Türkiye Bilimsel ve Teknolojik Araştırma Kurumu

17. Ulusal Matematik Olimpiyatı
İkinci Aşama Sınavı

5-6 Aralık 2009

Çözümler

1. $p^3 - 4p + 9$ un tam kare olmasını sağlayan tüm p asal sayılarını bulunuz.

Çözüm: Cevap: $p = 2, 7, 11$.

x bir negatif olmayan tam sayı ve p bir asal sayı olmak üzere, $x^2 = p^3 - 4p + 9$ denkleminin tüm çözümlerini bulacağız.

$x^2 \equiv 9 \pmod{p}$ olduğundan k bir tam sayı olmak üzere, $x = kp \pm 3$ olur. Bunu denkleme yazarsak $(kp \pm 3)^2 = p^3 - 4p + 9 \Longrightarrow k^2p \pm 6k = p^2 - 4$ elde ederiz. Buna göre, $p \,|\, 6k \pm 4$ olur. $p \neq 2$ durumunda $p \,|\, 3k \pm 2 \Longrightarrow p \leq 3k + 2 \Longrightarrow \dfrac{p-2}{3} \leq k \Longrightarrow \dfrac{p^2 - 2p - 9}{3} \leq pk - 3 \leq x$.

- $x \leq \dfrac{p^2}{4}$ olursa $\dfrac{p^2 - 2p - 9}{3} \leq \dfrac{p^2}{4} \Longrightarrow p \leq 8 + \dfrac{36}{p} \Longrightarrow p \leq 11$.
- $x > \dfrac{p^2}{4}$ olursa $x^2 = p^3 - 4p + 9 \Longrightarrow \dfrac{p^4}{16} < p^3 - 4p + 9 \Longrightarrow p < 16 - \dfrac{16(4p-9)}{p^3} \Longrightarrow p \leq 13$.

Sonuç olarak $p \leq 13$ değerlerini deneyerek çözüm ikililerinin $(p, x) = (2, 3)$, $(7, 18)$ ve $(11, 36)$ olduğu elde edilir.

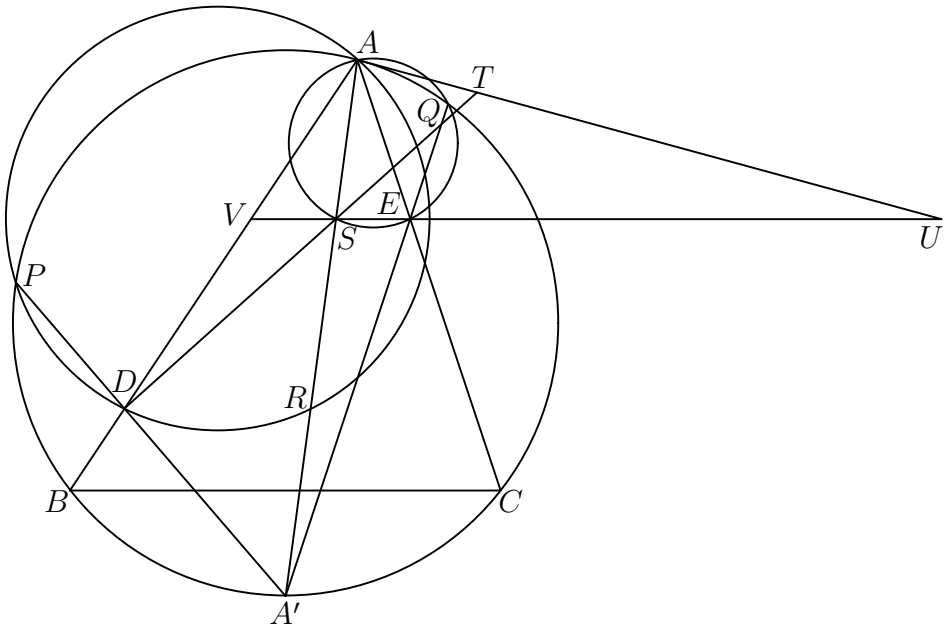
2. Γ, ABC üçgeninin çevrel çemberi; D ve E de, sırasıyla $[AB]$ ve $[AC]$ kenarları üstünde köşelerden farklı noktalar olsun. A', $\widehat{BAC}$ nin açıortayının Γ yı ikinci kez kestiği nokta; P ve Q da, sırasıyla $A'D$ ve $A'E$ doğrularının Γ yı ikinci kez kestiği noktalar olsun. R ve S, sırasıyla APD ve AQE üçgenlerinin çevrel çemberlerinin AA' doğrusunu ikinci kez kestikleri noktalar ise; DS ve ER doğrularının, Γ ya A da teğet olan doğru üstünde bir noktada kesiştiğini gösteriniz.

