmek üzere $B$ ye ulaşabiliyorsak, " *$A$ kenti $B$ kentine $k$-yönlü bağlanabilir*" diyoruz. Her $A$ kenti başka her $B$ kentine $k$-yönlü bağlanabiliyorsa, $k$ en az kaç olur?

**Çözüm:** Cevap: En küçük değer: $k = 2n - 3$.

Soruyu çizge kavramı kullanarak yeniden formüle edelim: $G$ çizgesinde herhangi bir köşe ve bu köşeden çıkan tüm kenarlar silindikten sonra kalan çizge bağlantılı olacaktır. Bir diğer deyişle $G$ 2-köşe bağlantılıdır. $G$ çizgesinde herhangi iki farklı $A$ ve $B$ köşeleri verildiğinde, en fazla $k$ kenarı tek yönlü yapmak suretiyle, geri kalan kenarlar nasıl yönlendirilirse yönlendirilsin, herhangi bir L kenarı için, $A$ dan başlamak, belirlenmiş yönlere uymak, L kenarını kullanmak ve herhangi bir köşeden en çok bir kez geçmek üzere $B$ ye ulaşabiliyorsak, *"$A$ köşesi $B$ köşesine $k$-yönlü bağlanabilir"* diyoruz. Her $A$ köşesi her $B$ köşesine $k$-yönlü bağlanabiliyorsa, $k$ nın alabileceği en küçük değer nedir?

İlk önce $k \geq 2n - 3$ olduğunu gösteren iki örnek verelim:

Örnek 1. $G$ bir tam çizge olsun. Bu durumda uç noktalarından en az biri $A$ veya $B$ köşelerinden en az biri olan tüm kenarların yönlendirilmesi gerekiyor. Buna göre, $k \geq (n-1) + (n-1) - 1 = 2n - 3$.

Örnek 2. $G$ çizgesinde $der(A) = der(B) = n - 2$ ve tüm kalan köşelerin dereceleri 2 olsun. O zaman bu çizgenin $2n - 3$ kenarının her birinin yönlendirilmesi gerekiyor.

Şimdi en fazla $2n - 3$ kenarın yönlendirilmesinin yeterli olacağını göstereceğiz.

$G$ çizgesinde $\Gamma = \{C_1, C_2, C_3, \ldots, C_{l-1}, C_l\}$ yolu $l - 1$ yönlendirilmemiş kenardan oluşan bir yol olsun. $G$ çizgesinde $1 \leq i, j \leq l$, $|i - j| \neq 1$ olacak şekilde bir $(C_i, C_j)$ kenarı yoksa ya da $\Gamma$ tek bir kenardan oluşuyorsa $(l = 2)$ $\Gamma$ yoluna *asgari* yol diyelim. Şimdi bir kenar yönlendirme süreci tanımlayacağız.

İlk adımda $A$ köşesinde başlayan ve $B$ noktasında sona eren bir $\Gamma_1 = \{C_1, C_2, C_3, \ldots, C_{l-1}C_l\}$ $(A = C_1, C_l = B)$ asgari yolu alalım ve bu yoldaki tüm kenarları $A$ dan $B$ ye doğru yönlendirelim. $\Gamma_1$ yolu $G$ çizgesindeki tüm köşeleri içeriyorsa, yönlendirme sürecini tamamlıyoruz.

$G$ çizgesinin 2-köşe bağlantılı olması nedeniyle herhangi bir $D_1 = C_{p_1} \in \Gamma_1$ köşesinde başlayan ve herhangi bir $D_m = C_{p_2} \in \Gamma_1$ $(D_1 \neq D_m)$ köşesinde sona eren ve bu iki köşe dışında $\Gamma_1$ üzerinde bulunmayan $D_2, D_3, \ldots, D_{m-1}$ köşelerini içeren en az bir $\Gamma$ asgari yolu bulunacaktır. $G$ çizgesinde $1 \leq i \leq p_1 - 1$ veya $p_2 + 1 \leq i \leq l$ ve $2 \leq j \leq m - 1$ olacak şekilde hernagi bir $C_iD_j$ kenarı yoksa $D_1, D_2, D_3, \ldots, D_{m-1}, D_m$ yoluna *gerilmiş* yol idyelim. Bir başka deyişle gerilmiş $\Gamma$ yolunda $A$ kenarına en yakın köşe $D_1$, $B$ kenarına en yakın köşe ise $D_m$ dir. İkinci adımda tüm $\Gamma$ yolları içinde bir gerilmiş $\Gamma_2$ yolu alıp bu yoldaki tüm kenarları $D_1$ den $D_m$ ye doğru yönlendirelim. $\Gamma_1$ ve $\Gamma_2$ yolları $G$ çizgesindeki tüm köşeleri içeriyorsa, yönlendirme sürecini tamamlıyoruz.

