TÜRKİYE BİLİMSEL VE TEKNOLOJİK ARAŞTIRMA KURUMU
BİLİM İNSANI DESTEK PROGRAMLARI BAŞKANLIĞI

30. ULUSAL BİLİM OLİMPİYATLARI - 2022
BİRİNCİ AŞAMA SINAVI
MATEMATİK

Soru kitapçığı türü

A

21 Mayıs 2021 Cumartesi, 09.30-12.30

ÇÖZÜMLER

1. Bir $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7$ düzgün yedigeninde $[A_2A_6]$ doğru parçası üzerinde $|A_6B| + |A_6A_7| = |A_4A_7|$ olacak biçimde bir B noktası alınıyor. $m(\widehat{BA_7A_6})$ kaç derecedir?

Cevap: $\dfrac{540^\circ}{7}$. Düzgün yedigende $|A_4A_7| = |A_2A_6|$ olduğundan $|A_2B| = |A_1A_2|$ olur. $m(\widehat{A_1A_2A_7}) = m(\widehat{BA_2A_7})$ olduğundan $A_1A_2BA_7$ eşkenar dörtgendir. Buradan da açı yazarsak $m(\widehat{BA_7A_6}) = \dfrac{540^\circ}{7}$ elde ederiz.

2. Tüm pozitif tam sayı bölenlerinin çarpımı kendisinin küpü olan kaç iki basamaklı pozitif tam sayı vardır?

Cevap:16. n pozitif tam sayısının pozitif tam sayı bölenleri $d_1 < d_2 < \cdots < d_k$ olsun. $d_i < d_j$ için $n/d_j < n/d_i$ ve bu iki sayı da n'nin pozitif tam sayı bölenleri olduğundan, her $i = 1, \ldots, k$ için $d_i \cdot d_{k+1-i} = n$ olur. O halde $d_1 \cdot d_2 \cdots d_k = n^{k/2}$ bulunur. Demek ki $k/2 = 3$ yani $k = 6$ olmalı. Pozitif bölen sayısı 6 olan bir sayı ya p^2q veya p^5 formundadır (p ve q farklı asal sayılar). 2^2q durumunda $q = 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23$ (8 tane). 3^2q durumunda $q = 2, 5, 7, 11$ (4 tane). 5^2q durumunda $q = 2, 3$ (2 tane). 7^2q durumunda $q = 2$ (1 tane). $p \geq 11$ için p^2q iki basamaklı olamaz. Son olarak da p^5 formunda sadece $2^5 = 32$ şartları sağlar. O halde toplam çözüm sayısı $8+4+2+1+1 = 16$'dır.

3. Her a gerçel sayısı için $\lfloor a \rfloor$ ile a sayısından büyük olmayan en büyük tam sayı gösteriliyor. x bir pozitif gerçel sayı olmak üzere, $\lfloor 2x \rfloor + \lfloor 3x \rfloor + \lfloor 5x \rfloor$ sayısının birler basamağı kaç farklı değer alabilir?

Cevap: 8. $x = \lfloor x \rfloor + t$ dersek $0 \leq t < 1$ olur. Bu durumda

$$\lfloor 2x \rfloor + \lfloor 3x \rfloor + \lfloor 5x \rfloor = 10\lfloor x \rfloor + \lfloor 2t \rfloor + \lfloor 3t \rfloor + \lfloor 5t \rfloor$$

olur. Yani ifadenin birler basamağını $\lfloor 2t \rfloor + \lfloor 3t \rfloor + \lfloor 5t \rfloor$ belirler. $0 \leq t < 1$ olduğu için $\lfloor 2t \rfloor \in \{0, 1\}$, $\lfloor 3t \rfloor \in \{0, 1, 2\}$ ve $\lfloor 5t \rfloor \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ bulunur. Böylece $0 \leq \lfloor 2t \rfloor + \lfloor 3t \rfloor + \lfloor 5t \rfloor \leq 7$ elde ederiz. Ayrıca son basamak 0'dan 7'ye kadar tüm değerleri sırasıyla $t = 0, 0.2, 0.35, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8$ iken alır.

4. n adet özdeş top, 30 kız ve 77 erkek öğrenciye dağıtılacaktır. Bu dağıtım, her öğrenci en az bir adet, herhangi iki kız öğrenci eşit sayıda ve herhangi iki erkek öğrenci eşit sayıda top alacak biçimde tek bir şekilde yapılabiliyorsa, n en fazla kaç olabilir?

Cevap: 4620. Bir dağılımdan bir diğer dağılım elde etmek için gruptların birinde bir diğerine aktarılacak top sayısı hem 30 hem de 77 sayısının katı olmak zorundadır. Buna göre $30 \cdot 77 = 2310$ sayısının bir katı sayıda top aktarılmalıdır. Her kız öğrenciye 77 ve her erkek öğrenciye 30 top dağıtılırsa $n = 4620$ olur ve herhangi bir aktarma yapılamaz. Fakat $n > 4620$ ise ya kız öğrencilerin ya da erkek öğrencilerin toplam top sayısı 2310 dan daha fazla olacak ve bu gruptan 2310 top alınıp diğer gruba aktarılarak ikinci bir dağılım elde edilebilir.