Çözüm: $\angle RPD = \angle RAD = \angle A'AC = \angle A'PC = \angle DPC$ olduğundan P, R, C noktaları doğrusaldır. O halde $\angle PRD = \angle PAD = \angle PAB = \angle PCB$ olduğu için $DR // BC$ olur. Benzer biçimde $SE // BC$ gelir ve sonuç olarak $SE // DR$ ve $\dfrac{VD}{DA} = \dfrac{SR}{RA}$ elde edilir.

ABC üçgeninin çevrel çemberine A noktasında teğet olan doğru ℓ, DS ve SE doğrularının ℓ ile kesişimleri sırasıyla T ve U olsun. AB ve SE doğrularının kesişimi de V olsun.

$\angle UAE = \angle UAC = \angle B$, $\angle AEU = \angle AVE + \angle EAV = \angle B + \angle A$, ve $\angle UAS = \angle UAE + \angle EAS = \angle AVS + \angle SAV = \angle ASU$ olduğundan $US = UA$ elde edilir. AS doğrusunun VAE üçgeninde iç açıortay olmasını ve AEU üçgeninde sinüs teoremini kullanarak $\dfrac{US}{UE} = \dfrac{UA}{UE} = \dfrac{\sin \angle C}{\sin \angle B} = \dfrac{SV}{ES}$ elde ederiz.

AUV üçgeninde DS kesenine göre uygulanan Menealus teoremi ile $\frac{AT}{TU} \cdot \frac{US}{SV} \cdot \frac{VD}{DA} = 1$ bulunur. Bulduğumuz eşitliklerden $\frac{AT}{TU} \cdot \frac{UE}{ES} \cdot \frac{SR}{RA} = 1$ elde ederiz. AUS üçgeninde uygulanan Menealus teoremi ile R, E, T noktalarının doğrusal olduğu görülür.



3. Bir beldenin Elektrik İşleri görevlisi Ahmet, k gün boyunca her gün, ya seçtiği bir direkle yine kendisinin seçtiği istediği sayıda direk arasına birer tel bağlıyor, ya da en çok 17 direk ikilisi seçip her ikiliye ait direkler arasına birer tel bağlıyor. Beldenin Boya İşleri görevlisi Berna da, beldede kaç direk olursa olsun ve Ahmet telleri nasıl bağlarsa bağlasın, beldedeki tüm direklerin en çok 2009 renk kullanarak ve aralarına tel bağlanmış herhangi iki direk aynı renkte olmayacak biçimde boyanabileceğini iddia ediyor. k nin, Berna'nın iddiasının doğru olmasını sağlayan en büyük değerini belirleyiniz.

Çözüm: Cevap: 2000.

Önce çizge teorisinden iki kavram tanımlayalım. Bir çizgede belirli bir köşe ile kalan köşelerin her biri arasında bir kenar olup başka hiçbir bir kenar bulunmuyorsa, bu çozgeye *yıldız* çizge diyelim. Bir çizgenin her köşesi n renkten birine, ortak kenar paylaşan köşeler farklı renkte olacak şekilde boyanabiliyorsa, n sayısının alabileceği en küçük değer bu çizgenin *kromatik sayısıdır*. Şimdi soruyu çizge kavramını kullanarak yeniden formüle edelim:

Her $1 \leq i \leq k$ için G_i ya bir yıldız ya da kenar sayısı en fazla 17 olan bir çizge olmak üzere, $G = \bigcup_{i=1}^{k} G_i$ çizgesinin kromatik sayısı en fazla 2009 ise k tam sayısının alabileceği en büyük değer kaçtır?

