

29. Ulusal Bilim Olimpiyatları
Ortaokul Matematik İkinci Aşama Sınavı

7 Ocak 2022

1.

$$\frac{3n^2}{m} \quad \text{ve} \quad \sqrt{n^2 + m}$$

sayılarının her ikisinin tam sayı olmasını sağlayan tüm (m, n) pozitif tam sayı ikililerini bulunuz.

2. Satırları aşağıdan yukarıya, sütunları da soldan sağa $1, 2, \dots, 29$ sayılarıyla numaralandırılan 29×29 satranç tahtasının bazı birim kareleri işaretlenmiştir.

İşaretlenmiş her birim kare için, hem satır numarası bu birim karenin satır numarasından az olmayan, hem de sütun numarası bu birim karenin sütun numarasından az olmayan en çok bir tane daha işaretlenmiş birim kare vardır.

Buna göre tahtadaki işaretlenmiş birim kare sayısının alabileceği en büyük değeri bulunuz.

3. x, y, z gerçel sayılar olmak üzere

$$x + y + z = 2, \quad xy + yz + zx = 1$$

ise, $x - y$ nin alabileceği en büyük değeri bulunuz.

4. ABC eşkenar üçgen olmak üzere $[BC]$ doğru parçası üzerinde X noktası ve $[BA]$ ve $[CA]$ ışınları üzerinde sırasıyla Y ve Z noktaları AX, BZ, CY doğruları paralel olacak şekilde alınıyor. XY nin AC yi kestiği nokta M ve XZ nin AB yi kestiği nokta N olmak üzere, MN doğrusunun ABC nin iç teğet çemberine teğet olduğunu gösteriniz.