Türkiye Bilimsel ve Teknolojik Araştırma Kurumu

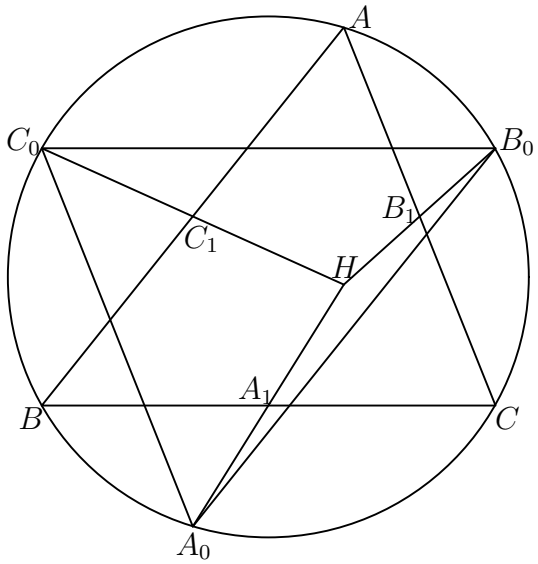
16. Ulusal Matematik Olimpiyatı
İkinci Aşama Sınavı

29-30 Kasım 2008

Çözümler

1. Diklik merkezi H ve çevrel merkezi O olan dar açılı bir ABC üçgeninin BC, AC, AB kenarlarının orta noktaları sırasıyla A_1, B_1 ve C_1 olsun. $[HA_1$, $[HB_1$ ve $[HC_1$ ışınları ABC üçgeninin çevrel çemberini, sırasıyla A_0, B_0 ve C_0 noktalarında kessin. $A_0B_0C_0$ üçgeninin diklik merkezi H_0 ise, O, H ve H_0 noktalarının doğrudaş olduğunu gösteriniz.

Çözüm: H noktası diklik merkezi olduğuna göre, $\angle BHC = 180^\circ - \angle BAC = \angle BA_0C$. Aynı zamanda A_1 noktası BC kenarının orta noktası olduğundan $BHCA_0$ bir paralelkenardır. Buna göre, $\angle ACA_0 = 90^\circ$ ve AA_0 doğru parçası ABC üçgeninin çevrel çemberinin çapı olur. Sonuç olarak ABC üçgeninin O noktasına göre yansıması $A_0B_0C_0$ üçgeni olur. O zaman O noktasına göre yansıma H noktasını H_0 noktasına götürüyor. Demek ki O noktası HH_0 doğru parçasının orta noktasıdır.



2. p asal sayısı ve $p \nmid n$ tam sayısı için, $a = \dfrac{n^{p-1}-1}{p}$ tam sayıdır.

i. $n = 7$ olduğunda, a sayısını tam kare yapan tüm p asal sayılarını bulunuz.

ii. $n = 11$ olduğunda, a sayısını tam kare yapan tüm p asal sayılarını bulunuz.

Çözüm: Cevap: **i.** $p = 3$, **ii.** Şartı sağlayan p asal sayısı yoktur .

p tek asal sayısı, q tek tam sayısı ve x tam sayısı için $px^2 = q^{p-1} - 1$ sağlansın. $\left(q^{(p-1)/2} - 1, q^{(p-1)/2} + 1\right) = 2$ olduğundan iki durum mümkündür.

Durum 1: $q^{(p-1)/2}-1=2py^2$ ve $q^{(p-1)/2}+1=2z^2$ ($y,z\in\mathbb{Z}$) .
Durum 2: $q^{(p-1)/2}-1=2y^2$ ve $q^{(p-1)/2}+1=2pz^2$ ($y,z\in\mathbb{Z}$).

