TÜRKİYE BİLİMSEL VE TEKNOLOJİK ARAŞTIRMA KURUMU
BİLİM İNSANI DESTEK PROGRAMLARI BAŞKANLIĞI

28. ULUSAL BİLİM OLİMPİYATLARI - 2020
BİRİNCİ AŞAMA SINAVI
ORTAOKUL MATEMATİK

Soru kitapçığı türü

A

29 Ağustos 2020 Cumartesi, 09.30-12.30

ÇÖZÜMLER

1. $ABCD$ bir kare olmak üzere, AC doğrusu üzerinde bir E noktası, C noktası A ile E arasında olacak şekilde alınmıştır. $|AC| = |CE|$ ve $|DE| = 30$ ise, $|AB|$ kaçtır?

Cevap: $6\sqrt{5}$. AC ile BD'nin kesişimi O olsun. $|OD| = x$ dersek, $|AO| = |BO| = |CO| = x$, $|OE| = 3x$ ve $|AB| = x\sqrt{2}$ olur. ODE dik üçgeninde Pisagor teoreminden $|DE| = x\sqrt{10}$ elde edilir. $\Rightarrow x = 3\sqrt{10}$. $\Rightarrow |AB| = 3\sqrt{10} \cdot \sqrt{2} = 6\sqrt{5}$ bulunur.

2. n iki basamaklı pozitif tam sayısının ondalık yazılımı AB olmak üzere, $1, 2, \ldots, n$ sayılarının basamak sayılarının toplamının ondalık yazılımı BA ise, $A + B$ aşağıdakilerden hangisi olabilir?

a) 3 b) 5 c) 7 d) 9 e) 11

Cevap: 9. 1'den n'ye kadar olan sayıların basamak sayılarının toplamı $9 + 2(n-9) = 2n - 9$ olduğundan $10B + A = 2(10A + B) - 9$ elde edilir. Buradan $19A = 8B + 9$ gelir. $\Rightarrow 8|3 \cdot A - 1$. $\Rightarrow A = 3$. $\Rightarrow B = 6$. O halde $A + B = 9$'dur.

3. Bir kesedeki topların %28 i kırmızı, diğerleri ise beyaz renktedir. Kırmızı topların bir kısmı keseden çıkarıldıktan sonra kesede kalan topların %90 ı beyaz ise, kesede kalan top sayısının keseden çıkarılan top sayısına oranı kaçtır?

Cevap: 4. Keseden çıkarılan top sayısının toplam top sayısına oranı x olsun. O zaman $x + (1-x)(1-0.9) = 0.28$ olur ve buradan da $x = 0.2$ gelir. O halde cevap $(1-x)/x = 0.8/0.2 = 4$'tür.

4. Aslı, ardışık birkaç gün boyunca her gün 2 veya 3 şeker yiyerek özdeş 20 şeker içeren bir kavanozdaki şekerlerin tümünü kaç farklı şekilde bitirebilir?

Cevap: 114. Aslı'nın 2 şeker yediği gün sayısı m, 3 şeker yediği gün sayısı n olsun. $2m + 3n = 20$ elde edilir. O halde $(m, n) \in \{(10, 0), (7, 2), (4, 4), (1, 6)\}$. Aslı, m ve n sabit iken şekerleri $\binom{m+n}{m}$ farklı şekilde yiyebilir. O halde cevap $\binom{10}{10} + \binom{9}{7} + \binom{8}{4} + \binom{7}{1} = 1 + 36 + 70 + 7 = 114$.

5. $s(\widehat{ABC}) = 90^\circ$ olan bir ABC dik üçgeninin $[BC]$ ve $[AC]$ kenarları üzerinde sırasıyla D ve E noktaları alınıyor. $2|AE| = 3|EC|$, $|AB| = 6$ ve $|BD| = 2$ ise, BED üçgeninin alanı kaçtır?

Cevap: 12/5. E noktasından BC doğrusuna inen dikme ayağı F olsun. O halde AB ile EF doğruları paralleldir. Dolayısıyla $|EF|/|AB| = |EC|/|AC|$ elde edilir. $2|AE| = 3|EC|$ de kullanılarak $|EF| = 12/5$ bulunur. O halde $\text{Alan}(BDE) = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \frac{12}{5} = \frac{12}{5}$ bulunur.

