TÜBİTAK

TÜRKİYE BİLİMSEL VE TEKNOLOJİK ARAŞTIRMA KURUMU
BİLİM İNSANI DESTEKLEME DAİRE BAŞKANLIĞI

23. ULUSAL MATEMATİK OLİMPİYATI - 2015
BİRİNCİ AŞAMA SINAVI

Soru kitapçığı türü
A

16 Haziran 2015 Salı, 09.30 - 12.30

ADAYIN ADI SOYADI :
T.C. KİMLİK NO :
OKULU / SINIFI :
SINAVA GİRDİĞİ İL :

SINAVLA İLGİLİ UYARILAR:

- Bu sınav çoktan seçmeli 32 adet sorudan oluşmaktadır, süre 180 dakikadır.
- Her sorunun sadece bir doğru cevabı vardır. Doğru cevabınızı, cevap kağıdınızdaki ilgili kutucuğu **tamamen karalayarak** işaretleyiniz. Soru kitapçığındaki hiç bir işaretleme değerlendirmeye alınmayacaktır.
- **Her soru eşit değerde olup, dört yanlış cevap bir doğru cevabı götürecektir.** Boş bırakılan soruların değerlendirmede olumlu ya da olumsuz bir etkisi olmayacaktır.
- Sorular zorluk sırasında DEĞİLDİR. Dolayısıyla yanıtlamaya geçmeden önce bütün soruları gözden geçirmeniz önerilir.
- Sınavda herhangi bir yardımcı materyal, elektronik hesap makinesi ya da karalama kağıdı kullanılması yasaktır. Soru kitapçığındaki boşlukları karalama için kullanabilirsiniz.
- Sınav süresince görevlilerle konuşulması ve soru sorulması, öğrencilerin birbirlerinden kalem, silgi vb. şeyler istemeleri yasaktır.
- Sorularda bir yanlışın olması düşük bir olasılıktır. Böyle bir şeyin olması durumunda sınav akademik kurulu gerekeni yapacaktır. Bu durumda size düşen, en doğru olduğuna karar verdiğiniz seçeneği işaretlemenizdir. Ancak, sınava giren aday eğer bir sorunun yanlış olduğundan emin ise itiraz için, sınav soruları ve cevap anahtarı TÜBİTAK'ın internet sayfasında (**http://www.tubitak.gov.tr**) yayınlandıktan sonra 10 işgünü içerisinde, kanıtları ile birlikte, TÜBİTAK'a başvurması gerekir; bu tarihten sonra yapılacak başvurular işleme konmayacaktır. Sadece sınava giren adayın sorulara itiraz hakkı vardır, üçüncü kişilerin sınav sorularına itirazı işleme alınmayacaktır.
- Ulusal Matematik Olimpiyatı – 2015 Birinci Aşama Sınavında sorulan soruların üçüncü kişiler tarafından kullanılması sonucunda doğacak olan hukuki sorunlardan TÜBİTAK ve Olimpiyat Komitesi sorumlu tutulamaz. Olimpiyat komitesi, bu tip durumlarda sorular ile ilgili görüş bildirmek zorunda değildir.
- Sınav sırasında kopya çeken, çekmeye teşebbüs eden ve kopya verenlerin kimlikleri sınav tutanağına yazılacak ve bu kişilerin sınavları geçersiz sayılacaktır. Görevliler kopya çekmeye veya vermeye kalkışanları uyarmak zorunda değildir, sorumluluk size aittir.
- Sınav başladıktan sonraki ilk yarım saat içinde sınav salonundan ayrılmak yasaktır.
- Sınav süresince sınava giriş belgenizi ve resimli bir kimlik belgesini masanızın üzerinde bulundurunuz.
- Sınav salonundan ayrılmadan önce cevap kağıdınızı ve soru kitapçığını görevlilere teslim etmeyi unutmayınız.