5. Bir ABC üçgeninde $[BC]$ kenarına ait kenarortay ile B açısının iç açıortayı D noktasında dik kesişmektedir. CD doğrusunun $[AB]$ kenarını kestiği nokta E ise, $\dfrac{|BC|}{|AE|}$ nedir?

Cevap: 6. $[AM]$ kenarortay, $[BN]$ içaçıortay olsun. $BD \perp MA$ ve $m(\widehat{ABD}) = m(\widehat{MBD})$ olduğundan $|AB| = |BM|$ bulunur. Diğer taraftan, $|BM| = |MC|$ kullanılarak Seva teoreminden $|AE| : |EB| = |AN| : |NC|$ elde ederiz, bu da $EN \parallel BC$ olduğunu gösterir. $[BN]$ içaçırotay ve $EN \parallel BC$ olduğundan $|EN| = |EB|$ bulunur. Sonuç olarak, $|AB| = |BM| = |MC| = x$ ve $|EN| = |EB| = y$ yazarsak, $EN \parallel BC$ olduğundan

$$\frac{x-y}{x} = \frac{|AE|}{|AB|} = \frac{|EN|}{|BC|} = \frac{y}{2x}$$

buluruz, bu da $2x = 3y$ demektir. Sonuç olarak, $\dfrac{|BC|}{|AE|} = \dfrac{2x}{x-y} = 6$ bulunur.

6. $a_1 = 12$ ve her $n = 1, 2, \ldots, 2021$ için $a_{n+1} = 12^{a_n}$ koşulunu sağlayan bir (a_n) tam sayı dizisi tanımlanıyor. a_{2022} sayısının 67 ile bölümünden kalan kaçtır?

Cevap: 25. Her n pozitif tam sayısı için $12^n \equiv 12 \pmod{66}$ dır. Bu yüzden her $n = 1, 2, \ldots, 2021$ için $a_n \equiv 12 \pmod{66}$ olur. Fermat teoreminden $a_{2022} \equiv 12^{12} \equiv 25 \pmod{67}$ elde ederiz.

7. $1 \le a, b \le 2022$ ve $\sqrt{a - \sqrt{a+b}} = b$ koşullarını sağlayan kaç (a, b) tam sayı ikilisi vardır?

Cevap: 44. İfade düzenlediğinde $(a - b^2)^2 = a + b$ ve dolayısıyla $a^2 - (2b^2 + 1)a + (b^4 - b) = 0$ olur. Bu ifadeyi a ya göre ikinci dereceden denklem gibi düşünürsek,

$$\Delta = (2b^2 + 1)^2 - 4(b^4 - b) = 4b^2 + 4b + 1 = (2b + 1)^2$$

buluruz. Dolayısıyla, $a = \dfrac{(2b^2+1) \pm (2b+1)}{2} = b^2 \pm b + 1$ elde ederiz. Diğer taraftan, $a > b^2$ olduğunu biliyoruz, buradan tek ihtimal $a = b^2+b+1$ olup, yerine koyulduğunda denklemi sağlar. $1 \leq a, b \leq 2022$ olduğundan $b \in \{1, 2, \ldots, 44\}$ olabilir. Her $1 \leq b \leq 44$ için tam olarak bir tane a değeri olduğundan cevap 44 olur.

8. $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ olmak üzere, her biri çift sayıda eleman içerecek ve herhangi iki tanesinin kesişiminde çift sayıda eleman bulunacak şekilde S nin en fazla kaç farklı alt kümesi seçilebilir? (Boş kümede çift sayıda eleman olduğu kabul ediliyor.)

Cevap: 8. S nin seçilen iki elemanlı alt kümelerine bakarsak, S nin her elemanı en fazla bir kümede yer alabilir. Dolayısıyla, bunlardan en fazla üç tane seçebiliriz. Benzer şekilde, S nin seçilen dört elemanlı alt kümelerine bakarsak, S nin her elemanı en fazla bir kümede yer almayabilir. Dolayısıyla, bunlardan da en fazla üç tane seçebiliriz. S nin kendisini ve boş kümeyi de seçebileceğimizden, cevap en fazla 8 olur.
$S_1 = \{1, 2\}$, $S_2 = \{3, 4\}$, $S_3 = \{5, 6\}$ olmak üzere, $\{S_1, S_2, S_3\}$ kümesinin alt kümelerindeki kümelerin birleşimlerini düşünürsek 8 için bir örnek elde ederiz.

9. $|AB| = 1, |BC| = 2$ ve $m(\widehat{ABC}) = 90^\circ$ koşullarını sağlayan bir ABC üçgeninde D noktası, B noktasının AC doğrusuna göre simetriği olsun. $[AB]$ ve $[BC]$ kenarlarına teğet olan ve D noktasından geçen çemberin yarıçapı kaçtır?