G_i çizgesi, her $1 \leq i \leq m$ için G_i kenar sayısı en fazla 17 olan bir çizge ve her $m+1 \leq i \leq k$ için bir yıldız çizge olsun. $\bigcup_{i=1}^{m} G_i$ çizgesinin kenar sayısı en fazla $17m$ dir.

Lemma: Kromatik sayısı n olan bir çizgenin kenar sayısı en az $\binom{n}{2}$ olmalıdır.

İspat: a ve b çizgenin boyandığı herhangi iki renk olmak üzere, çizgede köşeleri a ve b renklerine boyalı herhangi bir kenarın bulunmadığını varsayalım. Bu durumda a rengine boyalı tüm köşeleri b rengine

boyarsak yine ortak kenar paylaşan köşeler farklı renkte olur. Bu da kromatik sayının n olduğu ile çelişir.

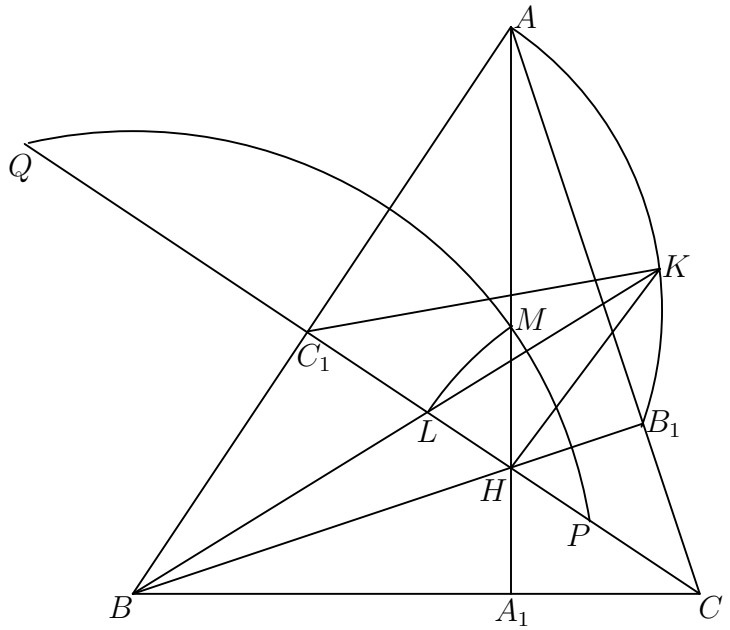
$\bigcup_{i=1}^{m} G_i$ çizgesinin kromatik sayısı en az $m+10$ ise Lemma'ya göre, $\binom{m+10}{2} \leq 17m$ olmalıdır. Son eşitsizliği $(m-\frac{15}{2})^2+\frac{135}{4} \leq 0$ şekilinde yazıp çelişki elde ediyoruz. Sonuç olarak $\bigcup_{i=1}^{m} G_i$ çizgesinin kromatik sayısı en fazla $m+9$ dur. $\bigcup_{i=1}^{m} G_i$ çizgesine yeni bir yıldız çizge eklerken kromatik sayı en fazla bir artar ve sonuç olarak G çizgesinin krimatik sayısı en fazla $(m+9)+(k-m)=k+9$ olur.

Şimdi $k \geq 9$ durumunda en az $k+9$ rengin gerektiğini gösteren bir örnek verelim. K_m çizgesi m köşeli tam çizge olmak üzere, 9 kez 17 şer kenar çizilerek önce K_{18} ve daha sonra $k-9$ yıldız çizge çizilerek bir K_{k+9} elde edilebilir. K_{k+9} tam çizgesinin düzgün boyanması için ise $k+9$ renk gerekiyor.