6. $a > b$ ve $\text{okek}(a,b) - \text{obeb}(a,b) = 28$ koşullarını sağlayan kaç farklı (a,b) pozitif tam sayı ikilisi vardır?

Cevap: 7. $\text{obeb}(a,b) = d$ olsun. O halde x ve y pozitif tam sayılar olmak üzere, $a = dx, b = dy$, $\text{obeb}(x,y) = 1$ ve $x > y$ dir. O zaman $d(xy-1) = 28$ elde edilir. $d = 1,2,4,7,14,28$ olabilir. $d = 1$ için $(x,y) = (29,1)$ tek çözümdür. $d = 2$ için $(x,y) = (15,1)$, $(5,3)$ tüm çözümlerdir. $d = 4$ için $(x,y) = (8,1)$ tek çözümdür. $d = 7$ için $(x,y) = (5,1)$ tek çözümdür. $d = 14$ için $(x,y) = (3,1)$ tek çözümdür. $d = 28$ için $(x,y) = (2,1)$ tek çözümdür. Toplam $1+2+1+1+1+1 = 7$ farklı çözüm elde edilir.

7. Aslı, yeni bir test kitabı aldıktan sonra ilk gün bu kitaptaki soruların bir tanesini, ikinci gün kalan soruların dörtte birini, üçüncü gün kalan soruların bir tanesini, dördüncü gün ise kalan soruların dörtte birini çözmüştür. Son durumda bu kitaptaki çözülmemiş soru sayısı 30 ile 50 arasında olduğuna göre, bu kitaptaki toplam soru sayısının alabileceği değerlerin toplamı kaçtır?

Cevap: 138. Aslı'nın dördüncü gün çözdüğü soru sayısı x olsun. O halde üçüncü gün sonunda kitaptaki çözülmemiş soru sayısı $4x$'tir ve ikinci gün sonunda kitaptaki çözülmemiş soru sayısı $4x+1$'dir. Aslı ikinci gün kalan soruların dörtte birini çözdüğüne göre birinci gün sonunda kitaptaki çözülmemiş soru sayısı $4(4x+1)/3$'tür ve dolayısıyla kitaptaki toplam soru sayısı $4(4x+1)/3+1$'dir. Bunun bir tam sayı olabilmesi için y bir tam sayı olmak üzere $x = 3y+2$ olmalıdır. O halde kitaptaki toplam soru sayısı $16y+13$ ve dördüncü gün sonunda kitaptaki çözülmemiş soru sayısı $9y+6$ olur. $30 \leq 9y+6 \leq 50$ eşitsizliği sadece $y = 3$ veya $y = 4$ iken sağlanır. Sonuç olarak kitaptaki toplam soru sayısı 61 veya 77 olabilir.

8. Başlangıçta bir çember etrafında 28 boş kutu bulunuyor. Her işlemde, her iki komşusu boş olan bir boş kutuya bir top yerleştiriliyor ya da bir top bulunduğu kutunun boş bir komşu kutusuna aktarılıyor. Birkaç işlem sonucunda boş olmayan kutu sayısı en fazla kaç olabilir?

Cevap: 26. Birkaç işlem sonucunda bir kutuda ya 0 ya da 1 tane top bulunduğu kolayca görülür. O halde boş olmayan kutu sayısı kutulara dışarıdan eklenen top sayısına eşittir. Dışarıdan bir topu boş bir kutuya yerleştirebilmek için 3 boş kutu bulunmalı. Dolayısıyla boş olmayan kutu sayısı en fazla 26'dır. Şimdi boş olmayan kutu sayısının 26 olabileceğini gösterelim. Bir kutudan başlayıp saat yönünde sırasıyla kutulara $K_1, K_2, \ldots, k_{28}$ diyelim. $K_1$2e bir top yerleştirelim. K_3'e bir top yerleştirip bu topu K_2'ye aktaralım. K_4'e bir top yerleştirip bu topu K_3'e aktaralım. Benzer biçimde devam edip en son K_{27}'ye bir top yerleştirip bu topu K_{26}'ya aktaralım.

9. Bir ABC üçgeninin $[BC]$ ve $[AC]$ kenarları üzerinde sırasıyla D ve E noktaları alınıyor. $s(\widehat{BAD}) = s(\widehat{EDC})$, $s(\widehat{DAC}) = s(\widehat{ACD})$, $|BD| = 2$, $|AE| = 3$ ve $|CD| = 4$ ise, $|EC|$ kaçtır?