Cevap: $\dfrac{4}{5}$. Çemberin merkezi O ve yarıçapı r olsun. O dan AB ve BC ye inilen dikme ayakları sırasıyla E ve F olsun. $BFOE$ bir kare olur ve $AE = 1-r$, $CF = 2-r$ olur. Simetriden $AD = AB = 1$, $CD = CB = 2$ dir. $m(\widehat{ADO}) = \alpha$ dersek $m(\widehat{CDO}) = 90 - \alpha$ olur. AEO üçgeninde Pisagor ve ADO üçgeninde Kosinüs teoreminden $(1-r)^2 + r^2 = AO^2 = 1 + r^2 - 2r\cos\alpha$ elde ederiz. Buradan da $\cos\alpha = (2-r)/2$ elde ederiz. Benzer şekilde CFO üçgeninde Pisagor ve CDO üçgeninde Kosinüs teoreminden $(2-r)^2 + r^2 = OC^2 = 4 + r^2 - 4r\sin\alpha$ ve buradan da $\sin\alpha = (4-r)/4$ elde ederiz. $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$ olduğundan $(2-r)^2/4 + (4-r)^2/16 = 1$ ve $(5r-4)(r-4) = 0$ elde ederiz. $r < 1$ olduğundan $r = 4/5$ olur.

10. Kaç $n < 2023$ pozitif tam sayısı için $\dfrac{n^6 + n^4 - n^2 - 1}{2022}$ ifadesi bir tam sayıdır?

Cevap: 8. $2022 = 2 \cdot 3 \cdot 337$ ve $n^6 + n^4 - n^2 - 1 = (n^2+1)^2(n-1)(n+1)$'dir. 2'nin bu ifadeyi bölebilmesi için $n \equiv 1 \pmod 2$ olması gerekir. 3'ün bu ifadeyi bölebilmesi için $n \equiv \pm 1 \pmod 3$ olması gerekir. 337 $4k+1$ formunda bir asal sayı olduğu için $k^2 \equiv -1 \pmod{337}$ olacak biçimde k tam sayısı vardır. O halde 337'nin ifadeyi bölmesi için $n \equiv \pm 1, \pm k \pmod{337}$ olmalıdır. Sonuç olarak Çinli kalan teoreminden dolayı $1 \cdot 2 \cdot 4 = 8$ çözüm vardır.

11. $a_1 < a_2 < \cdots < a_{2022}$ pozitif tam sayılar olmak üzere,

$$\frac{1}{a_1} + \frac{2}{a_2} + \cdots + \frac{2022}{a_{2022}}$$

şeklinde yazılabilen kaç pozitif tam sayı vardır?

Cevap: 2022. İfadedeki her terim 1'den büyük olamadıklarına göre $k \leq 2022$ olur. $1 \leq k \leq 2022$ bir tam sayı olsun. $1 \leq i \leq k-1$ için $a_i = i$ ve $k \leq i \leq 2022$ için $a_i = i(2023-k)$ alırsak k sayısı istenilen şekilde yazılmış olur.

12. 21 öğrenciden oluşan bir sınıfta bazı öğrenciler arkadaştır (arkadaşlık karşılıklıdır). Bu sınıfta arkadaş sayıları eşit olan iki arkadaş bulunmuyorsa, bu sınıftaki arkadaş ikililerinin sayısı en fazla kaç olabilir?

Cevap: 175. Koşullara göre, $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ için, arkadaş sayısı $21 - i$ olan öğrenci sayısı en fazla i olabilir. Buna göre, arkadaş ikili sayısı en fazla

$$\frac{20 + 2 \cdot 19 + 3 \cdot 18 + 4 \cdot 17 + 5 \cdot 16 + 6 \cdot 15}{2} = 175$$

olabilir.
Şimdi de 175 arkadaş ikilisi için bir örnek verelim. Öğrencileri birinci grupta 1, ikinci grupta 2,..., altıncı grupta 6 öğrenci olmak üzere altı gruba ayıralım. Her öğrenci kendi grubundaki öğrenciler dışındaki tüm öğrencilerle arkadaş olursa arkadaş ikili sayısı 175 olur.

13. Dışbükey bir $ABCD$ dörtgeninde köşegenler E noktasında kesişmektedir. $|AD| = 6$, $|AE| = 3\sqrt{2}$, $|ED| = 3$, $m(\widehat{DAC}) = m(\widehat{BAC})$ ve $m(\widehat{ACD}) = m(\widehat{ADB})$ ise, $|BC|$ nedir?

Cevap: $2\sqrt{7}$. Öncelikle $m(\widehat{ACD}) = m(\widehat{ADB})$ olduğundan ADE ve ACD üçgenleri benzer olup, $|AC| = 6\sqrt{2}$ ve dolayısıyla $|EC| = |CD| = 3\sqrt{2}$ buluruz. AED üçgeninde iç açıortay teoremlerinden, $|AB| : |BE| = |AD| : |DE| = 2$ ve $|AE|^2 = |AD||AB| - |ED||EB|$ olup, $|AB| = 4$ ve $|EB| = 2$ elde edriz. Son olarak, ABC üçgeninde

$[BE]$ kenarortay olduğundan, $|BE|^2 = \dfrac{2|BC|^2 + 2|AB|^2 - |AC|^2}{4}$ olup, $|BC| = 2\sqrt{7}$ bulunur.

