24. Ulusal Matematik Olimpiyatı - 2016
Birinci Aşama Sınavı

Cevap Anahtarı

A		B	
1	b	1	b
2	d	2	b
3	a	3	c
4	b	4	d
5	d	5	d
6	c	6	a
7	b	7	d
8	b	8	d
9	c	9	d
10	d	10	b
11	b	11	a
12	b	12	c
13	b	13	c
14	d	14	b
15	e	15	c
16	c	16	c
17	e	17	e
18	b	18	b
19	e	19	c
20	e	20	b
21	a	21	a
22	b	22	c
23	a	23	a
24	d	24	a
25	e	25	d
26	b	26	b
27	c	27	b
28	d	28	b
29	b	29	a
30	d	30	c
31	d	31	c
32	d	32	b

TÜBİTAK

TÜRKİYE BİLİMSEL VE TEKNOLOJİK ARAŞTIRMA KURUMU
BİLİM İNSANI DESTEKLEME DAİRE BAŞKANLIĞI

24. ULUSAL MATEMATİK OLİMPİYATI - 2016
BİRİNCİ AŞAMA SINAVI

Soru kitapçığı türü

A

4 Haziran 2016 Cumartesi, 09.30-12.30

ÖĞRENCİNİN ADI SOYADI :
T.C. KİMLİK NO :
OKULU / SINIFI :
SINAVA GİRDİĞİ İL :

SINAVLA İLGİLİ UYARILAR:

- Bu sınav çoktan seçmeli 32 sorudan oluşmaktadır, süre 180 dakikadır.
- Cevap kâğıdınıza size verilen soru kitapçığının türünü gösteren harfi işaretlemeyi unutmayınız.
- Her sorunun sadece bir doğru cevabı vardır. Doğru cevabınızı cevap kâğıdınızdaki ilgili kutucuğu **tamamen karalayarak** işaretleyiniz. Soru kitapçığındaki hiçbir işaretleme değerlendirmeye alınmayacaktır.
- **Her soru eşit değerde olup, dört yanlış cevap bir doğru cevabı götürecektir.** Boş bırakılan soruların değerlendirmede olumlu ya da olumsuz bir etkisi olmayacaktır.
- Sınavda pergel, cetvel, hesap makinesi gibi yardımcı araçlar ve karalama kâğıdı kullanılması yasaktır. Soru kitapçığındaki boşlukları karalama için kullanabilirsiniz.
- Sınav süresince görevlilerle konuşulması ve soru sorulması, öğrencilerin birbirlerinden kalem, silgi vb. şeyler istemeleri yasaktır.
- Sorularda bir yanlışın olması düşük bir olasılıktır. Böyle bir şeyin olması durumunda sınav akademik kurulu gerekeni yapacaktır. Bu durumda size düşen en doğru olduğuna karar verdiğiniz seçeneği işaretlemenizdir. Ancak, sınava giren aday bir sorunun yanlış olduğundan emin ise, itiraz için sınav soruları ve cevap anahtarı TÜBİTAK'ın internet sayfasında **(http://www.tubitak.gov.tr)** yayınlandıktan sonra 10 iş günü içerisinde kanıtları ile birlikte, TÜBİTAK'a başvurması gerekir; bu tarihten sonra yapılacak başvurular işleme konmayacaktır. Sadece sınava giren adayların sorulara itiraz hakkı vardır, üçüncü kişilerin sınav sorularına itirazı işleme alınmayacaktır.
- Ulusal Matematik Olimpiyatı - 2016 Birinci Aşama Sınavı'nda sorulan soruların üçüncü kişiler tarafından kullanılması sonucunda doğacak olan hukuki sorunlardan TÜBİTAK ve Olimpiyat Komitesi sorumlu tutulamaz. Olimpiyat Komitesi bu tür durumlarda sorular ile ilgili görüş bildirmek zorunda değildir.
- Sınav sırasında kopya çeken, çekmeye teşebbüs eden ve kopya verenlerin kimlikleri sınav tutanağına yazılacak ve bu kişilerin sınavları geçersiz sayılacaktır.
- Sınav başladıktan sonraki ilk yarım saat içinde sınav salonundan ayrılmak yasaktır.
- Sınav süresince sınava giriş belgenizi ve resimli bir kimlik belgesini masanızın üzerinde bulundurunuz.
- Sınav salonundan ayrılmadan önce cevap kâğıdınızı görevlilere teslim etmeyi unutmayınız.

