

TÜRKİYE BİLİMSEL VE TEKNOLOJİK ARAŞTIRMA KURUMU

21. Ulusal Matematik Olimpiyatı
İkinci Aşama Sınavı

Birinci Gün
23 Kasım 2013

1. $[AB]$ çaplı bir ω_1 çemberi ile A merkezli bir ω_2 çemberi C ve D noktalarında kesişiyor. ω_2 çemberinin üstünde, ω_1 çemberinin dışında ve AB doğrusuna göre C ile aynı tarafta yer alan bir E noktası için, BE doğrusu ω_2 çemberini ikinci kez F noktasında kesiyor. ω_1 çemberinin üstünde ve bu çemberin C den geçen çapına göre A ile aynı tarafta olan bir K noktası $2|CK| \cdot |AC| = |CE| \cdot |AB|$ koşulunu sağlıyor. KF doğrusu ω_1 çemberini ikinci kez L noktasında kesiyor.

D noktasının BE doğrusuna göre simetriğinin, L , F ve C noktalarından geçen çemberin üstünde olduğunu kanıtlayınız.

2. m pozitif bir tam sayı olsun.

a. $1 + km^3$ sayısının bir tam küp olmasını ve $1 + kn^3$ sayılarının hiçbir $n < m$ pozitif tam sayısı için bir tam küp olmamasını sağlayan sonsuz çoklukta k pozitif tam sayısı bulunduğunu kanıtlayınız.

b. $p \equiv 2 \pmod{3}$ koşulunu sağlayan bir p asal sayısı ve bir r pozitif tam sayısı için, $m = p^r$ ise, (a) kısmındaki koşulu sağlayan tüm k pozitif tam sayılarını bulunuz.

3. n hava yolu şirketinin ve 100 kentin bulunduğu bir ülkedeki kentlerden bazıları arasında karşılıklı olarak toplam 2013 uçak seferi yapılıyor. Bu seferleri kullanarak bu kentlerden herhangi birinden bir diğerine gitmek olanaklı olup, birinden diğerine doğrudan veya tek aktarma ile gidilemeyen en az iki kent bulunmaktadır. Bu ülkedeki herhangi iki kent arasında tek bir şirketin uçuşlarını kullanarak gitmek mümkünse, n nin alabileceği en büyük değeri belirleyiniz.

Sınav süresi 4 1/2 saattir.
Her soru 7 puan değerindedir.

TÜRKİYE BİLİMSEL VE TEKNOLOJİK ARAŞTIRMA KURUMU

21. Ulusal Matematik Olimpiyatı
İkinci Aşama Sınavı

İkinci Gün
24 Kasım 2013

4. $2^n + n = m!$ eşitliğini sağlayan tüm (m, n) pozitif tam sayı ikililerini belirleyiniz.

5. Tüm a, b, c pozitif gerçel sayıları için,

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc \geq M(ab^2 + bc^2 + ca^2 - 3abc)$$

olmasını sağlayan en büyük M gerçel sayısını belirleyiniz.

6. Düzlemde yer alan ve aralarındaki uzaklıklar pozitif tam sayılar olan P_1, P_2, \dots, P_n noktalarından her biri için, diğer noktaların bu noktaya olan uzaklıkları azalmayacak biçimde sıralandığında oluşan dizi hep aynı ise, n nin alabileceği tüm değerleri belirleyiniz.

Sınav süresi 4 1/2 saattir.
Her soru 7 puan değerindedir.