14. $p > 3$ bir asal sayı olmak üzere, $4p + 91$ ve $12p + 7$ sayıları da asal sayılar ise, aşağıdakilerden hangisi bir asal sayı olabilir?

a) $p^2 + 6$ b) $p^2 - 4$ c) $8p + 1$ d) $2p + 11$ e) $p + 2$

Cevap: $2p+11$. $p > 3$ ve $4p+91$ asal sayılar olduğu için $p \equiv 1 \pmod 3$. Bu durumda $8p + 1$ ve $p + 2$ sayıları 3 ile bölünür ve asal olamaz. $4p + 91$ asal sayı olduğu için $p \not\equiv 1 \pmod 5$. $12p + 7$ asal olduğu için $p \not\equiv 4 \pmod 5$. $p \neq 5$ olduğu için, sonuç olarak $p \equiv 2, 3 \pmod 5$ olmalıdır. Buna göre, $p^2 \equiv 4 \pmod 5$ olur. O zaman $p^2 + 6$ ve $p^2 - 4$ sayıları 5 ile bölünür ve asal değillerdir. O halde şıklar arasında asal olabilecek sayı $2p + 11$'dir. ($p = 43$ için $4p + 91 = 263$, $12p + 7 = 523$ ve $2p + 11 = 97$ asal sayılardır.)

15. $x, y, z \geq -2$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} x^3 + 2 &= 5y + z \\ y^3 + 2 &= 2z + 7x \\ z^3 + 2 &= -2y - 4x \end{aligned}$$

denklem sistemini sağlayan kaç (x, y, z) gerçel sayı üçlüsü vardır?

Cevap 1. İfadeleri taraf tarafa toplarsak,

$$\sum_{cyc}(x^3 - 3x + 2) = \sum_{cyc}(x - 1)^2(x + 2) = 0$$

bulunur. $x, y, z \geq -2$ olduğundan $x, y, z \in \{1, -2\}$ elde ederiz. Üçüncü denkleme bakarsak, $z^3 + 2$ çift bir tam sayı olacağından $z = -2$ olmak zorundadır. Dolayısıyla, $-2y - 4x = -6$ bulunur, bu da $x = y = 1$ olduğunu gösterir. Bu değerler için ilk iki eşitlik de sağlanır. Dolayısıyla tek çözüm $(x, y, z) = (1, 1, -2)$ olur.

16. Rakamları toplamı 9 olan pozitif tam sayılar küçükten büyüğe doğru sıralandığında baştan 2022. sayının birler basamağı kaçtır?

Cevap 4. Öncelikle rakamları toplamı 9 ve en fazla 6 basamaklı olan sayıların sayısı $x_1 + \cdots + x_6 = 9$ eşitliğini sağlayan $(x_1, \ldots, x_6)$ negatif olmayan tam sayı altılıların sayısına eşittir. Bu sayı da $\binom{9+6-1}{6-1} = 2002$ dir. Buradan, baştan 2022. sayının 7 basamaklı ve $1000\_\_\_$ şeklinde olacağı da kolaylıkla görülür, çünkü ilk dört basamağı 1000 olan ve rakamları toplamı 9 olan $\binom{8+3-1}{3-1} = 45$ tane sayı vardır. 10000 ile başlayan 9 tane, 10001 ile başlayan 8 tane sayı olacağı açıktır, dolayısıyla 10002 ile başlayan ve rakamları toplamı 9 olan 7 basamaklı en küçük üçüncü sayıyı arıyoruz, bu da 1000224 olup, birler basamağı 4 olarak bulunur.

17. Bir ABC üçgeninin $[AC]$ ve $[BC]$ kenarlarına sırasıyla D ve E noktalarında teğet olan bir çember $[AB]$ kenarını F ve G noktalarında kesmektedir. F noktası A ile G arasında, $|AB| = 81$, $|BC| = 72$, $|AC| = 63$ ve $|CD| = 45$ ise, $|GB| - |AF|$ farkı nedir?

Cevap: 5. Teğetlikten $|CE| = 45$ bulunur. O zaman $|AD| = 63 - 45 = 18$ ve $|BE| = 72 - 45 = 27$ elde ederiz. $|BG| = x$ ve $|AF| = y$ olsun. B noktasının çembere göre kuvvetinden $|BG| \cdot |BF| = |BE|^2$ olur ve buradan $x(81 - y) = 27^2$ bulunur. A noktasının çembere göre kuvvetinden ise, $y(81 - x) = 18^2$ gelir. Bu iki eşitliği taraf tarafa çıkarırsak $81(x - y) = 27^2 - 18^2 = 9 \cdot 45$ elde ederiz ve sonuç olarak $x - y = 5$ buluruz.