BAŞARILAR DİLERİZ.

1. $AB \parallel CD$ ve $|AB| > |CD|$ olan bir $ABCD$ yamuğunda AC ve BD köşegenlerinin kesişim noktası E dir. DEC üçgeninin çevrel çemberine E noktasında teğet olan doğru $[AB$ ışınını F noktasında kesiyor. $|AF| = 9$, $|AB| = 5$ ise $|EF|$ kaçtır?

a) 5 b) 6 c) 7 d) 8 e) 9

2. $n^2 + mn + 14 = 7n + 3m$ denklemini sağlayan kaç farklı (m, n) tam sayı ikilisi vardır?

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) Hiçbiri

3. $abc = 2$ koşulunu sağlayan a, b, c pozitif gerçel sayıları için $a^2 + 2b^2 + 4c^2 - 6b$ ifadesinin alabileceği en küçük değer nedir?

a) 0 b) 1 c) 2 d) 4 e) Hiçbiri

4. 24×24 satranç tahtasının bazı birim karelerine birer taş nasıl yerleştirilirse yerleştirilsin, her taşı k renkten birine, aynı satır veya aynı sütun üzerinde olup aralarında başka taş bulunmayan herhangi iki taşın rengi farklı olacak şekilde boyayabiliyorsak, k nın alabileceği en küçük değer nedir?

a) 2 b) 3 c) 4 d) 5 e) 6

5. Bir ABC üçgeninde $m(\widehat{BAC}) = 45°$ ve $[AC]$ üzerinde alınan bir D noktası için $m(\widehat{DBC}) = 90°$ dir. $\dfrac{|CD|}{|AB|} = 2\sqrt{2}$ ise $m(\widehat{BDC})$ nedir?

a) $52.5°$ b) $60°$ c) $67.5°$ d) $75°$ e) $90°$

6. n bir pozitif tam sayı ve $a_1, a_2, \ldots, a_n$ birer tam sayı olmak üzere her $i = 1, 2, \ldots, n$ için $b_i = a_i^2$ olarak tanımlanıyor. Hiçbir $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ tam sayı n-lisi için $2^{b_1} + 2^{b_2} + \cdots + 2^{b_n} - n^2$ ifadesi 7 ile tam bölünmüyorsa n kaç farklı değer alabilir?

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) Sonsuz çoklukta

7. Bir $f : \mathbf{R} \setminus \left\{-\dfrac{2}{7}, \dfrac{1}{7}\right\} \to \mathbf{R}$ fonksiyonu, tanım kümesinde bulunan her x için

$$f(x) + f\left(\frac{x-1}{7x+2}\right) = x$$

eşitliğini sağlıyorsa $f(1)$ aşağıdakilerden hangisine eşit olabilir?

a) $\dfrac{1}{7}$ b) $\dfrac{1}{4}$ c) $\dfrac{2}{7}$ d) $\dfrac{1}{2}$ e) Hiçbiri

8. Başlangıçta masa üzerinde her biri 51 gram süt içeren birkaç bardak bulunuyor. Bir kedi her işlemde önce masadaki her bardaktan 3 gram süt içiyor, daha sonra bir bardak alıp bu bardaktaki sütü diğer bardaklara eşit olarak dağıtıyor ve boş bardağı masadan atıyor. Birkaç işlem sonucunda masada tek bir bardak kalıyor. Bu son bardakta yine 51 gram süt bulunuyorsa kedi toplamda kaç gram süt içmiştir?

a) 1530 b) 1581 c) 1632 d) 1683 e) 1734

9. Bir ABC üçgeninde iç teğet çember BC, CA, AB kenarlarına sırasıyla D, E, F noktalarında teğettir. EF doğrusu $[CB$ ışınını P noktasında kesiyor. Buna göre $|BD| = 1$, $|CD| = 3$, $|PF| = \sqrt{5}$ ise $|CA|$ uzunluğu kaçtır?

a) 4 b) $2\sqrt{5}$ c) 5 d) $4\sqrt{2}$ e) 6

10. $p \in \{7, 11, 13, 17, 19\}$ olmak üzere kaç farklı p asal sayısı için $a^2 + b + 1$ ve $b^2 + a + 1$ sayılarının her ikisi de p ile tam bölünecek biçimde a ve b tam sayıları bulunabilir?

