



23. Ulusal Matematik Olimpiyatı
İkinci Aşama Sınavı

*Birinci Gün
5 Aralık 2015*

1. m ve n pozitif tam sayılar olmak üzere,

$$k = \frac{(m+n)^2}{4m(m-n)^2 + 4}$$

sayısı bir tam sayı ise, k nın bir tam kare olduğunu gösteriniz.

2. x, y ve z herhangi ikisinin toplamı 1 den farklı gerçel sayılar olmak üzere,

$$\frac{(x^2+y)(x+y^2)}{(x+y-1)^2} + \frac{(y^2+z)(y+z^2)}{(y+z-1)^2} + \frac{(z^2+x)(z+x^2)}{(z+x-1)^2} \geq 2(x+y+z) - \frac{3}{4}$$

olduğunu gösteriniz. Eşitlik durumunu sağlayan tüm (x, y, z) gerçel sayı üçlülerini bulunuz.

3. $n \geq 4$ olmak üzere düzlemde n nokta veriliyor. Tüm nokta ikilileri doğru parçalarıyla birleştirildikten sonra hiçbir diğer doğru parçasıyla uç noktaları dışında kesişmeyen doğru parçalarının sayısı en çok kaç olabilir?

23. Ulusal Matematik Olimpiyatı
İkinci Aşama Sınavı

*İkinci Gün
6 Aralık 2015*

4. 2015 tablonun gösterildiği bir sergide her katılımcı bir tablo ikilisi seçip tahtaya yazıyor. Sonra Sahte Sanatçı (S.S.) tahtada yazılı ikililerden bazılarını seçip, bu ikililerin her birinde tablolardan herhangi birini daha güzel olarak işaretliyor. Daha sonra Sanatçının Yardımcısı (S.Y.) her adımında, tahtada A , B den daha güzel ve B , C den daha güzel olarak belirtilmişse, tahtada A nın C den daha güzel olduğunu belirtiyor. S.S., tahtaya hangi ikililer yazılmış olursa olsun en fazla k ikiliyi kıyaslayarak S.Y. nin sonlu adım sonucunda tahtadaki tüm ikilileri kıyaslamasını sağlayabiliyorsa, k nın alabileceği en küçük değer nedir?

5. En büyük iç açısı D olan bir $ABCD$ kirişler dörtgeninde BC ve AD doğruları E , AB ve CD doğruları ise F noktasında kesişiyorlar. $ABCD$ dörtgeninin iç bölgesinde $\angle EPD = \angle FPD = \angle BAD$ olacak şekilde bir P noktası alınıyor. $ABCD$ nin çevrel çemberinin merkezi O olmak üzere, FO doğrusu AD, EP, BC doğrularını sırasıyla X, Q, Y noktalarında kesiyor. $\angle DQX = \angle CQY$ ise $\angle AEB = 90^\circ$ olduğunu gösteriniz.

6. n ile aralarında asal olan her a pozitif tam sayısı için $2n^2 \mid a^n - 1$ olmasını sağlayan tüm n pozitif tam sayılarını bulunuz.