18. Ondalık yazılımı $9ABA9$ formunda olan ve 63 ile tam bölünen kaç farklı beş basamaklı pozitif tam sayı vardır?

Cevap: 2. $9ABA9$ sayısı $90009 + 1010A + 100B$'ye eşit olup (mod 9) da $2A + B$ ye, (mod 7) de ise $2A + 2B + 3$ e denktir. Sayının 63 ile bölünebilmesi için $2A + B \equiv 0 \pmod 9$ ve $A + B \equiv 2 \pmod 7$ olmalıdır. A ve B birer rakam olduğundan $2A + B$ sayısı $0, 9, 18, 27$ değerlerini $A + B$ sayısı da $2, 9, 16$ değerlerini alabilir. $(2A+B, A+B)$ ikilisinin alabileceği 12 farklı değer olup bunlar denenirse sadece $(2A + B, A + B) = (9, 9), (18, 9)$ için çözüm bulunur. Tüm çözümler $(A, B) = (0, 9), (9, 0)$ ikilileridir.

19. n bir pozitif tam sayı olmak üzere, $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = 87$ ve $x_1 + 2x_2 + \cdots + nx_n = 51$ eşitliklerini sağlayan $x_1, x_2, \ldots, x_n$ gerçel sayıları bulunuyorsa, n en az kaç olabilir?

Cevap: 4. $\sum_{i=1}^{n}(x_i - i)^2 \geq 0$ olduğundan $87 + \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6} \geq 102$ ve buradan da $n \geq 4$ olur. Eşitliği sağlayan bir örnek: $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (2, 3, 5, 7)$.

20. Başlangıçta koordinat düzleminde $(1, 1)$ noktası kırmızıya boyalıdır. Her adımda kırmızıya boyalı bir (x, y) noktası için hem $(x + 2, y + 1)$ noktası hem de $(2x + y, 2x)$ noktası kırmızıya boyanıyor. Buna göre $(100, 60)$,

$(70,70)$, $(150,100)$ ve $(120,200)$ noktalarından kaç tanesi sonlu adım sonunda kırmızıya boyanmış olabilir?

Cevap: 0. $x+y \equiv (x+2)+(y+1) \equiv (2x+y)+2x \pmod 3$ olduğundan kırmızı boyalı her bir noktanın x ve y koordinatları toplamı başlangıçta kırmızı olan $(1,1)$ noktasının koordinatları toplamı olan 2 ye denk olur. $100+60 \equiv 150+100 \equiv 1 \pmod 3$ olduğundan $(100,60)$ ve $(150,100)$ noktaları kırmızı olamaz. $x \geq y > 0$ iken $2x+y > 2x$ ve $x+2 > y+1$ olduğundan başlangıçtaki $(1,1)$ noktası hariç diğer tüm kırmızıya boyalı noktaların x koordinatı y koordinatından büyük olmalıdır. Bu yüzden $(70,70)$ ve $(120,200)$ noktaları da kırmızı olamaz. Sonuç olarak bu dört noktadan hiçbiri kırmızı olamaz.

21. Bir $ABCD$ dikdörtgeninde $[BC]$ kenarının orta noktası M olsun. $[AC]$ köşegeni üzerinde bir E noktası, $[AE]$ üzerinde ise bir F noktası alınıyor. $s(\widehat{DEC}) = s(\widehat{DFM}) = 90°$, $|AF| = 4$ ve $|EC| = 18$ olduğuna göre $ABCD$ dikdörtgeninin alanı nedir?

Cevap: 312. $DFMC$ bi,r kirişler dörtgenidir. O zaman $m(\widehat{MDF}) = m(\widehat{FCM}) = m(\widehat{DAC})$ olur. M orta nokta olduğu için simetriden $m(\widehat{MDA}) = m(\widehat{MAD})$ olur. Buradan da $m(\widehat{ADF}) = m(\widehat{CAM})$ bulunur ve sonuç olarak DAF ile ACM üçgenlerinin benzer olduğu görülür. Bötlece $|AF|/|AD| = |CM|/|AC|$'dir ve $|CM| = |AD|/2$ olduğu için $|AD|^2 = 2|AF| \cdot |AC|$ elde edilir. Ayrıca Öklid bağıntılarından $|AD|^2 = |AE| \cdot |AC|$'dir. O halde $|AE| = 2|AF| = 8$ olur ve $|AD| = \sqrt{8 \cdot 26}$ ve yine Öklid bağıntılarından $|CD| = \sqrt{18 \cdot 26}$ elde edilir. O zaman $ABCD$ dikdörtgeninin alanı $\sqrt{8 \cdot 26} \cdot \sqrt{18 \cdot 26} = 12 \cdot 26 = 312$ bulunur.

22. p bir asal sayı olmak üzere, $p \mid a - b^2$, $p \mid b - a^2$ ve $p \nmid a - b$ olacak şekilde a ve b tam sayıları varsa, p ye *tuhaf* asal sayı diyelim. 73, 79, 83, 89, 97 asal sayılarından kaç tanesi tuhaftır?

Cevap: 3. a sayısı p modunda 0 veya 1 e denk olamaz çünkü aksi halde a ile b sayıları p modunda denk olur. Bu durumda $p \mid a^3 - 1$ ve $p \nmid a - 1$ dir. a sayısının p modundaki derecesine d dersek $d \mid 3$ ve $d > 1$ olur. Yani $d = 3$ olup $d \mid p - 1$ olduğundan $p \equiv 1 \pmod 3$ olur. $73, 79, 83, 89, 97$ asallarından $73, 79, 97$ asalları şartları sağlar. Bu üç asal için uygun (a,b) ikilileri sırasıyla $(a,b) = (8,64), (23,55), (35,61)$ şeklindedir.