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

11.

$$\begin{aligned}(x+2y)(y+2z)(z+2x) &= 1\\(2x+y)(2y+z)(2z+x) &= 2\\(x+y)(y+z)(z+x) &= 3\end{aligned}$$

denklem sistemini sağlayan x, y, z gerçel sayıları için xyz ifadesi aşağıdakilerden hangisine eşit olabilir?

a) $-\dfrac{1}{2}$ b) $-\dfrac{5}{2}$ c) $\dfrac{1}{4}$ d) $\dfrac{5}{4}$ e) Hiçbiri

12. İki basamaklı sayılardan oluşan her $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ kümesinin herhangi ikisinin her iki basamağı birbirinden farklı olan 5 elemanı bulunuyorsa, n en az kaç olabilir?

a) 38 b) 41 c) 45 d) 51 e) Hiçbiri

13. Bir ABC üçgeninin BC kenarına ait dış teğet çemberinin merkezi O olsun. O dan geçen bir doğru AB ve AC doğrularını sırasıyla D ve E de kesiyor. $|AD| > |AB|$, $|AE| > |AC|$, $|AD| = |AE|$, $|BD| = 9$, $|OD| = 8$, $|OC| = 4$ ise $|OB|$ kaçtır?

a) 4 b) $\frac{9}{2}$ c) 5 d) $\frac{11}{2}$ e) 6

14. $3, 5, 7, 11, 13$ sayılarından kaç tanesi $(n+3)(n+7)(n+11)(n+15)+257$ ifadesini hiçbir n tam sayısı için tam bölemez?

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

15. $1 \leq |a|, |b|, |c| \leq 10$, $a \neq c$ ve $b^2 \geq 4ac$ koşullarını sağlayan a, b, c tam sayıları için $ax^2+bx+c=0$ denkleminin en küçük kökü ile $cx^2+bx+a=0$ denkleminin en büyük kökü birbirine eşitse (a, b, c) üçlüsüne *karesel üçlü* diyelim. Kaç farklı karesel üçlü vardır?

a) 20 b) 40 c) 50 d) 60 e) 80

16. $1, 2, \ldots, 2016$ sayılarının her biri k renkten birine, $a \mid b$ ve $b \mid c$ koşullarını sağlayan herhangi üç farklı a, b ve c sayıları aynı renkte olmayacak şekilde boyanabiliyorsa, k en az kaç olabilir?

a) 4 b) 5 c) 6 d) 7 e) 8

17. Dar açılı bir ABC üçgeninin AD kenarortayı, BE yüksekliği ve CF iç açıortayı noktadaştır. $|BC| = 10$, $|CA| = 6$ ise $|AB|$ kaçtır?

a) $4\sqrt{5}$ b) 9 c) $\sqrt{85}$ d) $3\sqrt{10}$ e) $\sqrt{91}$

18. n bir pozitif tam sayı, p bir asal sayı, d_1 ve d_2 ise n sayısının birbirinden farklı iki pozitif tam böleni olmak üzere $n = p(d_1 + d_2)$ biçiminde yazılabiliyorsa n sayısına *dengeli sayı* diyelim. 100 den küçük kaç dengeli sayı vardır?

a) 11 b) 17 c) 24 d) 30 e) Hiçbiri

19. Gerçel katsayılı bir P polinomu $P(1) = 1$ ve her x, y gerçel sayıları için $P(x) + P(y) = P(x + y) - 2xy + 1$ koşullarını sağlıyor. Buna göre $P(x)$ in alabileceği en küçük değer nedir?

a) $\frac{1}{4}$ b) $\frac{1}{3}$ c) $\frac{1}{2}$ d) $\frac{2}{3}$ e) $\frac{3}{4}$

20. Kaç $n \in \{12, 18, 42, 60, 72\}$ değeri için $1, 2, \ldots, n$ sayıları herhangi iki komşu sayının toplamı asal sayı olacak şekilde sıraya dizilebilir?