i. $q=7$ olsun. $\pmod 7$ de 2 nin bir kare kalan olması ancak -1 in kare kalan olmaması sebebiyle Durum 2 mümkün değildir. O zaman Durum 1 gerçekleşmeli ve o zaman $6|7^{(p-1)/2}-1=2py^2 \Longrightarrow 3|py^2$ bulunur. $p=3$ iken $(7^2-1)/3=4^2$ oluyor. $p\neq 3$ ise, $3|y^2 \Longrightarrow 9|7^{(p-1)/2}-1 \Longrightarrow 3|(p-1)/2$. $k=(p-1)/6$ olsun. O halde $2z^2=7^{3k}+1=(7^k+1)(7^{2k}-7^k+1)$ eşitliğinden $7^{2k}-7^k+1$ ifadesinin bir tam kare olduğu görülür. Fakat $(7^k-1)^2<7^{2k}-7^k+1<(7^k)^2$ olduğundan bu durum mümkün değildir. Sonuç olarak $(7^{p-1}-1)/p$ ifadesinin bir tam kare olmasını sadece $p=3$ sağlar.

ii. $q=11$ olsun. Bu sefer, $\pmod{11}$ de 2 nin kare kalan olmaması nedeniyle Durum 1 mümkün değildir. O halde Durum 2 sağlanmalı. $11^{(p-1)/2}+1=2pz^2 \Longrightarrow 11^{(p-1)/2}\equiv -1 \pmod p \Longrightarrow 2y^2\equiv 11^{(p-1)/2}-1\equiv -2 \pmod p \Longrightarrow y^2\equiv -1 \pmod p \Longrightarrow p\equiv 1 \pmod 4$. O zaman $11^{(p-1)/2}-1=2y^2$ eşitliği $11^{(p-1)/4}+1=u^2$ veya $11^{(p-1)/4}+1=2u^2$ olmasını sağlar. $u-1$ ve $u+1$ sayılarının ikisi birden 11 in tam kuvveti olamayacağı için $11^{(p-1)/4}+1=u^2$ olması mümkün değildir. $\pmod{11}$ de 2 nin kare kalan olmaması nedeniyle de $11^{(p-1)/4}+1=2u^2$ sağlanması mümkün değildir. Sonuç olarak, $(11^{p-1}-1)/p$ ifadesinin bir tam kare olmasını sağlayan p asal sayısı bulunmaz.

3. $a,b,c\in\mathbb{R}^+$ ve $a+b+c=1$ olmak üzere,

$$\frac{a^2b^2}{c^3(a^2-ab+b^2)}+\frac{b^2c^2}{a^3(b^2-bc+c^2)}+\frac{c^2a^2}{b^3(c^2-ca+a^2)}\geq\frac{3}{ab+bc+ca}$$

olduğunu kanıtlayınız.

Çözüm: Üç değişkenli $f(x,y,z)$ fonksiyonu için $\sum_{\text{cyc}} f(x,y,z)=f(x,y,z)+f(z,x,y)+f(y,z,x)$ olsun. Schur eşitsizliği

$$\sum_{\text{cyc}} x^r(x-y)(x-z)\geq 0$$

şeklindedir. $r=2$ durumunda Schur eşitsizliğini

$$\sum_{\text{cyc}} x^4\geq\sum_{\text{cyc}} x^3(y+z)+xyz\sum_{\text{cyc}} x$$
$$\Big(\sum_{\text{cyc}} x^2\Big)^2\geq\sum_{\text{cyc}}\big(x\,(y^3+z^3)+x^2\,(y^2+z^2-yz)\big)$$
$$\Big(\sum_{\text{cyc}} x^2\Big)^2\geq\sum_{\text{cyc}}\big(x\,(y^2+z^2-yz)\big)\cdot\sum_{\text{cyc}} x$$

şekilinde yazalım. Son eşitsizlikte $x=1/a$, $y=1/b$, $z=1/c$ yazarsak

$$\left(\sum_{\text{cyc}}\frac{1}{a^2}\right)^2\geq\sum_{\text{cyc}}\left(\frac{1}{a}\left(\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}-\frac{1}{bc}\right)\right)\cdot\sum_{\text{cyc}}\frac{1}{a}\ .$$

gelir. Cauchy-Schwarz eşitsizliğine göre,

$$\sum_{\text{cyc}}\frac{b^2c^2}{a^3(b^2-bc+c^2)}\cdot\sum_{\text{cyc}}\frac{(b^2-bc+c^2)}{ab^2c^2}\geq\left(\sum_{\text{cyc}}\frac{1}{a^2}\right)^2$$

olduğundan çözümü tamamlamak için

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{1}{a} \cdot \sum_{\text{cyc}} ab \geq 3 \sum_{\text{cyc}} a$$

eşitsizliğini göstermek yeterli olacaktır. Bu son eşitsizlik de

$$\sum_{\text{cyc}} (ab - ac)^2 \geq 0$$

eşitsizliğine denktir. İspat tamamlanmıştır.