23. Her x gerçel sayısı için $(x-27)P(3x) = (27x-27)P(x)$ koşulunu sağlayan ve sabit olmayan $P(x)$ polinomunun gerçel kökleri toplamı nedir?

Cevap: 39. Sağ taraf $x-1$ e bölünür. Yani $x-1 \mid P(3x)$ ve $P(3) = 0$ dır. Sol taraf $x-27$ ye bölünür. Yani $x-27 \mid P(x)$ ve buradan da $P(x) = (x-3)(x-27)Q(x)$ dir. Verilen koşuldan $(x-27)(3x-3)(3x-27)Q(3x) = (27x-27)(x-3)(x-27)Q(x)$ elde edilir. Buradan da $9(x-27)(x-1)(x-9)Q(3x) = 27(x-1)(x-3)(x-27)Q(x)$ ve böylece $(x-9)Q(3x) = 3(x-3)Q(x)$ olur. $x-9 \mid Q(x)$ olduğundan $Q(x) = (x-9)K(x)$ ve buradan da $(x-9)(3x-9)K(3x) = 3(x-3)(x-9)K(x)$ ve $K(3x) = K(x)$ dir. Buradan da $K(1) = K(3) = K(9) = K(27) = \dots$ elde ederiz. Sabit olmayan polinomların sonlu kökü olduğundan sonsuz çoklukta noktada aynı değeri alan polinomlar sabit olmalıdır. Yani $K(x)$ sabit polinomdur. Bu ise bir $a \neq 0$ sabiti için $P(x) = a(x-3)(x-9)(x-27)$ olduğunu gösterir. Gerçel kökler toplamı $3+9+27 = 39$ olur.

24. 5×5 bir satranç tahtasının her birim karesine bir sayı, her satırda ve her sütunda en fazla 3 farklı sayı olacak şekilde yazılmıştır. Buna göre, bu tahtanın tamamında en fazla kaç farklı sayı yer alabilir?

Cevap: 11. Her satırda en fazla 2 farklı sayı varsa, tahtada en fazla $5 \cdot 2 = 10$ farklı sayı olabilir. Sadece bir satırda 3 farklı sayı olsun. Kalan 4 satırın her birinde, bu 3 sayıdan en az bir tanesi bulunuyorsa, tahtada en fazla $3 + 4 \cdot 2 = 11$ farklı sayı olabilir. Son olarak, bir satırda a, b, c bir diğer satırda bu sayılardan farklı d, e, f sayılarının bulunduğu durumu inceleyelim. Bu durumda, her sütunda bu 6 sayıdan farklı en fazla bir yeni sayı olabilir ve buna göre, tahtada en fazla $6 + 5 \cdot 1 = 11$ farklı sayı olur.

Şimdi de 11 farklı sayı için bir örnek verelim. 1. satırda sırasıyla (1,2,0,0,0), 2. satırda sırasıyla (0,3,4,0,0), 3. satırda sırasıyla (0,0,5,6,0), 4. satırda sırasıyla (0,0,0,7,8) ve 5. satırda sırasıyla (10,0,0,0,0) bulunursa koşullar sağlanmış olur.

25. Bir ABC üçgeninin $[AC]$ kenarı üzerinde alınan bir D noktasından $[BC]$ kenarına inilen dikmenin ayağı E noktasıdır. $|AD| = 1$, $|DC| = 2$ ve $2|AB|^2 + |BC|^2 = 18$ ise, $|AB| - |DE|$ farkının alabileceği en küçük değer nedir?

Cevap: $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. Stewart teoreminden

$$|BD|^2 = \frac{|AB|^2 \cdot |CD| + |BC|^2 \cdot |AD|}{|AC|} - |AD| \cdot |CD| = 4$$

ve buradan da $|BD| = 2$ olur. BDC ikizkenar üçgen olduğundan $|BE| = |CE|$ dir. $|AB| = x, |BE| = |CE| = y$ dersek $x^2 + 2y^2 = 9$ ve $|AB| - |DE| = x - \sqrt{4 - y^2}$ elde ederiz. $|AB| - |DE| = x - \sqrt{\dfrac{x^2-1}{2}}$ ifadesinin en küçük değerini bulmalıyız. $\left(\dfrac{x}{\sqrt{2}} - 1\right)^2 \geq 0$ olduğundan $\left(x - \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 \geq \dfrac{x^2-1}{2}$ olur. $|DE| = \sqrt{\dfrac{x^2-1}{2}} > 0$ olduğundan $x > 1 > \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ dir ve böylece $x - \dfrac{1}{\sqrt{2}} \geq \sqrt{\dfrac{x^2-1}{2}}$ elde ederiz. Bu ise $x - \sqrt{\dfrac{x^2-1}{2}}$ ifadesinin en küçük değerinin $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ olduğunu gösterir. Eşitlik $x = \sqrt{2}$, $y = \sqrt{\dfrac{7}{2}}$ iken sağlanır. Bu şartları sağlayan bir ABC üçgeni mevcuttur.