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

21. $|AB| = 13$, $|BC| = 4$, $|CA| = 15$ olan bir ABC üçgeninde iç teğet çemberin merkezi I ve BC kenarının orta noktası M dir. IM doğrusu BC kenarına ait yüksekliği K de kesiyor. Buna göre $|AK|$ kaçtır?

a) $\dfrac{3}{2}$ b) 2 c) $\dfrac{5}{2}$ d) 3 e) $\dfrac{7}{2}$

22. Pozitif tam sayılardan oluşan bir $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ dizisinin terimleri her $n \geq 1$ için $a_{n+1} = a_n^3 + 1376$ eşitliğini sağlamaktadır. Buna göre bu dizinin terimleri arasında en fazla kaç tane tam kare olabilir?

a) 1 b) 2 c) 3 d) Sonsuz çoklukta e) Hiçbiri

23. Tüm terimleri birbirinden ve sıfırdan farklı bir $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ gerçel sayı dizisi $a_0 = \sqrt{2}$ ve her $n \geq 1$ için $a_n a_{n+1} + \dfrac{4}{a_n a_{n-1}} = 2\left(1 + \dfrac{a_{n+1}}{a_{n-1}}\right)$ koşulunu sağlıyor. Buna göre $a_1 \cdot a_2 \cdots a_{2016}$ çarpımının alabileceği kaç farklı değer vardır?

a) 1 b) 2 c) 4 d) Sonsuz çoklukta e) Hiçbiri

24. Elimizde 12 kırmızı ve 12 beyaz top bulunuyor. Bir doğru üzerindeki 6 boş kutunun her birine bu toplardan 2 tanesi, herhangi iki komşu kutuda aynı renkli top bulunması koşuluyla kaç farklı biçimde dağıtılabilir?

a) 204 b) 216 c) 228 d) 239 e) 251

25. Dar açılı bir ABC üçgeninde BC kenarına ait yükseklik C den geçen ve AB doğrusuna A da teğet olan çemberi ikinci kez K de kesiyor. Benzer şekilde AC kenarına ait yükseklik C den geçen ve AB doğrusuna B de teğet olan çemberi ikinci kez L de kesiyor. $|CK| = 12$, $|KL| = 9$ ise $|CL|$ uzunluğunun alabileceği değerlerin toplamı kaçtır?

a) 12 b) 15 c) 18 d) 21 e) 24

26. $\binom{3n}{n}$ ifadesinin 2016 ile tam bölünmesini sağlayan en küçük n pozitif tam sayısı kaçtır?

a) 11 b) 23 c) 31 d) 43 e) Hiçbiri

27. $P(x) = (x^3 + x + 1)(x^3 - 3x^2 + 4x - 3)$ polinomunun gerçel köklerinin toplamı kaçtır?

a) -1 b) 0 c) 1 d) 2 e) 3

28. Bir torbada başlangıçta 2016 adet eşit uzunluklu çubuk bulunuyor. Her işlemde bir çubuk seçilip iki eşit parçaya bölünüyor. İşlemler nasıl yapılırsa yapılsın torbada her zaman en az n tane eşit uzunluklu çubuk bulunuyorsa, n nin alabileceği en büyük değer nedir?

a) 2 b) 505 c) 756 d) 1009 e) 1511

29. $m(\widehat{ABD}) = 45°$ koşulunu sağlayan bir $ABCD$ kirişler dörtgeninde CD doğrusu $[BA$ ışınını E de kesiyor. $|AB| + |BD| = |AE|$ ve $|ED| = 2|AC|$ ise $m(\widehat{DEB})$ nedir?

a) $15°$ b) $22.5°$ c) $30°$ d) $37.5°$ e) $45°$

30. $23, 29, 31, 37, 41$ sayılarından kaç tanesi en az bir (m, n) pozitif tam sayı ikilisi için $m^7 - n^7 - 3$ sayısını tam böler?

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

31. $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = 1$ koşulunu sağlayan a, b, c pozitif gerçel sayıları için $(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2$ ifadesi $2016^{-2}, 2016^{-1}, 1, 2016$ sayılarından kaç tanesine eşit olabilir?

a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4

32. Aslı ve Berk başlangıçta birkaç sayı yazılmış tahtada sırayla hamle yaparak bir oyun oynuyorlar. Sırası gelen oyuncu tahtadaki bir sayıyı siliyor veya tahtadaki bir sayıyı silip yerine o sayının bir fazlasını, tahtadaki tüm sayıların birbirinden farklı olması ve hiçbirinin 24 ü aşmaması koşuluyla yazıyor. Oyunu son hamleyi yapan oyuncu kazanıyor. Oyuna her seferinde Aslı başlamak üzere, oyun tahtadaki sayılar $\{2, 3, 22, 23\}$, $\{1, 2, 3, 21, 22, 23\}$, $\{1, 7, 12, 13, 19, 24\}$, $\{5, 6, 11, 17, 18\}$ ve $\{10, 11, 12, 13, 14\}$ olarak birer kez oynanırsa, Aslı bu oyunların kaçını kazanmayı garantileyebilir?