Başarılar Dileriz

1. Bir $ABCD$ dikdörtgeninin iç bölgesinde $EF \parallel AC$ olacak şekilde E ve F noktaları veriliyor. E ve F nin AB kenarı üzerindeki izdüşümleri ile beraber oluşturdukları yamuğun alanı 3, BC kenarı üzerindeki izdüşümleri ile beraber oluşturdukları yamuğun alanı 4, CD kenarı üzerindeki izdüşümleri ile beraber oluşturdukları yamuğun alanı 5 olduğuna göre, AD kenarı üzerindeki izdüşümleri ile beraber oluşturdukları yamuğun alanı kaçtır?

a) 2 b) 4 c) 6 d) 8 e) Hiçbiri

2. Birkaç pozitif tam sayının en küçük ortak katları 2015 ise bu sayıların toplamı en az kaç olabilir?

a) 13 b) 22 c) 49 d) 65 e) 96

3. $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots$ sonsuz geometrik dizisinin bazı elemanları silinerek toplamı S ye eşit olan bir sonsuz geometrik dizi elde edilebiliyorsa, S sayısı $\frac{1}{2015}, \frac{1}{215}, \frac{1}{15}, \frac{1}{5}$ değerlerinden kaçına eşit olabilir?

a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4

4. Düzlemdeki n doğrunun her biri diğer doğruların tam olarak 2015 tanesiyle kesişiyorsa, n kaç farklı değer alabilir?

a) 1 b) 3 c) 6 d) 8 e) 10

5. Bir $ABCD$ karesinin $[AC]$ köşegeni üzerinde $|AE| = |EF| = |FC|$ olacak şekilde E ve F noktaları alınıyor. ACD üçgeninin iç bölgesinde bulunan ve AD kenarına teğet olan O_1 merkezli bir çember AC kenarına da E noktasında teğettir. Benzer şekilde ACD üçgeninin iç bölgesinde bulunan ve CD kenarına teğet olan O_2 merkezli bir çember AC kenarına da F noktasında teğettir. Buna göre BO_1O_2 üçgeninin alanının DO_1O_2 üçgeninin alanına oranı kaçtır?

a) $\dfrac{13+12\sqrt{2}}{17}$ b) $\dfrac{3+2\sqrt{2}}{5}$ c) $\dfrac{7+4\sqrt{2}}{13}$ d) $\dfrac{12+5\sqrt{2}}{9}$ e) $\dfrac{18+8\sqrt{2}}{21}$

6. 2323^{2323} ün pozitif tam bölenlerinin bazılarından oluşan $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ kümesinde hiçbir eleman bir diğerini tam bölmüyorsa, n nin alabileceği en büyük değer nedir?

a) 2322 b) 2323 c) 2324 d) 2325 e) Hiçbiri

7. $xy(x-y) = 1$ ve $x^2 - xy + y^2 = y + 1$ koşullarını sağlayan (x, y) gerçel sayı ikilileri için $x^2 + y^2$ ifadesinin alabileceği en büyük ve en küçük değerlerin farkı kaçtır?

a) 1 b) $\sqrt{2}$ c) $\sqrt{3}$ d) 2 e) $\sqrt{5}$

8. $a_i \in \{0, 1\}$ olmak üzere, kaç $(a_1, a_2, \ldots, a_{11})$ onbirlisi $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 \geq a_6 + a_7 + a_8 + a_9 + a_{10} + a_{11}$ koşulunu sağlar?

a) 682 b) 758 c) 864 d) 956 e) 1024

9. Bir ABC üçgeninin A köşesinden geçen iç açıortay ile B köşesinden geçen kenarortay P noktasında kesişiyor. $|AP| = \sqrt{3}$, $|BP| = 1$, $|CP| = \sqrt{7}$ ise, ABC üçgeninin alanı kaçtır?

a) $\sqrt{3}$ b) 2 c) $2\sqrt{2}$ d) $2\sqrt{3}$ e) $3\sqrt{2}$

10. Her $i \in \{1, 2 \ldots 22\}$ için a_i, a_{i+1} i tam bölecek ve a_{23} de 2015 i tam bölecek biçimde kaç farklı $(a_1, a_2, \ldots, a_{23})$ pozitif tam sayı 23-lüsü vardır?

a) 23^3 b) 23^4 c) 24^3 d) 24^4 e) Hiçbiri

11. a ve b, $a+b=1$ koşulunu sağlayan gerçel sayılar olmak üzere, $(a^2-b)(b^2-a)$ ifadesinin alabileceği en küçük değer nedir?

a) $-3\sqrt{3}$ b) -5 c) 0 d) $\dfrac{1}{16}$ e) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

12. Köşeleri, verilmiş bir düzgün n-genin köşeleri üzerinde olan ikizkenar üçgenlerin sayısı $s(n)$ olmak üzere, $s(n) > s(n+1)$ koşulunu sağlayan kaç $n \leq 2015$ pozitif tam sayısı vardır?