Buna göre, k sayısının en büyük değeri 2000 olur.

4. Dar açılı bir ABC üçgenin diklik merkezi H ve, A, B, C köşelerine ait yüksekliklerinin ayakları da, sırasıyla A_1, B_1, C_1 dir. K, $[AB]$ çaplı çemberin küçük AB_1 yayı üstünde yer alan ve $m(\widehat{HKB}) = m(\widehat{C_1KB})$ koşulunu sağlayan bir nokta ve $[KB] \cap [CC_1] = \{L\}$ olmak üzere; C merkezli ve $[CL]$ yarıçaplı çember $[AA_1]$ i M noktasında kesiyor. B merkezli ve $[BM]$ yarıçaplı çemberin CC_1 doğrusunu kestiği noktalar P ve Q ise, A, K, P ve Q noktalarının çemberdeş olduğunu kanıtlayınız.

Çözüm: Hem A, C_1, L, K hem de A, C_1, H, B_1 noktaları çembersel olduğu için L, K, B_1, H noktaları da çemberseldir. Bununla birlite, KL doğrusu $\angle C_1KH$ açısınıç iki eş kısma böldüğünden $\angle C_1AL = \angle LB_1H$ elde edilir. Buradan da $\angle ALC = \angle LB_1C$ bulunur. Böylece ALC ve LB_1C üçgenlerinin benzer oldukları görülür. O zaman $CM = CL$ ve A, B_1, A_1, B noktaları çembersel olduğu için $CM^2 = CB \cdot CA_1$ ve $\angle BMC = 90^o$ elde edilir. $BP = BM$ ve C, A_1, C_1 noktaları çembersel olduğu için $BP^2 = BA \cdot BC_1$ ve $\angle BPA = 90^o$ bulunur. Sonuç olarak P noktası AB çaplı çember üzerindedir.



5. Tüm a, b, c, pozitif gerçel sayıları için,

$$\frac{(b+c)(a^4-b^2c^2)}{ab+2bc+ca}+\frac{(c+a)(b^4-c^2a^2)}{bc+2ca+ab}+\frac{(a+b)(c^4-a^2b^2)}{ca+2ab+bc} \geq 0$$

olduğunu gösteriniz.

Çözüm: İlk önce tüm pozitif a, b, c sayıları için

$$\frac{(b+c)(a^4-b^2c^2)}{ab+2bc+ca} \geq \frac{a^3+abc-b^2c-bc^2}{2} \tag{1}$$

olduğunu gösterelim. Eşitsizliğin her iki tarafını $(b+c)+\frac{2bc}{a}$ ile çarparsak

$$(b+c)a^3-2bca^2-bc(b+c)a^2+bc(b^2+c^2) \geq 0$$

elde ederiz. Son olarak $(b+c)^2 \geq 4bc$ olduğundan

$$(b+c)a^3-2bca^2-bc(b+c)a+bc(b^2+c^2) \geq \frac{4bc}{b+c}a^3-2bca^2-bc(b+c)a+bc\frac{(b+c)^2}{2}$$

$$= \frac{bc}{2(b+c)}(2a+b+c)(2a-b-c)^2 \geq 0$$

olur ve (1) eşitsizliği kanıtlanmış olur.

Önce (1) ve daha sonra pozitif a, b, c gerçel sayıları için Schur eşitsizliği kulanılarak istenen eşitsizlik ispatlanır.

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{(b+c)(a^4-b^2c^2)}{ab+2bc+ca} \geq \frac{1}{2}\sum_{\text{cyc}}(a^3+abc-b^2c-bc^2)$$

$$\geq \frac{1}{2}\big(a(a-b)(a-c)+b(b-c)(b-a)+c(c-a)(c-b)\big) \geq 0$$

6. $1 < k_1 < k_2 < \cdots < k_n$ ve $a_1, a_2, \ldots, a_n$ tam sayılar olmak üzere; her N tam sayısı için, $k_i \mid N - a_i$ olacak biçimde en az bir $1 \leq i \leq n$ bulunuyorsa, n nin alabileceği en küçük değeri belirleyiniz.