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

TÜBİTAK

TÜRKİYE BİLİMSEL VE TEKNOLOJİK ARAŞTIRMA KURUMU
BİLİM İNSANI DESTEKLEME DAİRE BAŞKANLIĞI

24. ULUSAL MATEMATİK OLİMPİYATI - 2016
BİRİNCİ AŞAMA SINAVI

Soru kitapçığı türü

B

4 Haziran 2016 Cumartesi, 09.30-12.30

ÖĞRENCİNİN ADI SOYADI :
T.C. KİMLİK NO :
OKULU / SINIFI :
SINAVA GİRDİĞİ İL :

SINAVLA İLGİLİ UYARILAR:

- Bu sınav çoktan seçmeli 32 sorudan oluşmaktadır, süre 180 dakikadır.
- Cevap kâğıdınıza size verilen soru kitapçığının türünü gösteren harfi işaretlemeyi unutmayınız.
- Her sorunun sadece bir doğru cevabı vardır. Doğru cevabınızı cevap kâğıdınızdaki ilgili kutucuğu **tamamen karalayarak** işaretleyiniz. Soru kitapçığındaki hiçbir işaretleme değerlendirmeye alınmayacaktır.
- **Her soru eşit değerde olup, dört yanlış cevap bir doğru cevabı götürecektir.** Boş bırakılan soruların değerlendirmede olumlu ya da olumsuz bir etkisi olmayacaktır.
- Sınavda pergel, cetvel, hesap makinesi gibi yardımcı araçlar ve karalama kâğıdı kullanılması yasaktır. Soru kitapçığındaki boşlukları karalama için kullanabilirsiniz.
- Sınav süresince görevlilerle konuşulması ve soru sorulması, öğrencilerin birbirlerinden kalem, silgi vb. şeyler istemeleri yasaktır.
- Sorularda bir yanlışın olması düşük bir olasılıktır. Böyle bir şeyin olması durumunda sınav akademik kurulu gerekeni yapacaktır. Bu durumda size düşen en doğru olduğuna karar verdiğiniz seçeneği işaretlemenizdir. Ancak, sınava giren aday bir sorunun yanlış olduğundan emin ise, itiraz için sınav soruları ve cevap anahtarı TÜBİTAK'ın internet sayfasında **(http://www.tubitak.gov.tr)** yayınlandıktan sonra 10 iş günü içerisinde kanıtları ile birlikte, TÜBİTAK'a başvurması gerekir; bu tarihten sonra yapılacak başvurular işleme konmayacaktır. Sadece sınava giren adayların sorulara itiraz hakkı vardır, üçüncü kişilerin sınav sorularına itirazı işleme alınmayacaktır.
- Ulusal Matematik Olimpiyatı - 2016 Birinci Aşama Sınavı'nda sorulan soruların üçüncü kişiler tarafından kullanılması sonucunda doğacak olan hukuki sorunlardan TÜBİTAK ve Olimpiyat Komitesi sorumlu tutulamaz. Olimpiyat Komitesi bu tür durumlarda sorular ile ilgili görüş bildirmek zorunda değildir.
- Sınav sırasında kopya çeken, çekmeye teşebbüs eden ve kopya verenlerin kimlikleri sınav tutanağına yazılacak ve bu kişilerin sınavları geçersiz sayılacaktır.
- Sınav başladıktan sonraki ilk yarım saat içinde sınav salonundan ayrılmak yasaktır.
- Sınav süresince sınava giriş belgenizi ve resimli bir kimlik belgesini masanızın üzerinde bulundurunuz.
- Sınav salonundan ayrılmadan önce cevap kâğıdınızı görevlilere teslim etmeyi unutmayınız.

BAŞARILAR DİLERİZ.