a) 336 b) 403 c) 504 d) 671 e) 1007

13. Bir ABC üçgeninin $[BC]$ kenarı üzerinde $|BA_1| = |A_1A_2| = |A_2C|$ olacak biçimde A_1 ve A_2 noktaları alınıyor. Benzer şekilde $[CA]$ kenarı üzerinde $|CB_1| = |B_1B_2| = |B_2A|$ olacak biçimde B_1 ve B_2 noktaları alınıyor. AA_1 doğrusu BB_1 ve BB_2 doğrularını sırasıyla X ve W noktalarında, AA_2 doğrusu da BB_1 ve BB_2 doğrularını sırasıyla Y ve Z noktalarına kesiyor. Buna göre $XYZW$ dörtgeninin alanının ABC üçgeninin alanına oranı kaçtır?

a) $\frac{1}{9}$ b) $\frac{4}{35}$ c) $\frac{8}{63}$ d) $\frac{9}{70}$ e) $\frac{1}{7}$

14. 2015 den büyük olmayan pozitif tam sayılardan oluşan $\{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ kümesinde herhangi iki elemanın farkı bu iki elemanın toplamını tam bölmüyorsa, k en fazla kaç olabilir?

a) 403 b) 462 c) 504 d) 613 e) 672

15. $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ ve $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ fonksiyonları, her $x \neq 0$ için

$$f(2x+1) + g(x-1) = 3x + 2$$

$$f\left(\frac{x+1}{x}\right) + 3g\left(\frac{1-2x}{2x}\right) = \frac{1}{2x} + 4$$

eşitliklerini sağlıyorsa $f(2015) + g(2015)$ kaçtır?

a) -2016 b) -2015 c) 2014 d) 2015 e) Hiçbiri

16. Bir çember etrafına yüz sayı dizilmiştir. Saat yönünde kendisinden sonra gelen ilk iki sayıdan büyük olan sayılara A tipi, saat yönünde kendisinden önce gelen ilk iki sayıdan küçük olan sayılara ise B tipi sayı diyelim (bir sayı hem A hem de B tipi olabilir). A tipi sayıların sayısı 80 ise, B tipi sayıların sayısı en az kaç olabilir?

a) 60 b) 61 c) 62 d) 63 e) Hiçbiri

17. Düzlemde bir çember ve bu çemberin dış bölgesinde $A_1, A_2, \ldots A_n$ noktaları veriliyor. Bu çemberin üzerindeki her A noktası için, $[AA_1], [AA_2], \ldots [AA_n]$ doğru parçalarından en az üçü çemberi yalnızca A noktasında kesiyorsa, n en az kaç olabilir?

a) 4 b) 5 c) 6 d) 7 e) 8

18. $0 \leq n < 23^2$ koşulunu sağlayan kaç farklı n tam sayısı için, $n^5 + 2n^4 + n^3 - 3n + 2$ sayısı 23^2 ile tam bölünür?

a) 0 b) 1 c) 5 d) 23 e) Hiçbiri

19. $f(x) = ax^2 - 3ax + 2a + 23$ fonksiyonu her $1 \leq x \leq 2$ için $|f(x)| \leq 23$ koşulunu sağlıyorsa, a nın alabileceği en büyük değer nedir?

a) 178 b) 181 c) 184 d) 187 e) 190

20. Başlangıçta 101 top içeren bir kırmızı kutu ve boş bir beyaz kutu bulunuyor. Aslı ve Burak sırayla hamle yaparak bir oyun oynuyorlar. Aslı her hamlesinde bir pozitif tam sayı seçiyor ve kırmızı kutudan seçtiği sayıda topu beyaz kutuya aktarıyor. Burak da her hamlesinde bir pozitif tam sayı seçiyor ve beyaz kutudan seçtiği sayıda topu kırmızı kutuya aktarıyor. Bir sayı en fazla bir kez seçilebiliyor. Sırası gelen oyuncu hamle yapamazsa oyun bitiyor. İlk hamleyi yapan Aslı, beyaz kutuda en fazla kaç top kalmasını garantileyebilir?

a) 1 b) 49 c) 50 d) 51 e) 101

21. $|AB| = 11$ ve $|AC| = 9$ koşullarını sağlayan bir ABC üçgeninin iç bölgesinde $|BP| = 7$ ve $|CP| = 3$ koşullarını sağlayan bir P noktası alınıyor. Buna göre $|AP|$ uzunluğunun alabileceği kaç farklı tam sayı değeri vardır?