26. $x^3 - y^3 = 9^z + 60$ eşitliğini sağlayan kaç (x, y, z) tam sayı üçlüsü vardır?

Cevap: 2. Eşitlikte sağ tarafın tam sayı olabilmesi için $z \geq 0$ olmalı.
$z \geq 1$ ise, 9^z sayısı 9 ile bölünür ve $x^3 - y^3 \equiv 6 \pmod 9$ elde edilir. Ancak herhangi bir a tam sayısı için $a^3 \equiv 0, 1, 8 \pmod 9$ olduğundan bu durumda çözüm elde edilmez.
$z = 0$ ise, $x^3 - y^3 = 61 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$ olur. Bu durumda $x^2 + xy + y^2 = \pm 1, \pm 61$ olmalı. Kolayca görüleceği üzere x ve y'den hiçbiri $0, 1$ veya -1 değildir ve bu durumda $x^2 + xy + y^2 = (x + y/2)^2 + 3y^2/4 \geq 3$ elde edilir. O zaman $x^2 + xy + y^2 = 61$ ve $x - y = 1$ olmalı. Buradan $x^2 + x(x-1) + (x-1)^2 = 3x^2 - 3x + 1 = 61$ elde edilir ve sonuç olarak $x^2 - x + 20 = 0 = (x-5)(x+4)$ bulunur. Bu durumdan $(5, 4, 0)$ ve $(-4, -5, 0)$ çözümleri gelir.

27. $x + y \neq 0$ koşulunu sağlayan x ve y gerçel sayıları için $4x(x+2y) + \left(\dfrac{1-y^2}{x+y}\right)^2$ ifadesinin alabileceği en küçük değer nedir?

Cevap: -4. AGO eşitsizliğinden $(x+y)^2 + \dfrac{(1-y^2)^2}{4(x+y)^2} \geq |1 - y^2| \geq y^2 - 1$ dir. Buradan da $x(x + 2y) + \dfrac{(y^2-1)^2}{4(x+y)^2} \geq -1$ olur. Bu ise $4x(x + 2y) + \dfrac{(y^2-1)^2}{(x+y)^2} \geq -4$ olduğunu gösterir. Eşitliği veren bir örnek: $(x, y) = (-1, 3)$.

28. 11×11 satranç tahtasının birim karelerinden oluşan n tane 2×2 karenin herhangi ikisinin en fazla bir ortak birim karesi varsa, n en fazla kaç olabilir?

Cevap: 50. Koşullara göre, 11×11 satranç tahtasının sınırdaki her birim karesi en fazla bir tane 2×2 karenin birim karesi olabilir. Benzer şekilde 11×11 satranç tahtasının sınırda olmayan her birim karesi ise en fazla iki tane 2×2 karenin ortak birim karesi olabilir. Buna göre, n tane 2×2 karenin birim karelerinin toplam sayısı en fazla $40 + 2 \cdot 81 = 202$ olur. Buradan $n \leq \dfrac{202}{4} = 50.5$ elde edilir.

Şimdi de $n = 50$ için bir örnek verelim. Satranç tahtasının sol alt birim karesini içeren 10×10 kereyi oluşturan ve herhangi ikisi kesişmeyen 25 tane 2×2 kare ve satranç tahtasının sağ üst birim karesini içeren 10×10 kereyi oluşturan ve herhangi ikisi kesişmeyen 25 tane 2×2 kare alırsak koşullar sağlanmış olur.

29. Bir ABC ikizkenar üçgeninde $|AB| = |AC| = 3\sqrt{2}$ ve $|BC| = 2\sqrt{2}$ dir. $[BC]$ kenarının orta noktası D ve B noktasından $[AC]$ kenarına inilen dikmenin ayağı E noktasıdır. Buna göre D den geçen ve AC doğrusuna E noktasında teğet olan çemberin yarıçapı kaçtır?

Cevap: $\dfrac{3}{4}$. ABC ikizkenar ve D kenarın orta noktası olduğundan $AD \perp BC$ dir. O zaman ABD dik üçgenindir ve $|BD| = |DC| = |BC|/2 = \sqrt{2}$ olduğundan Pisagor teoremi ile $|AD| = 4$ elde edilir. O halde ABC üçgeninin alanı $4\sqrt{2}$ bulunur ve buradan da $|BE| = 8/3$ bulunur. Çemberin BC yi ikinci kez kestiği nokta F, BE yi ikinci kez kestiği nokta da G olsun. BEC üçgeninde Pisagor teoreminden $|CE|^2 = 8 - 64/9 = 8/9$ elde edilir. Öte yandan C noktasının çembere göre kuvvetinden $|CE|^2 = |CF| \cdot |CD| = |CF| \cdot \sqrt{2}$ bulunur. Böylece $|CF| = 4\sqrt{2}/9$ olur. O halde $|BF| = |BC| - |FC| = 2\sqrt{2} - 4\sqrt{2}/9 = 14\sqrt{2}/9$ elde edilir. B noktasının çembere göre kuvvetinden $|BF| \cdot |BE| = |BD| \cdot |BF|$ bulunur ve buradan da $|BG| = 7/6$ elde edilir. Çember AC doğrusuna E noktasında teğet olduğu için $[GE]$ çemberin çapıdır ve bu çemberin yarıçapı $|GE|/2 = (|BE| - |BG|)/2 = 3/4$ olur.