1. Bir ABC üçgeninde $m(\widehat{BAC}) = 45^\circ$ ve $[AC]$ üzerinde alınan bir D noktası için $m(\widehat{DBC}) = 90^\circ$ dir. $\dfrac{|CD|}{|AB|} = 2\sqrt{2}$ ise $m(\widehat{BDC})$ nedir?

a) 90° b) 75° c) 67.5° d) 60° e) 52.5°

2. n bir pozitif tam sayı ve $a_1, a_2, \ldots, a_n$ birer tam sayı olmak üzere her $i = 1, 2, \ldots, n$ için $b_i = a_i^2$ olarak tanımlanıyor. Hiçbir $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ tam sayı n-lisi için $2^{b_1} + 2^{b_2} + \cdots + 2^{b_n} - n^2$ ifadesi 7 ile tam bölünmüyorsa n kaç farklı değer alabilir?

a) 4 b) 3 c) 2 d) 1 e) Sonsuz çoklukta

3. Bir $f : \mathbf{R} \setminus \left\{-\dfrac{2}{7}, \dfrac{1}{7}\right\} \to \mathbf{R}$ fonksiyonu, tanım kümesinde bulunan her x için

$$f(x) + f\left(\frac{x-1}{7x+2}\right) = x$$

eşitliğini sağlıyorsa $f(1)$ aşağıdakilerden hangisine eşit olabilir?

a) $\dfrac{1}{2}$ b) $\dfrac{2}{7}$ c) $\dfrac{1}{4}$ d) $\dfrac{1}{7}$ e) Hiçbiri

4. Başlangıçta masa üzerinde her biri 51 gram süt içeren birkaç bardak bulunuyor. Bir kedi her işlemde önce masadaki her bardaktan 3 gram süt içiyor, daha sonra bir bardak alıp bu bardaktaki sütü diğer bardaklara eşit olarak dağıtıyor ve boş bardağı masadan atıyor. Birkaç işlem sonucunda masada tek bir bardak kalıyor. Bu son bardakta yine 51 gram süt bulunuyorsa kedi toplamda kaç gram süt içmiştir?

a) 1734 b) 1683 c) 1632 d) 1581 e) 1530

5. $AB \parallel CD$ ve $|AB| > |CD|$ olan bir $ABCD$ yamuğunda AC ve BD köşegenlerinin kesişim noktası E dir. DEC üçgeninin çevrel çemberine E noktasında teğet olan doğru $[AB$ ışınını F noktasında kesiyor. $|AF| = 9$, $|AB| = 5$ ise $|EF|$ kaçtır?

a) 9 b) 8 c) 7 d) 6 e) 5

6. $n^2 + mn + 14 = 7n + 3m$ denklemini sağlayan kaç farklı (m, n) tam sayı ikilisi vardır?

a) 4 b) 3 c) 2 d) 1 e) Hiçbiri

7. $abc = 2$ koşulunu sağlayan a, b, c pozitif gerçel sayıları için $a^2 + 2b^2 + 4c^2 - 6b$ ifadesinin alabileceği en küçük değer nedir?

a) 4 b) 2 c) 1 d) 0 e) Hiçbiri

8. 24×24 satranç tahtasının bazı birim karelerine birer taş nasıl yerleştirilirse yerleştirilsin, her taşı k renkten birine, aynı satır veya aynı sütun üzerinde olup aralarında başka taş bulunmayan herhangi iki taşın rengi farklı olacak şekilde boyayabiliyorsak, k nın alabileceği en küçük değer nedir?

a) 6 b) 5 c) 4 d) 3 e) 2

9. Bir ABC üçgeninin BC kenarına ait dış teğet çemberinin merkezi O olsun. O dan geçen bir doğru AB ve AC doğrularını sırasıyla D ve E de kesiyor. $|AD| > |AB|$, $|AE| > |AC|$, $|AD| = |AE|$, $|BD| = 9$, $|OD| = 8$, $|OC| = 4$ ise $|OB|$ kaçtır?

a) 6 b) $\dfrac{11}{2}$ c) 5 d) $\dfrac{9}{2}$ e) 4

10. $3, 5, 7, 11, 13$ sayılarından kaç tanesi $(n + 3)(n + 7)(n + 11)(n + 15) + 257$ ifadesini hiçbir n tam sayısı için tam bölemez?

a) 5 b) 4 c) 3 d) 2 e) 1

11. $1 \leq |a|, |b|, |c| \leq 10$, $a \neq c$ ve $b^2 \geq 4ac$ koşullarını sağlayan a, b, c tam sayıları için $ax^2 + bx + c = 0$ denkleminin en küçük kökü ile $cx^2 + bx + a = 0$ denkleminin en büyük kökü birbirine eşitse (a, b, c) üçlüsüne *karesel üçlü* diyelim. Kaç farklı karesel üçlü vardır?