4. $\mathbb{N}$ negatif olmayan tam sayıların ve $\mathbb{Z}$ de tüm tam sayıların kümesi olmak üzere, $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ fonksiyonu,

(i) $f(0,0) = 1, f(0,1) = 1$

(ii) her $k \notin \{0,1\}$ için, $f(0,k) = 0$ ve

(iii) her $n \geq 1$ ve k için $f(n,k) = f(n-1,k) + f(n-1,k-2n)$

koşullarını sağlıyorsa, $\sum_{k=0}^{\binom{2009}{2}} f(2008,k)$ toplamının değerini bulunuz.

Çözüm: n üzerinden tümevarım kullanarak her $n \geq 0$ için

1. $k < 0$ ve $n^2 + n + 1 < k$ durumlarında $f(n,k) = 0$ olduğunu gösterelim: $n = 0$ ise bu direkt olarak (i) koşuludur. İddia n için doğru ise $f(n+1,k) = f(n,k) + f(n,k-2n) = 0$ olur.

2. tüm k değerleri için $f(n, n^2 + n + 1 - k) = f(n,k)$ olduğunu gösterelim:

$$\begin{aligned} f(n+1,(n+1)^2 + (n+1) + 1 - k) &= f(n,(n+1)^2 + (n+1) + 1 - k) \\ +f(n,(n+1)^2 + (n+1) + 1 - k - 2(n+1)) &= f(n, n^2 + n + 1 - (k - 2(n+1))) \\ +f(n, n^2 + n + 1 - k) &= f(n, k - 2(n+1)) + f(n,k) = f(n+1,k). \end{aligned}$$

Sonuç olarak

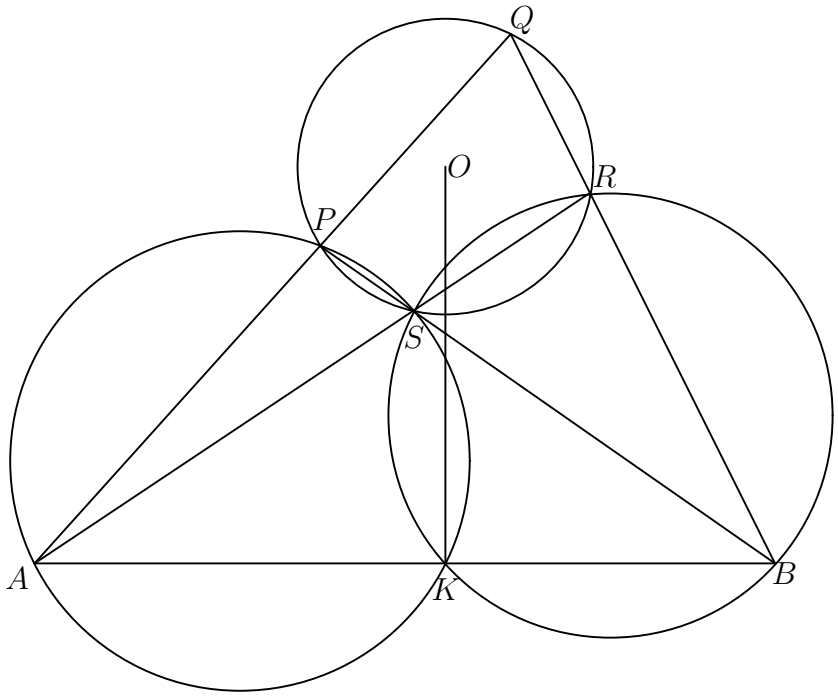
$$\sum_{k=0}^{\binom{2009}{2}} f(2008,k) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{2008^2+2008+1} f(2008,k) = \frac{1}{2} 2^{2009} = 2^{2008}$$

olur.

