

28. Ulusal Bilim Olimpiyatları
Matematik İkinci Aşama Sınavı

6 Mart 2021

1. $n > 1$ bir tam sayı olmak üzere, $\{1, 2, \dots, n^2\}$ kümesinin k elemanlı her alt kümesinde $x^2 \mid y$ olacak şekilde x ve y elemanları bulunuyorsa, k nin alabileceği en küçük değeri bulunuz.

2. Dar açılı bir ABC üçgeninin iç bölgesinde diklik merkezinden farklı bir P noktası alınıyor. A dan BP ve CP ye indirilen dikme ayakları sırasıyla D ve E , P den AB ve AC ye indirilen dikme ayakları sırasıyla F ve G dir. $[AP]$ doğru parçasının orta noktası X olmak üzere, DFX ve EGX üçgenlerinin çevrel çemberlerinin ikinci kesişim noktası BC üzerinde yer alıyorsa, $AP \perp BC$ veya $\widehat{PBA} = \widehat{PCA}$ olduğunu gösteriniz.

3. x, y, z pozitif gerçel sayılar olmak üzere,

$$2\sqrt{(x+y+z)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right)} - \sqrt{\left(1 + \frac{x}{y}\right)\left(1 + \frac{y}{z}\right)}$$

ifadesinin alabileceği en küçük değeri bulunuz.

28. Ulusal Bilim Olimpiyatları
Matematik İkinci Aşama Sınavı

7 Mart 2021

4. p bir asal sayı olmak üzere,

$$\frac{28^p - 1}{2p^2 + 2p + 1}$$

bir tam sayı ise, $2p^2 + 2p + 1$ 'in pozitif tam bölen sayısının alabileceği tüm değerleri bulunuz.

5. Her x gerçel sayısı için $\lfloor P(x) \rfloor = a_{\lfloor x^2 \rfloor}$ olacak şekilde bir a_0, a_1, a_2, \dots tam sayı dizisinin bulunmasını sağlayan tüm gerçel katsayılı P polinomlarını bulunuz.

Not: x bir gerçel sayı olmak üzere $\lfloor x \rfloor$ ile x den büyük olmayan en büyük tam sayıyı gösteriyoruz.

6. Bir çember üzerindeki 2021 noktadan her biri $1, 2, \dots, k$ renklerinden birine boyanmıştır. Her nokta ve her $1 \leq r \leq k$ rengi için bu noktayı içeren ve üzerindeki noktaların en az yarısının r renginde olduğu bir yay bulunuyor. Buna göre, k nin alabileceği en büyük değeri bulunuz.