a) 80 b) 60 c) 50 d) 40 e) 20

12. $1, 2, \ldots, 2016$ sayılarının her biri k renkten birine, $a \mid b$ ve $b \mid c$ koşullarını sağlayan herhangi üç farklı a, b ve c sayıları aynı renkte olmayacak şekilde boyanabiliyorsa, k en az kaç olabilir?

a) 8 b) 7 c) 6 d) 5 e) 4

13. Bir ABC üçgeninde iç teğet çember BC, CA, AB kenarlarına sırasıyla D, E, F noktalarında teğettir. EF doğrusu $[CB$ ışınını P noktasında kesiyor. Buna göre $|BD| = 1$, $|CD| = 3$, $|PF| = \sqrt{5}$ ise $|CA|$ uzunluğu kaçtır?

a) 6 b) $4\sqrt{2}$ c) 5 d) $2\sqrt{5}$ e) 4

14. $p \in \{7, 11, 13, 17, 19\}$ olmak üzere kaç farklı p asal sayısı için $a^2 + b + 1$ ve $b^2 + a + 1$ sayılarının her ikisi de p ile tam bölünecek biçimde a ve b tam sayıları bulunabilir?

a) 5 b) 4 c) 3 d) 2 e) 1

15.

$$\begin{aligned} (x+2y)(y+2z)(z+2x) &= 1 \\ (2x+y)(2y+z)(2z+x) &= 2 \\ (x+y)(y+z)(z+x) &= 3 \end{aligned}$$

denklem sistemini sağlayan x, y, z gerçel sayıları için xyz ifadesi aşağıdakilerden hangisine eşit olabilir?

a) $\frac{5}{4}$ b) $\frac{1}{4}$ c) $-\frac{5}{2}$ d) $-\frac{1}{2}$ e) Hiçbiri

16. İki basamaklı sayılardan oluşan her $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ kümesinin herhangi ikisinin her iki basamağı birbirinden farklı olan 5 elemanı bulunuyorsa, n en az kaç olabilir?

a) 51 b) 45 c) 41 d) 38 e) Hiçbiri

17. $|AB| = 13$, $|BC| = 4$, $|CA| = 15$ olan bir ABC üçgeninde iç teğet çemberin merkezi I ve BC kenarının orta noktası M dir. IM doğrusu BC kenarına ait yüksekliği K de kesiyor. Buna göre $|AK|$ kaçtır?

a) $\dfrac{7}{2}$ b) 3 c) $\dfrac{5}{2}$ d) 2 e) $\dfrac{3}{2}$

18. Pozitif tam sayılardan oluşan bir $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ dizisinin terimleri her $n \geq 1$ için $a_{n+1} = a_n^3 + 1376$ eşitliğini sağlamaktadır. Buna göre bu dizinin terimleri arasında en fazla kaç tane tam kare olabilir?

a) 3 b) 2 c) 1 d) Sonsuz çoklukta e) Hiçbiri

19. Tüm terimleri birbirinden ve sıfırdan farklı bir $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ gerçel sayı dizisi $a_0 = \sqrt{2}$ ve her $n \geq 1$ için $a_n a_{n+1} + \dfrac{4}{a_n a_{n-1}} = 2\left(1 + \dfrac{a_{n+1}}{a_{n-1}}\right)$ koşulunu sağlıyor. Buna göre $a_1 \cdot a_2 \cdots a_{2016}$ çarpımının alabileceği kaç farklı değer vardır?

a) 4 b) 2 c) 1 d) Sonsuz çoklukta e) Hiçbiri

20. Elimizde 12 kırmızı ve 12 beyaz top bulunuyor. Bir doğru üzerindeki 6 boş kutunun her birine bu toplardan 2 tanesi, herhangi iki komşu kutuda aynı renkli top bulunması koşuluyla kaç farklı biçimde dağıtılabilir?

a) 251 b) 239 c) 228 d) 216 e) 204

21. Dar açılı bir ABC üçgeninin AD kenarortayı, BE yüksekliği ve CF iç açıortayı noktadaştır. $|BC| = 10$, $|CA| = 6$ ise $|AB|$ kaçtır?

a) $\sqrt{91}$ b) $3\sqrt{10}$ c) $\sqrt{85}$ d) 9 e) $4\sqrt{5}$

22. n bir pozitif tam sayı, p bir asal sayı, d_1 ve d_2 ise n sayısının birbirinden farklı iki pozitif tam böleni olmak üzere $n = p(d_1 + d_2)$ biçiminde yazılabiliyorsa n sayısına *dengeli sayı* diyelim. 100 den küçük kaç dengeli sayı vardır?

