

22. Ulusal Matematik Olimpiyatı

İkinci Aşama Sınavı

Birinci Gün
15 Kasım 2014

1. Bir torbada üstlerine 1 den 2014 e kadar tam sayılar yazılmış 1007 siyah ve 1007 beyaz top bulunuyor. Her adımda torbadan bir top çekerek masanın üstüne koyuyoruz ve istersek, o an masanın üstünde bulunan toplardan farklı renklerdeki herhangi ikisini seçip diğer bir torbaya koyabiliyoruz. Bunu yaparsak, bu iki topun üstlerinde yazılı olan sayıların farkının mutlak değeri kadar puan kazanıyoruz. 2014 adım sonunda en fazla kaç puan toplamayı garantileyebileceğimizi belirleyiniz.

2. $x^3 = 3^y 7^z + 8$ eşitliğini sağlayan tüm (x, y, z) pozitif tam sayı üçlülerini bulunuz.

3. D, E, F noktaları bir ABC üçgeninin sırasıyla, $[BC]$, $[CA]$, $[AB]$ kenarları üstünde olmak üzere, AD, BE, CF doğruları P noktasında kesişiyor ve A köşesinden geçen bir ℓ doğrusu ile $[DE]$ ve $[DF]$ ışınları sırasıyla, Q ve R noktalarında kesişiyor. $[DB]$ ışını üstündeki bir M noktası ile $[DC]$ ışını üstündeki bir N noktası için,

$$\frac{|QN|^2}{|DN|} + \frac{|RM|^2}{|DM|} = \frac{(|DQ| + |DR|)^2 - 2|RQ|^2 + 2|DM| \cdot |DN|}{|MN|}$$

eşitliği sağlanıyorsa, AD ve BC doğrularının birbirine dik olduğunu gösteriniz.

4. Bir çemberin birbirine paralel olmayan iki kirişinin orta noktaları P ile Q ve bu kirişlerin her birinin uç noktalarından çembere çizilen teğet doğruların kesişim noktaları sırasıyla, A ve B dir. ABP üçgeninin diklik merkezinin AB doğrusuna göre simetriği olan R noktasından AP , BP , AQ , BQ doğrularına inilen dikmelerin ayakları sırasıyla, R_1 , R_2 , R_3 , R_4 noktaları ise,

$$\frac{|AR_1|}{|PR_1|} \cdot \frac{|PR_2|}{|BR_2|} = \frac{|AR_3|}{|QR_3|} \cdot \frac{|QR_4|}{|BR_4|}$$

olduğunu kanıtlayınız.

5. Hangi n pozitif tam sayıları için,

$$\left\{a_i + \frac{(-1)^i}{a_i} : 1 \leq i \leq n\right\} = \{a_i : 1 \leq i \leq n\}$$

koşulunu sağlayan birbirinden ve sıfırdan farklı a_1, a_2, \dots, a_n gerçel sayılarının bulunduğunu belirleyiniz.

6. Otuz altı hava alanından herhangi ikisi arasındaki karşılıklı uçuşlardan her biri beş havayolu şirketinden biri tarafından yapılacaktır. Ulaştırma Bakanlığı her hava alanına, o hava alanında aralarında aktarma yapılabilen aynı şirkete ait her uçuş ikilisi için 1 milyon lira destek vermeye karar veriyor. Bakanlığın bu uygulama için harcayacağı paranın en az ne kadar olabileceğini belirleyiniz.