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

22. $x^2 + 1 \equiv ax \pmod{23}$ olacak şekilde en az bir x tam sayısının bulunmasını sağlayan kaç farklı $0 \leq a < 23$ tam sayısı vardır?

a) 5 b) 6 c) 10 d) 11 e) 12

23. Çevresi 23 birim ve alanı 23 birim kare olan kaç farklı ikizkenar üçgen vardır?

a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4

24. Bir sınıftaki 23 öğrenci üç gruba, birbirleriyle arkadaş olan öğrenciler aynı grupta olmayacak şekilde tek türlü dağıtılabiliyorsa, sınıftaki arkadaş ikilisi sayısı en az kaç olabilir?

a) 41 b) 43 c) 46 d) 48 e) 50

25. Köşeleri bir çember üzerinde bulunan bir $ABCDE$ beşgeninin kenar uzunlukları $|AB| = |BC| = 7, |CD| = |AE| = 15$ ve $|DE| = 24$ olarak veriliyor. Bu beşgenin alanı kaçtır?

a) 112 b) 168 c) 210 d) 276 e) 360

26. $n > 1$ tam sayısının en büyük ve en küçük asal bölenlerinin toplamı $f(n)$ olmak üzere, $f(n) = n - 23$ denklemini sağlayan kaç farklı $n > 1$ tam sayısı vardır?

a) 2 b) 3 c) 4 d) 5 e) 6

27. $x^{23} - 2015^{2015}x + 23 = c$ denkleminin en az üç farklı gerçel çözümünün bulunmasını sağlayan tüm c tam sayılarının aritmetik ortalaması kaçtır?

a) -46 b) 0 c) 403 d) 2015 e) Hiçbiri

28. Tabanı $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7$ 7-geni olan bir piramidin her ayrıtının kırmızı ve mavi renklerden birine, bu piramidin her köşesinden herhangi bir diğer köşesine hem sadece kırmızıya boyalı hem de sadece maviye boyalı ayrıtlar takip edilerek ulaşılabilecek şekilde boyanmasına *iyi boyama* diyelim. Kaç iyi boyama vardır?

a) 218 b) 234 c) 252 d) 298 e) 324

29. İç teğet çemberinin merkezi I olan ve $|AB| = 3$, $|BC| = 7$, $|CA| = 5$ koşullarını sağlayan bir ABC üçgeni verilmiştir. BIC üçgeninin çevrel çemberi üzerinde BC doğrusuna göre I ile farklı tarafta kalacak biçimde alınan bir D noktasından $[BC]$ kenarına inilen dikmenin ayağı E dir. Buna göre $\dfrac{|BE|}{|CE|} = \dfrac{9}{5}$ ise $m\left(\widehat{BAD}\right)$ kaçtır?

a) 30° b) 45° c) 60° d) 75° e) 90°

30. $3(m^3n + n^2 + 1) = m(n^3 + 9m + n)$ denklemini sağlayan kaç farklı (m, n) tam sayı ikilisi vardır?

a) 0 b) 2 c) 4 d) 8 e) Sonsuz çoklukta

31. Elemanları 23 den büyük olmayan $a_1, a_2, \ldots, a_n$ pozitif tam sayılar dizisinde ilk ve son eleman dışındaki her eleman iki komşusunun aritmetik ortalamasından büyüktür. Buna göre n nin alabileceği en büyük değer nedir?

a) 12 b) 13 c) 14 d) 15 e) 16

32. 23 kentin bulunduğu bir ülkede 250 kent ikilisi arasında karşılıklı uçak seferleri, ülkedeki herhangi bir kentten bir diğerine (doğrudan veya birkaç aktarmayla) en fazla 5 saatlik uçuş süresi sonucunda ulaşılabilecek biçimde nasıl düzenlenirse düzenlensin, k saatlik uçuş sonucunda bir kentten başlayıp her kente en az bir kez uğrayarak baştaki kente dönülebiliyorsa, k nın alabileceği en küçük değer nedir?

a) 95 b) 100 c) 105 d) 110 e) 115

TÜRKİYE BİLİMSEL VE TEKNOLOJİK ARAŞTIRMA KURUMU
BİLİM İNSANI DESTEKLEME DAİRE BAŞKANLIĞI

23. ULUSAL MATEMATİK OLİMPİYATI - 2015
BİRİNCİ AŞAMA SINAVI

Soru kitapçığı türü
B

16 Haziran 2015 Salı, 09.30 - 12.30

ADAYIN ADI SOYADI :
T.C. KİMLİK NO :
OKULU / SINIFI :
SINAVA GİRDİĞİ İL :