30. m ve n pozitif tam sayılar ve p bir asal sayı olmak üzere, $2m^2+3m-44 = 3p^n$ eşitliğini sağlayan kaç (m, n, p) üçlüsü vardır?

Cevap: 3. $2m^2+3m-44 = (2m+11)(m-4)$. $m-4 = k$ olsun. Bu durumda k bir pozitif tam sayıdır ve $k(2k+19) = 3p^n$ olur. $\text{obeb}(k, 2k+19) = 1$ veya 19 olmalı.

obeb$(k, 2k+19) = 1$ olsun. O zaman $k = 1$ ve $2k + 19 = 3p^n$ veya $k = 3$ ve $2k + 19 = p^n$ olmalı. İlk durumda $p = 7$ ve $n = 1$ olur iken ikinci durumda $p = 5$ ve $n = 2$ olur. O halde obeb$(k, 2k + 19) = 1$ iken $(5, 1, 7)$ ve $(7, 2, 5)$ çözümleri elde edilir.
obeb$(k, 2k+19) = 19$ olsun. Bu durumda $p = 19$ olmalı ve $k = 19 \cdot r$ dersek $r(2r + 1) = 3 \cdot 19^{n-2}$ olur. O zaman $n \geq 2$ bulunur. $n = 2$ ise, $r = 1$ olur ve buradan $(23, 2, 19)$ çözümü elde edilir. $n \geq 3$ ise, $1 < r < 2r + 1$, $3 < 19^{n-2}$ ve obeb$(r, 2r + 1) = 1$ olduğu için $r = 3$ ve $2r + 1 = 19^{n-2}$ olmalı. Ancak bu durumda n tam sayı olmaz ve çözüm gelmez.
Sonuç olarak tüm çözümler $(5, 1, 7)$, $(7, 2, 5)$ ve $(23, 2, 19)$ üçlüleridir.

31. Bir $f : \mathbb{Q}^+ \to \mathbb{R}^+$ fonksiyonu tüm x ve y pozitif rasyonel sayıları için

$$f(x) + f(y) - f(x + y) = \frac{x^2 + xy + y^2}{xy(x + y)}$$

eşitliğini sağlıyor. $f(x)$ fonksiyonunun aldığı en küçük değer 1 ise, $f(1)$ nedir?

Cevap: $\frac{5}{4}$. $g(x) = f(x) - \frac{1}{x}$ dersek $g(x + y) = g(x) + g(y)$ olur. Bu da bir c gerçel sayısı ve her $x \in \mathbb{Q}^+$ için $g(x) = cx$ olduğunu gösterir. $f(x) > 0$ olduğundan $c \geq 0$ olmalıdır. $c = 0$ iken $f(x) = \frac{1}{x}$ fonksiyonunun en küçük değeri 1 değildir. $c > 0$ iken $f(x) = cx + \frac{1}{x}$ fonksiyonunun en küçük değeri AGO eşitsizliğinden $2\sqrt{c}$ dir. Yani $c = \frac{1}{4}$ olmalıdır. Bu durumda $f(1) = c + 1 = \frac{5}{4}$ elde ederiz.

32. Aslı ve Zehra, başlangıçta boş olan 30×30 bir satranç tahtası üzerinde sırayla hamle yaparak bir oyun oynuyorlar. Oyuna Aslı başlıyor. Aslı her hamlesinde, kırmızı bir bilye içeren bir birim kareyle ortak bir kenarı bulunmayan boş bir birim kareye bir kırmızı bilye yerleştiriyor. Zehra ise her hamlesinde, boş bir birim kareye bir beyaz bilye yerleştiriyor. Oyunculardan herhangi biri hamle yapamazsa oyun sonlandırılıyor. Aslı her zaman en az k tane kırmızı bilye yerleştirmeyi garantileyebiliyorsa, k en fazla kaç olabilir?

Cevap: 225. Tahta üzerinde herhangi ikisi ortak kenar paylaşmayan 450 beyaz birim kare bulunuyor. Aslı bu beyaz birim karelere her zaman en az 225 kırmızı bilye yerleştirebilir.

Zehra her zaman k sayısının 225'ten fazla olmasını engelleyebilir. Bunun için Zehra satranç tahtasını 225 tane 2×2 kareye ayırıyor ve herhangi bir

2×2 kereye kırmızı bilye yerleştirildiğinde kırmızı bilye yerleştirilen birim karenin çaprazındaki birim kareye bir beyaz bilye yerleştiriyor. Buna göre, Zehra oyunun sonunda 225 tane 2×2 karenin her birinde en fazla bir tane kırmızı bilye bulunmasını garantileyebilir.