Çözüm: Cevap: 5.

her N tam sayısı $N \equiv 0 \pmod 2$, $N \equiv 1 \pmod 3$, $N \equiv 3 \pmod 4$, $N \equiv 5 \pmod 6$, $N \equiv 9 \pmod{12}$ denkliklerinden en az birini sağlar ve dolayısıyla n sayısı 5 olabilir. $n \leq 4$ eşitsizliğinin mümkün olmadığını gösterirsek işspat tamamlanır.

$1 < k_1 \leq k_2 \leq \cdots \leq k_n$ ve $a_1, a_2, \ldots, a_n$ şartı sağlayan tam sayılar ve $K = \operatorname{lcm}(k_1, k_2, \ldots, k_n)$ olsun. 1 den K ye kadar olan tam sayılardan en fazla $\frac{K}{k_1}+\frac{K}{k_2}+\cdots+\frac{K}{k_n}$ tanesi $x \equiv a_i \pmod{k_i}$ denkliklerinden en az birini sağlar. Böylece $\frac{1}{k_1}+\frac{1}{k_2}+\cdots+\frac{1}{k_n} \geq 1$ elde edilir.

Şimdi şartları sağlayan en küçük n tam sayısı için koşulları sağlayan $1 < k_1 \leq k_2 \leq \cdots \leq k_n$ ve $a_1, a_2, \ldots, a_n$ tam sayılarını ele alalım. $n \leq 4$ olduğunu varsayalım. $k_1 = 3$ ise, $\frac{1}{k_1}+\frac{1}{k_2}+\cdots+\frac{1}{k_n} \leq \frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6} = \frac{19}{20} < 1$ olur. O zaman $k_1 = 2$ olmalı.

Genelliği bozmadan $a_1 = 1$ kabul edebiliriz. Her $2 \leq i \leq n$ için, k_i tekse $k_i' = k_i$ ve $a_i' \equiv 2^{-1}a_i \pmod{k_i}$, k_i çiftse $k_i' = \frac{k_i}{2}$ ve $a_i' = \frac{a_i}{2}$ olsun. $k_2', \ldots, k_n'$ ve $a_2', \ldots, a_n'$ tam sayıları bölme şartını sağlarlar ancak k_i' ler farklı olmayabilir. Bu durumda, n nin en küçük seçilmesinden ötürü $n = 4$ ve $\{k_2, k_3, k_4\} = \{2m+1, 4m+2, k\}$ olmalı.

- k tek ise, $\{k_2', k_3', k_4'\} = \{2m+1, 2m+1, k\}$ ve $\dfrac{2}{2m+1} + \dfrac{1}{k} \geq 1$ olur. Fakat $\dfrac{2}{2m+1} + \dfrac{1}{k} \leq \dfrac{2}{3} + \dfrac{1}{5} = \dfrac{13}{15} < 1$ olduğundan bu mümkün değildir.

- k çift ise, $\{k_2', k_3', k_4'\} = \{2m+1, 2m+1, \dfrac{k}{2}\}$ ve $\dfrac{2}{2m+1} + \dfrac{2}{k} \geq 1$ olur.

  $2m+1 \geq 5$ veya $2m+1 = 3$ ve $k \geq 8$ sağlanıyorsa, $\dfrac{2}{5} + \dfrac{2}{4} = \dfrac{9}{10} < 1$ ve $\dfrac{2}{3} + \dfrac{2}{8} = \dfrac{11}{12} < 1$ olduğu için çelişki elde ederiz. Kalan tek durum $2m+1 = 3$ ve $k = 4$ olmasıdır. Bu durumda ise $\{k_2', k_3', k_4'\} = \{3, 3, 2\}$ olur. $\pmod 3$ te tam sayıların hepsi çift veya hepsi tek olamayacağı için yine çelişki elde ederiz.