a) 30 b) 24 c) 17 d) 11 e) Hiçbiri

23. Gerçel katsayılı bir P polinomu $P(1) = 1$ ve her x, y gerçel sayıları için $P(x) + P(y) = P(x + y) - 2xy + 1$ koşullarını sağlıyor. Buna göre $P(x)$ in alabileceği en küçük değer nedir?

a) $\frac{3}{4}$ b) $\frac{2}{3}$ c) $\frac{1}{2}$ d) $\frac{1}{3}$ e) $\frac{1}{4}$

24. Kaç $n \in \{12, 18, 42, 60, 72\}$ değeri için $1, 2, \ldots, n$ sayıları herhangi iki komşu sayının toplamı asal sayı olacak şekilde sıraya dizilebilir?

a) 5 b) 4 c) 3 d) 2 e) 1

25. $m(\widehat{ABD}) = 45°$ koşulunu sağlayan bir $ABCD$ kirişler dörtgeninde CD doğrusu $[BA$ ışınını E de kesiyor. $|AB| + |BD| = |AE|$ ve $|ED| = 2|AC|$ ise $m(\widehat{DEB})$ nedir?

a) $45°$ b) $37.5°$ c) $30°$ d) $22.5°$ e) $15°$

26. $23, 29, 31, 37, 41$ sayılarından kaç tanesi en az bir (m, n) pozitif tam sayı ikilisi için $m^7 - n^7 - 3$ sayısını tam böler?

a) 5 b) 4 c) 3 d) 2 e) 1

27. $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = 1$ koşulunu sağlayan a, b, c pozitif gerçel sayıları için $(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2$ ifadesi $2016^{-2}, 2016^{-1}, 1, 2016$ sayılarından kaç tanesine eşit olabilir?

a) 4 b) 3 c) 2 d) 1 e) 0

28. Aslı ve Berk başlangıçta birkaç sayı yazılmış tahtada sırayla hamle yaparak bir oyun oynuyorlar. Sırası gelen oyuncu tahtadaki bir sayıyı siliyor veya tahtadaki bir sayıyı silip yerine o sayının bir fazlasını, tahtadaki tüm sayıların birbirinden farklı olması ve hiçbirinin 24 ü aşmaması koşuluyla yazıyor. Oyunu son hamleyi yapan oyuncu kazanıyor. Oyuna her seferinde Aslı başlamak üzere, oyun tahtadaki sayılar $\{2, 3, 22, 23\}$, $\{1, 2, 3, 21, 22, 23\}$, $\{1, 7, 12, 13, 19, 24\}$, $\{5, 6, 11, 17, 18\}$ ve $\{10, 11, 12, 13, 14\}$ olarak birer kez oynanırsa, Aslı bu oyunların kaçını kazanmayı garantileyebilir?

a) 5 b) 4 c) 3 d) 2 e) 1

29. Dar açılı bir ABC üçgeninde BC kenarına ait yükseklik C den geçen ve AB doğrusuna A da teğet olan çemberi ikinci kez K de kesiyor. Benzer şekilde AC kenarına ait yükseklik C den geçen ve AB doğrusuna B de teğet olan çemberi ikinci kez L de kesiyor. $|CK| = 12$, $|KL| = 9$ ise $|CL|$ uzunluğunun alabileceği değerlerin toplamı kaçtır?

a) 24 b) 21 c) 18 d) 15 e) 12

30. $\binom{3n}{n}$ ifadesinin 2016 ile tam bölünmesini sağlayan en küçük n pozitif tam sayısı kaçtır?

a) 43 b) 31 c) 23 d) 11 e) Hiçbiri

31. $P(x) = (x^3 + x + 1)(x^3 - 3x^2 + 4x - 3)$ polinomunun gerçel köklerinin toplamı kaçtır?

a) 3 b) 2 c) 1 d) 0 e) -1

32. Bir torbada başlangıçta 2016 adet eşit uzunluklu çubuk bulunuyor. Her işlemde bir çubuk seçilip iki eşit parçaya bölünüyor. İşlemler nasıl yapılırsa yapılsın torbada her zaman en az n tane eşit uzunluklu çubuk bulunuyorsa, n nin alabileceği en büyük değer nedir?

a) 1511 b) 1009 c) 756 d) 505 e) 2