5. Düzlemde bir l doğrusu ve w çemberi verilmiş olsun. w üzerindeki P, Q, R, S noktaları $PQ \cap RS = \{A\}$ ve $PS \cap QR = \{B\}$ kesişimlerinin ikisi de l doğrusu üzerinde olacak şekilde seçilsin. AB çaplı çemberin, P, Q, R, S'nin seçiminden bağımsız, sabit 2 noktadan geçtiğini gösteriniz.

Çözüm: w çemberinin merkezi O ve yarıçapı r olsun. ABQ üçgeninde Miquel teoremini uygularsak APS ve BRS üçgenlerinin çevrel çemberlerinin kesişim noktası olan K noktasının AB kenarı üzerinde yer aşdığını görürüz. A ve B noktalarının bu çemberlere göre kuvvetlerinden

$AO^2 - r^2 = AS \cdot AR = AK \cdot AB = AK^2 + AK \cdot KB$ ve $BO^2 - r^2 = BS \cdot BP = BK \cdot BA = BK^2 + BK \cdot KA$ elde ederiz. Dolayısıyla $AO^2 - AK^2 = BO^2 - BK^2$ olur ve buradan da OK doğrusunun AB kenarına dik olduğu görülür. O zaman $AK \cdot KB = OK^2 - r^2$ bulunur. Sonuç olarak şartları sağlayan her hangi $\{A, B\}$ çifti için AB çaplı çember, OK doğrusu ğzerinde yer alıp ℓ doğrusuna $\sqrt{OK^2 - r^2}$ uzaklıkta olan iki noktadan geçmektedir. O, K ve r, A ve B den bağımsız oldukları için bu iki nokta sabittir.



6. 2008 tane bilgisayardan oluşan bir bilgisayar ağında, herhangi iki döngü kesişmiyor. $t = 0$ anında, bir bilgisayar korsanı bu ağdaki bir bilgisayarı ele geçiriyor ve $t = 1$ anında da, ağ yöneticisi, ele geçirilmemiş bir bilgisayara koruyucu bir program yüklüyor. Her k pozitif tam sayısı için, $t = 2k$ anında, korsan, varsa, o ana kadar ele geçirdiği bilgisayarlardan birine doğrudan bağlı olan ve koruyucu program yüklenmemiş olan bir bilgisayarı daha ele geçirebiliyor; $t = 2k + 1$ anında da, ağ yöneticisi, varsa, o ana kadar koruyucu program yüklenmiş bilgisayarlardan birine doğrudan bağlı olan ve korsanın ele geçirmemiş olduğu bir bilgisayara daha koruyucu programı yükleyebiliyor. Bilgisayar ağı ne şekilde düzenlenmiş olursa olsun, korsanın en çok kaç tane bilgisayarı ele geçirmeyi garantileyebileceğini belirleyiniz.

[$m \geq 3$ olmak üzere, B_1 ve B_m bilgisayarları ve, her $2 \leq i \leq m$ için, B_{i-1} ve B_i bilgisayarları doğrudan bağlıysa, m elemanlı $\{B_1, B_2, \ldots, B_m\}$ kümesine bir *döngü* diyoruz.]

Çözüm: Cevap: 671.

İlk önce korsanın en fazla 671 bilgisayarı ele geçirmeyi garantileyebileceği bir örnek verelim. $\{B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6\}$ bilgisayarları bir döngü üzerinde bulunsunlar: B_1 ve B_2, B_2 ve $B_3, \ldots B_5$ ve B_6 ve son olarak B_6 ve B_1 bilgisayarları arasında doğrudan bağ olsun. $i = 1, 2, \ldots, n - 1$ olmak üzere, T_i ve T_{i+1} bilgisayarları arasında birer doğrudan bağ varsa, $\{T_1, T_2, \ldots, T_n\}$ bilgisayar grubuna ilk elemanı T_1 olan n elemanlı bir bilgisayar zinciri diyelim. 668 elemanlı birinci bilgisayar zincirinin ilk elemanı doğrudan B_1 bilgisayarına, 667 elemanlı ikinci bilgisayar zincirinin ilk elemanı doğrudan B_3 bilgisayarına, 667 elemanlı üçüncü bilgisayar zincirinin ilk elemanı da doğrudan B_5 bilgisayarına

