Türkiye Bilimsel ve Teknolojik Araştırma Kurumu

20. Ulusal Matematik Olimpiyatı

İkinci Aşama Sınavı

Birinci Gün
24 Kasım 2012

1. Her n pozitif tam sayısı için $P(n!) = |P(n)|!$ koşulunu sağlayan tüm tam sayı katsayılı $P(x)$ polinomlarını bulunuz.

2. ABC, $|AB| = |AC|$ koşulunu sağlayan bir ikizkenar üçgen ve D, A ya ait yüksekliğin ayağı olmak üzere, ADC üçgeninin iç bölgesindeki bir P noktası $m(\widehat{APB}) > 90°$ ve $m(\widehat{PBD}) + m(\widehat{PAD}) = m(\widehat{PCB})$ koşullarını sağlıyor.
$CP \cap AD = \{Q\}$ ve $BP \cap AD = \{R\}$ olsun. $[AB]$ üstünde yer alan bir T noktası ile $[AP$ üstünde ve $[AP]$ dışında yer alan bir S noktası, $m(\widehat{TRB}) = m(\widehat{DQC})$ ve $m(\widehat{PSR}) = 2m(\widehat{PAR})$ koşullarını sağlıyorsa, $|TR| = |RS|$ olduğunu gösteriniz.

3. Tüm x, y gerçel sayıları için,

i. $f(f(x^2) + y + f(y)) = x^2 + 2f(y)$ ve

ii. $x \leq y \Longrightarrow f(x) \leq f(y)$

koşullarını sağlayan bütün $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ fonksiyonlarını belirleyiniz.

Sınav süresi 4 1/2 saattir.
Her soru 7 puan değerindedir.

Türkiye Bilimsel ve Teknolojik Araştırma Kurumu

20. Ulusal Matematik Olimpiyatı
İkinci Aşama Sınavı

İkinci Gün
25 Kasım 2012

4. Tüm x, y, z pozitif gerçel sayıları için,

$$\frac{x(2x-y)}{y(2z+x)} + \frac{y(2y-z)}{z(2x+y)} + \frac{z(2z-x)}{x(2y+z)} \geq 1$$

olduğunu kanıtlayınız.

5. $x_i \in \{1, 2, \ldots, 20\}$, $(1 \leq i \leq 2012)$, biçimindeki tüm $(x_1, x_2, \ldots, x_{2012})$ 2012-lilerinden oluşan kümeyi P ile gösterelim.

Bir $S \subset P$ altkümesi, her $(x_1, x_2, \ldots, x_{2012}) \in S$ için,

$$y_i \leq x_i \ (1 \leq i \leq 2012) \Longrightarrow (y_1, y_2, \ldots, y_{2012}) \in S$$

koşulunu sağlıyorsa, S ye *alçalan küme*;

$$x_i \leq y_i \ (1 \leq i \leq 2012) \Longrightarrow (y_1, y_2, \ldots, y_{2012}) \in S$$

koşulunu sağlıyorsa da, S ye *yükselen küme* diyelim.

A ve B boş olmayan bir alçalan ve bir yükselen küme olmak üzere, $|A \cap B|/(|A| \cdot |B|)$ nin alabileceği en büyük değeri belirleyiniz.

6. Sırasıyla, $[AE]$ ve $[AF]$ doğru parçaları üstünde yer alan B ve D noktaları için, ABF ve ADE üçgenlerinin A köşelerine ait dış teğet çemberleri aynıdır. Bu çemberin merkezi I, $[BF] \cap [DE] = \{C\}$ ve IAB, IBC, ICD, IDA, IAE, IEC, ICF, IFA üçgenlerinin çevrel çemberlerinin merkezleri sırasıyla, P_1, P_2, P_3, P_4, Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 olsun.

a. P_1, P_2, P_3, P_4 noktalarının ve Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 noktalarının çemberdeş olduğunu gösteriniz.

b. Bu çemberlerin merkezleri sırasıyla, O_1 ve O_2 olmak üzere, O_1, O_2, I noktalarının doğrudaş olduğunu gösteriniz.

Sınav süresi 4 1/2 saattir.
Her soru 7 puan değerindedir.