SINAVLA İLGİLİ UYARILAR:

- Bu sınav çoktan seçmeli 32 adet sorudan oluşmaktadır, süre 180 dakikadır.
- Her sorunun sadece bir doğru cevabı vardır. Doğru cevabınızı, cevap kağıdınızdaki ilgili kutucuğu **tamamen karalayarak** işaretleyiniz. Soru kitapçığındaki hiç bir işaretleme değerlendirmeye alınmayacaktır.
- **Her soru eşit değerde olup, dört yanlış cevap bir doğru cevabı götürecektir.** Boş bırakılan soruların değerlendirmede olumlu ya da olumsuz bir etkisi olmayacaktır.
- Sorular zorluk sırasında DEĞİLDİR. Dolayısıyla yanıtlamaya geçmeden önce bütün soruları gözden geçirmeniz önerilir.
- Sınavda herhangi bir yardımcı materyal, elektronik hesap makinesi ya da karalama kağıdı kullanılması yasaktır. Soru kitapçığındaki boşlukları karalama için kullanabilirsiniz.
- Sınav süresince görevlilerle konuşulması ve soru sorulması, öğrencilerin birbirlerinden kalem, silgi vb. şeyler istemeleri yasaktır.
- Sorularda bir yanlışın olması düşük bir olasılıktır. Böyle bir şeyin olması durumunda sınav akademik kurulu gerekeni yapacaktır. Bu durumda size düşen, en doğru olduğuna karar verdiğiniz seçeneği işaretlemenizdir. Ancak, sınava giren aday eğer bir sorunun yanlış olduğundan emin ise itiraz için, sınav soruları ve cevap anahtarı TÜBİTAK'ın internet sayfasında (**http://www.tubitak.gov.tr**) yayınlandıktan sonra 10 işgünü içerisinde, kanıtları ile birlikte, TÜBİTAK'a başvurması gerekir; bu tarihten sonra yapılacak başvurular işleme konmayacaktır. Sadece sınava giren adayın sorulara itiraz hakkı vardır, üçüncü kişilerin sınav sorularına itirazı işleme alınmayacaktır.
- Ulusal Matematik Olimpiyatı – 2015 Birinci Aşama Sınavında sorulan soruların üçüncü kişiler tarafından kullanılması sonucunda doğacak olan hukuki sorunlardan TÜBİTAK ve Olimpiyat Komitesi sorumlu tutulamaz. Olimpiyat komitesi, bu tip durumlarda sorular ile ilgili görüş bildirmek zorunda değildir.
- Sınav sırasında kopya çeken, çekmeye teşebbüs eden ve kopya verenlerin kimlikleri sınav tutanağına yazılacak ve bu kişilerin sınavları geçersiz sayılacaktır. Görevliler kopya çekmeye veya vermeye kalkışanları uyarmak zorunda değildir, sorumluluk size aittir.
- Sınav başladıktan sonraki ilk yarım saat içinde sınav salonundan ayrılmak yasaktır.
- Sınav süresince sınava giriş belgenizi ve resimli bir kimlik belgesini masanızın üzerinde bulundurunuz.
- Sınav salonundan ayrılmadan önce cevap kağıdınızı ve soru kitapçığını görevlilere teslim etmeyi unutmayınız.

Başarılar Dileriz

1. Bir $ABCD$ karesinin $[AC]$ köşegeni üzerinde $|AE| = |EF| = |FC|$ olacak şekilde E ve F noktaları alınıyor. ACD üçgeninin iç bölgesinde bulunan ve AD kenarına teğet olan O_1 merkezli bir çember AC kenarına da E noktasında teğettir. Benzer şekilde ACD üçgeninin iç bölgesinde bulunan ve CD kenarına teğet olan O_2 merkezli bir çember AC kenarına da F noktasında teğettir. Buna göre BO_1O_2 üçgeninin alanının DO_1O_2 üçgeninin alanına oranı kaçtır?

a) $\dfrac{18+8\sqrt{2}}{21}$ b) $\dfrac{12+5\sqrt{2}}{9}$ c) $\dfrac{7+4\sqrt{2}}{13}$ d) $\dfrac{3+2\sqrt{2}}{5}$ e) $\dfrac{13+12\sqrt{2}}{17}$