Aksi takdirde üçüncü adımda $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ yolunun bir köşesinde başlayan ve yine $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ yolunun bir köşesinde sona eren ve yeni köşeler içeren bir asgari ve gerilmiş $\Gamma_3$ yolu alıp bu yoldaki tüm kenarları benzer şekilde yönlendiriyoruz.

$q$ adım sonucunda $\Gamma = \bigcup_{i=1}^{q} \Gamma_i$ bileşimi $G$ çizgesindeki tüm köşeleri içerecektir. Her L kenarı ya bir $\Gamma_s$ yoluna dahildir ya da harhangi $\Gamma_s$ ve $\Gamma_t$ yollarını birleştiriyordur.

Durum 1: $\text{L} = (C, D)$ kenarı bir $\Gamma_s \in \Gamma$ yoluna dahildir. Bu yol yönlendirme sürecinde $C$ den $D$ ye doğru yönlendirilmiş olsun. Bu kenar için $A$ köşesinden başlayan ve $B$ köşesinde sona eren yolun bulunduğunu gösterelim. $C$ köşesinden başlayarak $G_s$ kenarlarıyla yönlenmeye *ters* olarak ilerlersek $\Gamma_s$ in ilk kenarına kadar varırız. Daha sonra $G_s$ ile ortak köşesi bulunan bir $G_i$ yolunun kenarlarıyla ($i = s - 1$ olmak zorunda değildir) yine yönlenmeye *ters* olarak ilerlersek yeni bir $G_j$ yoluna varırız ve benzer şekilde ilerlersek en sonunda $A$ köşesine ulaşırız. $D$ köşesinden başlayarak yönlenmeye uygun şekilde ilerlersek $\Gamma_s$ in son kenarına kadar varırız. Daha sonra $G_s$ ile ortak köşesi bulunan bir $G_u$ yolunun kenarlarıyla ($u = s + 1$ olmak zorunda değildir) yine yönlenmeye uygun şekilde ilerlersek yeni bir $G_v$ yoluna varırız ve benzer şekilde ilerlersek en sonunda $B$ köşesine ulaşmış oluruz. Her adımda eklenen yollar asgari ve gerilmiş olduğu için bu iki yolun birleşimiyle $A$ dan başlayan, sadece yönlendirme sürecinde yönlendirilmiş kenarları kullanan, L kenarından geçen ve $B$ köşesinde sona eren yolu elde ederiz.

Durum 2: $\text{L} = (C, D)$ kenarı bir $\Gamma_s \in \Gamma$ yoluna dahil değildir ( L kenarı $\Gamma = \bigcup_{i=1}^{q} \Gamma_i$ birleşimine dahil değildir). Bu durumda L kenarının uç noktaları bir $(s, t)$ ikilisi için $C \in \Gamma_s$ ve $D \in \Gamma_t$ köşeleri olacak. L kenarı $C$ köşesinden $D$ köşesine doğru yönlendirilmiş olsun. Yine ilk durumda olduğu gibi önce $C$ köşesinden başlayarak yönlendirmeye *ters* olarak ve $D$ köşesinden başlayarak yönlendirmeye uygun şekilde ilerleyip $A$ dan başlayan, L kenarı dışında sadece yönlendirme sürecinde yönlendirilmiş kenarları kullanan L kenarından geçen ve $B$ köşesinde sona eren yolu elde ederiz.

Son olarak kenar yönlendirme sürecinde en fazla $2n-3$ kenarın yönlendirildiğini gösterelim. Bir adımda eklenen köşe sayısı $a$ ise, yönlendirilmesi gereken kenar sayısı $a + 1$ dir. Bu nedenle yönlendirilmesi gereken kenar sayısı en fazla $1 + 2(n - 2) = 2n - 3$ olur. Çözüm tamamlanmıştır.