bağlı olsun. Bu durumda korsanın ilk olarak ele geçirdiği bilgisayar herhnagi bir zincirin elemanıysa, yönetici aynı zincirin döngüye direkt bağlı bilgisayarına koruyucu yükleyerek korsanın en fazla 668 bilgisayarı ele geçirmesini sağlar. Simetriden dolayı sadece korsanın ele geçirdiği bilgisayarın B_1 ve B_2 olduğu durumları inceleyeceğiz. Başlangıçta korsan B_1 bilgisayarını ele geçirirse yönetici koruyucu programı B_4 e yükler. Bu durumda korsan sadece B_6, B_1, B_2 ve B_1 e bağlı birinci bilgisayar zincirindeki bilgisayarları, dolayısıyla 671 bilgisayarı ele geçirmeyi garantileyebilir. Benzer şekilde başlangıçta korsan B_2 bilgisayarını ele geçirirse yönetici koruyucu programı B_1 bilgisayarına yükler ve korsan sadece B_1, B_3, B_4 ve B_2 ye bağlı ikinci bilgisayar zincirindeki bilgisayarları, dolayısıyla 670 bilgisayarı ele geçirmeyi garantileyebilir.

Şimdi bilgisayar ağı ne şekilde düzenlenmiş olursa olsun, korsanın en az 671 bilgisayarı ele geçirmeyi garantileyebileceğini göstereceğiz.

Durum 1: Bilgisayar ağında herhangi bir döngü üzerinde bulunmayan öyle bir B bilgisayarı bulunuyor ki, B bilgisayarı ağdan alındığı takdirde birbirleriyle bağlantılı (doğrudan veya başka bilgisayarlar aracılığıyla) bilgisayardan oluşan her bilgisayar grubunda en fazla 1337 bilgisayar olsun. Bu durumda korsan ilk olarak B bilgisayarını ele geçirirse en az $2008 - 1337 = 671$ bilgisayarı ele geçirmeyi garantiler.

Durum 2: Bilgisayar ağında öyle bir $Z = \{B_1, B_2, \ldots, B_m\}$ ağı bulunuyor ki, bu döngü ağdan alındığı takdirde birbirileriyle bağlantılı (doğrudan veya başka bilgisayarlar aracılığıyla) bilgisayardan oluşan her bilgisayar grubunda en fazla 1337 bilgisayar olsun. Her $1 \leq i \leq m$ indisi için, korsan ilk olarak B_i bilgisayarını ele geçirdiği ve korsan ve yöneticinin en iyi stratejilerini uyguladıkları durumda korsanın Z döngüsünde ve tüm ağda ele geçreceği bilgisayarlar kümeleri sırasıyla H_i ve G_i olsun. $|H_i| = \lceil m/2 \rceil$ olduğu açıktır. i ve j indislerini $|H_i \cup H_j|$ sayısı en büyük olacak şekilde seçelim. $Z = H_i \cup H_j$ ise, $|G_i| + |G_j| \geq 2008$ ve dolayısıyla G_i ve G_j kümelerinin en az biri en az 1004 eleman içermiş olur. Diğer durumda $B_k \in Z \backslash (H_i \cup H_j)$ alırsak $H_i \cup H_j \cup H_k = Z$ olur. O zaman $|G_i| + |G_j| + |G_k| \geq 2008 + 3$, ve dolayısıyla G_i, G_j, G_k kümerinin en az biri en az $\lceil 2011/3 \rceil = 671$ eleman içermiş olur.

Sonuç olarak korsan her iki durumda da en az 671 bilgisayarı ele geçirmeyi garantilemiş olur.

Son olarak bilgisayar ağı ne şekilde düzenlenmiş olursa olsun, *Durum 1* ve *Durum 2* den en az birinin her zaman geçerli olduğunu gösterelim. Aksi takdirde her işlemde seçilecek B bilgisayarını 1337 den fazla bilgisayar içeren bağlantılı gruba doğru bir bilgisayar kaydıralım. Birkaç işlem sonucunda hareket yönünü değiştirmek zorunda kalacağız. Bu noktada her iki yöne doğru en az 1337 bilgisayar bulunmak zorundadır ve bu da bir çelişkidir.