2. 2323^{2323} ün pozitif tam bölenlerinin bazılarından oluşan $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ kümesinde hiçbir eleman bir diğerini tam bölmüyorsa, n nin alabileceği en büyük değer nedir?

a) 2325 b) 2324 c) 2323 d) 2322 e) Hiçbiri

3. $xy(x-y) = 1$ ve $x^2 - xy + y^2 = y + 1$ koşullarını sağlayan (x, y) gerçel sayı ikilileri için $x^2 + y^2$ ifadesinin alabileceği en büyük ve en küçük değerlerin farkı kaçtır?

a) $\sqrt{5}$ b) 2 c) $\sqrt{3}$ d) $\sqrt{2}$ e) 1

4. $a_i \in \{0, 1\}$ olmak üzere, kaç $(a_1, a_2, \ldots, a_{11})$ onbirlisi $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 \geq a_6 + a_7 + a_8 + a_9 + a_{10} + a_{11}$ koşulunu sağlar?

a) 1024 b) 956 c) 864 d) 758 e) 682

5. Bir $ABCD$ dikdörtgeninin iç bölgesinde $EF \parallel AC$ olacak şekilde E ve F noktaları veriliyor. E ve F nin AB kenarı üzerindeki izdüşümleri ile beraber oluşturdukları yamuğun alanı 3, BC kenarı üzerindeki izdüşümleri ile beraber oluşturdukları yamuğun alanı 4, CD kenarı üzerindeki izdüşümleri ile beraber oluşturdukları yamuğun alanı 5 olduğuna göre, AD kenarı üzerindeki izdüşümleri ile beraber oluşturdukları yamuğun alanı kaçtır?

a) 8 b) 6 c) 4 d) 2 e) Hiçbiri

6. Birkaç pozitif tam sayının en küçük ortak katları 2015 ise bu sayıların toplamı en az kaç olabilir?

a) 96 b) 65 c) 49 d) 22 e) 13

7. $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots$ sonsuz geometrik dizisinin bazı elemanları silinerek toplamı S ye eşit olan bir sonsuz geometrik dizi elde edilebiliyorsa, S sayısı $\frac{1}{2015}, \frac{1}{215}, \frac{1}{15}, \frac{1}{5}$ değerlerinden kaçına eşit olabilir?

a) 4 b) 3 c) 2 d) 1 e) 0

8. Düzlemdeki n doğrunun her biri diğer doğruların tam olarak 2015 tanesiyle kesişiyorsa, n kaç farklı değer alabilir?

a) 10 b) 8 c) 6 d) 3 e) 1

9. Bir ABC üçgeninin $[BC]$ kenarı üzerinde $|BA_1| = |A_1A_2| = |A_2C|$ olacak biçimde A_1 ve A_2 noktaları alınıyor. Benzer şekilde $[CA]$ kenarı üzerinde $|CB_1| = |B_1B_2| = |B_2A|$ olacak biçimde B_1 ve B_2 noktaları alınıyor. AA_1 doğrusu BB_1 ve BB_2 doğrularını sırasıyla X ve W noktalarında, AA_2 doğrusu da BB_1 ve BB_2 doğrularını sırasıyla Y ve Z noktalarına kesiyor. Buna göre $XYZW$ dörtgeninin alanının ABC üçgeninin alanına oranı kaçtır?

a) $\frac{1}{7}$ b) $\frac{9}{70}$ c) $\frac{8}{63}$ d) $\frac{4}{35}$ e) $\frac{1}{9}$

10. 2015 den büyük olmayan pozitif tam sayılardan oluşan $\{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ kümesinde herhangi iki elemanın farkı bu iki elemanın toplamını tam bölmüyorsa, k en fazla kaç olabilir?

a) 672 b) 613 c) 504 d) 462 e) 403

11. $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ ve $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ fonksiyonları, her $x \neq 0$ için

$$f(2x+1) + g(x-1) = 3x + 2$$

$$f\left(\frac{x+1}{x}\right) + 3g\left(\frac{1-2x}{2x}\right) = \frac{1}{2x} + 4$$

eşitliklerini sağlıyorsa $f(2015) + g(2015)$ kaçtır?

a) 2015 b) 2014 c) -2015 d) -2016 e) Hiçbiri

12. Bir çember etrafına yüz sayı dizilmiştir. Saat yönünde kendisinden sonra gelen ilk iki sayıdan büyük olan sayılara A tipi, saat yönünde kendisinden önce gelen ilk iki sayıdan küçük olan sayılara ise B tipi sayı diyelim (bir sayı hem A hem de B tipi olabilir). A tipi sayıların sayısı 80 ise, B tipi sayıların sayısı en az kaç olabilir?

