

30. Ulusal Bilim Olimpiyatları
Matematik İkinci Aşama Sınavı

Birinci Gün
21 Aralık 2022

1. Bir ABC üçgeninde BC kenarının orta noktası M , A ya ait iç açıortayın BC ile kesişimi K ve ABC nin çevrel çemberi ile ikinci kesişimi L olsun. $[BC]$ çaplı çember A köşesine ait dış açıortaya teğet ise KLM nin çevrel çemberine de teğet olduğunu gösteriniz.

2. k, n pozitif tam sayılar olmak üzere $k \geq n!$ ise

$$\phi(k) \geq (n-1)!$$

olduğunu gösteriniz.

3. $a_1, a_2, \dots, a_{2022}$ negatif olmayan gerçel sayıları $a_1 + a_2 + \dots + a_{2022} = 1$ eşitliğini sağlıyor. En çok kaç (i, j) sıralı ikilisi için

$$a_i^2 + a_j \geq \frac{1}{2021}$$

olur?

30. Ulusal Bilim Olimpiyatları
Matematik İkinci Aşama Sınavı

İkinci Gün
22 Aralık 2022

4. Hangi a gerçel sayıları için

$$\frac{x^3 + a}{y + z} = \frac{y^3 + a}{x + z} = \frac{z^3 + a}{x + y} = -3$$

olmasını sağlayan farklı x, y, z gerçel sayıları bulunur?

5. ABC üçgeninde $90 > \hat{A} > \hat{B} > \hat{C}$ dir. Diklik merkezi H ve çevrel çember merkezi O olmak üzere HO ile BC doğrularının kesişimi T , AHO üçgeninin çevrel çemberinin merkezi ise X olsun. H noktasının TX doğrusuna göre yansımasının ABC nin çevrel çemberi üzerinde olduğunu gösteriniz.

6. 2022 öğrencinin bulunduğu bir okulda tatil boyunca her gün ya müze gezisi ya da doğa gezisi düzenleniyor. Hiçbir öğrenci aynı tür geziye ikinci kez katılmıyor ve tüm gezilere farklı sayıda öğrenci katılıyor. İki geziye beraber katılan iki öğrenci bulunmadığına göre, toplam gezi sayısının alabileceği en büyük değeri bulunuz.