a) 63 b) 62 c) 61 d) 60 e) Hiçbiri

13. Bir ABC üçgeninin A köşesinden geçen iç açıortay ile B köşesinden geçen kenarortay P noktasında kesişiyor. $|AP| = \sqrt{3}$, $|BP| = 1$, $|CP| = \sqrt{7}$ ise, ABC üçgeninin alanı kaçtır?

a) $3\sqrt{2}$ b) $2\sqrt{3}$ c) $2\sqrt{2}$ d) 2 e) $\sqrt{3}$

14. Her $i \in \{1, 2 \ldots 22\}$ için a_i, a_{i+1} i tam bölecek ve a_{23} de 2015 i tam bölecek biçimde kaç farklı $(a_1, a_2, \ldots, a_{23})$ pozitif tam sayı 23-lüsü vardır?

a) 24^4 b) 24^3 c) 23^4 d) 23^3 e) Hiçbiri

15. a ve b, $a+b = 1$ koşulunu sağlayan gerçel sayılar olmak üzere, $(a^2-b)(b^2-a)$ ifadesinin alabileceği en küçük değer nedir?

a) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ b) $\dfrac{1}{16}$ c) 0 d) -5 e) $-3\sqrt{3}$

16. Köşeleri, verilmiş bir düzgün n-genin köşeleri üzerinde olan ikizkenar üçgenlerin sayısı $s(n)$ olmak üzere, $s(n) > s(n+1)$ koşulunu sağlayan kaç $n \leq 2015$ pozitif tam sayısı vardır?

a) 1007 b) 671 c) 504 d) 403 e) 336

17. $|AB| = 11$ ve $|AC| = 9$ koşullarını sağlayan bir ABC üçgeninin iç bölgesinde $|BP| = 7$ ve $|CP| = 3$ koşullarını sağlayan bir P noktası alınıyor. Buna göre $|AP|$ uzunluğunun alabileceği kaç farklı tam sayı değeri vardır?

a) 5 b) 4 c) 3 d) 2 e) 1

18. $x^2 + 1 \equiv ax \pmod{23}$ olacak şekilde en az bir x tam sayısının bulunmasını sağlayan kaç farklı $0 \leq a < 23$ tam sayısı vardır?

a) 12 b) 11 c) 10 d) 6 e) 5

19. Çevresi 23 birim ve alanı 23 birim kare olan kaç farklı ikizkenar üçgen vardır?

a) 4 b) 3 c) 2 d) 1 e) 0

20. Bir sınıftaki 23 öğrenci üç gruba, birbirleriyle arkadaş olan öğrenciler aynı grupta olmayacak şekilde tek türlü dağıtılabiliyorsa, sınıftaki arkadaş ikilisi sayısı en az kaç olabilir?

a) 50 b) 48 c) 46 d) 43 e) 41

21. Düzlemde bir çember ve bu çemberin dış bölgesinde $A_1, A_2, \ldots A_n$ noktaları veriliyor. Bu çemberin üzerindeki her A noktası için, $[AA_1], [AA_2], \ldots [AA_n]$ doğru parçalarından en az üçü çemberi yalnızca A noktasında kesiyorsa, n en az kaç olabilir?

a) 8 b) 7 c) 6 d) 5 e) 4

22. $0 \leq n < 23^2$ koşulunu sağlayan kaç farklı n tam sayısı için, $n^5 + 2n^4 + n^3 - 3n + 2$ sayısı 23^2 ile tam bölünür?

a) 23 b) 5 c) 1 d) 0 e) Hiçbiri

23. $f(x) = ax^2 - 3ax + 2a + 23$ fonksiyonu her $1 \leq x \leq 2$ için $|f(x)| \leq 23$ koşulunu sağlıyorsa, a nın alabileceği en büyük değer nedir?

a) 190 b) 187 c) 184 d) 181 e) 178

24. Başlangıçta 101 top içeren bir kırmızı kutu ve boş bir beyaz kutu bulunuyor. Aslı ve Burak sırayla hamle yaparak bir oyun oynuyorlar. Aslı her hamlesinde bir pozitif tam sayı seçiyor ve kırmızı kutudan seçtiği sayıda topu beyaz kutuya aktarıyor. Burak da her hamlesinde bir pozitif tam sayı seçiyor ve beyaz kutudan seçtiği sayıda topu kırmızı kutuya aktarıyor. Bir sayı en fazla bir kez seçilebiliyor. Sırası gelen oyuncu hamle yapamazsa oyun bitiyor. İlk hamleyi yapan Aslı, beyaz kutuda en fazla kaç top kalmasını garantileyebilir?

a) 101 b) 51 c) 50 d) 49 e) 1

25. İç teğet çemberinin merkezi I olan ve $|AB| = 3$, $|BC| = 7$, $|CA| = 5$ koşullarını sağlayan bir ABC üçgeni verilmiştir. BIC üçgeninin çevrel çemberi üzerinde BC doğrusuna göre I ile farklı tarafta kalacak biçimde alınan bir D noktasından $[BC]$ kenarına inilen dikmenin ayağı E dir. Buna göre $\dfrac{|BE|}{|CE|} = \dfrac{9}{5}$ ise $m\left(\widehat{BAD}\right)$ kaçtır?

a) $90°$ b) $75°$ c) $60°$ d) $45°$ e) $30°$

26. $3(m^3n + n^2 + 1) = m(n^3 + 9m + n)$ denklemini sağlayan kaç farklı (m, n) tam sayı ikilisi vardır?

a) 8 b) 4 c) 2 d) 0 e) Sonsuz çoklukta

27. Elemanları 23 den büyük olmayan $a_1, a_2, \ldots, a_n$ pozitif tam sayılar dizisinde ilk ve son eleman dışındaki her eleman iki komşusunun aritmetik ortalamasından büyüktür. Buna göre n nin alabileceği en büyük değer nedir?

a) 16 b) 15 c) 14 d) 13 e) 12

28. 23 kentin bulunduğu bir ülkede 250 kent ikilisi arasında karşılıklı uçak seferleri, ülkedeki herhangi bir kentten bir diğerine (doğrudan veya birkaç aktarmayla) en fazla 5 saatlik uçuş süresi sonucunda ulaşılabilecek biçimde nasıl düzenlenirse düzenlensin, k saatlik uçuş sonucunda bir kentten başlayıp her kente en az bir kez uğrayarak baştaki kente dönülebiliyorsa, k nın alabileceği en küçük değer nedir?

a) 115 b) 110 c) 105 d) 100 e) 95

29. Köşeleri bir çember üzerinde bulunan bir $ABCDE$ beşgeninin kenar uzunlukları $|AB| = |BC| = 7, |CD| = |AE| = 15$ ve $|DE| = 24$ olarak veriliyor. Bu beşgenin alanı kaçtır?

a) 360 b) 276 c) 210 d) 168 e) 112

30. $n > 1$ tam sayısının en büyük ve en küçük asal bölenlerinin toplamı $f(n)$ olmak üzere, $f(n) = n - 23$ denklemini sağlayan kaç farklı $n > 1$ tam sayısı vardır?

a) 6 b) 5 c) 4 d) 3 e) 2

31. $x^{23} - 2015^{2015}x + 23 = c$ denkleminin en az üç farklı gerçel çözümünün bulunmasını sağlayan tüm c tam sayılarının aritmetik ortalaması kaçtır?

a) 2015 b) 403 c) 0 d) -46 e) Hiçbiri

32. Tabanı $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7$ 7-geni olan bir piramidin her ayrıtının kırmızı ve mavi renklerden birine, bu piramidin her köşesinden herhangi bir diğer köşesine hem sadece kırmızıya boyalı hem de sadece maviye boyalı ayrıtlar takip edilerek ulaşılabilecek şekilde boyanmasına *iyi boyama* diyelim. Kaç iyi boyama vardır?

a) 324 b) 298 c) 252 d) 234 e) 218

23. Ulusal Matematik Olimpiyatı Birinci Aşama Sınavı

Cevap Anahtarı

A		B	
1	b	1	e
2	c	2	b
3	b	3	a
4	d	4	a
5	a	5	c
6	c	6	c
7	e	7	d
8	e	8	b
9	d	9	b
10	c	10	a
11	b	11	b
12	a	12	c
13	d	13	b
14	e	14	b
15	c	15	d
16	b	16	e
17	d	17	d
18	b	18	a
19	c	19	c
20	e	20	d
21	b	21	b
22	e	22	c
23	c	23	c
24	b	24	a
25	d	25	c
26	b	26	b
27	e	27	c
28	c	28	b
29	c	29	b
30	c	30	d
31	c	31	e
32	d	32	c