Cevap: 3/2. Açı hesabından $s(\widehat{ABD}) = s(\widehat{ADE})$ bulunur. O zaman $ABC \sim EDA$'dir (A.A.A). Benzerlikten $|BC|/|AC| = |DA|/|EA|$ elde edilir. Ayrıca ikizkenarlıktan $|AD| = |CD| = 4$ bulunur. Buradan da $|AC| = 3 \cdot 6/4 = 9/2$ ve $|EC| = \frac{9}{2} - 3 = 3/2$ olur.

10. Dört basamaklı $4A3B$ pozitif tam sayısının 36 ile bölümünden kalan 19 dur. Buna göre A nın alabileceği değerlerin toplamı kaçtır?

Cevap: 12. Verilen dört basamaklı sayı $36k + 19$ formundadır. Dolayısıyla bu sayının 4 ile bölümünden kalan 3, 9 ile bölümünden kalan ise 1'dir. O halde $4|30 + B - 3 = 27 + B$ ve $9|4 + A + 3 + B - 1 = A + B + 6$ elde edilir. Buradan B'nin 1, 5 veya 9 olacağı görülür. $B = 1$ ise, $9|A + 7 \Rightarrow A = 2$. $B = 5$ ise, $9|A + 11 \Rightarrow A = 7$. $B = 9$ ise, $9|A + 15 \Rightarrow A = 3$. Sonuç olarak cevap $2 + 7 + 3 = 12$'dir.

11. x ve y gerçel sayılar olmak üzere, $9x^2 + 2y^2 - 6xy - 10y$ ifadesinin alabileceği en küçük değer nedir?

a) -24 b) -25 c) -26 d) -27 e) -28

Cevap: -25. $9x^2 + 2y^2 - 6xy - 10y = (3x - y)^2 + (y - 5)^2 - 25 \geq -25$'tir. Eşitlik durumu $x = 5/3$ ve $y = 5$ iken sağlanır.

12. 5×5 bir satranç tahtasının her bir birim karesine 1, 2 ve 3 sayılarından biri, ortak bir kenar paylaşan herhangi iki birim karedeki sayıların toplamı tek sayı olacak biçimde kaç farklı şekilde yazılabilir?

Cevap: 12288. Tahtayı satranç tahtasi gibi siyah ve beyaza boyayalım. Sorudaki koşullara göre, 2 sayısı ya sadece tüm siyah birim karelere ya da sadece tüm beyaz karelere yazılacaktır. Kalan karelere 1 ve 3 sayılarının herhangi biri yazılabilir. Buna göre cevap $2^{13} + 2^{12} = 12288$ olur.

13. Bir $ABCD$ dışbükey dörtgeninde $|AD| = 1$, $|CD| = 3$, $|BC| = \sqrt{3}$, $s(\widehat{ABC}) = 30°$ ve $s(\widehat{DAB}) = 60°$ ise, $|AB|$ kaçtır?

Cevap: 5. C noktasından geçen ve AD doğrusuna paralel olan doğru $[AB]$ kenarını E noktasında kessin. ECB üçgeni $30°-60°-90°$ üçgeni olacağından $|EC| = 1$ ve $|EB| = 2$ olur. $EC \parallel AD$ ve $|EC| = |AD|$ olduğundan $AECD$ bir paralelkenar olur. $\Rightarrow |AE| = |CD| = 3$. $\Rightarrow |AB| = 3 + 2 = 5$ olur.

14. Bir a pozitif tam sayısı için $1 + 20^n + 101^n + 2020^n$ toplamının a ile tam bölünmesini sağlayan en az bir n pozitif tam sayısı bulunuyorsa, a ya *şanslı* sayı diyelim. 7, 11, 13, 17 ve 19 sayılarından kaç tanesi şanslı sayıdır?

Cevap: 4. $S_n = 1 + 20^n + 101^n + 2020^n = (20^n + 1)(101^n + 1)$ olsun. S_1 sayısı 7 ve 17'ye, S_3 sayısı 13'e, S_5 sayısı 11'e tam bölünür. Öte yandan $20^n + 1 \equiv 2 \pmod{19}$ ve $101^n + 1 \equiv 6^n + 1 \not\equiv 0 \pmod{19}$ olduğundan hiçbir n için S_n sayısı 19 ile bölünemez.

15. 1,2,...,60 sayıları her birinde 5 eleman bulunan 12 gruba ayrılıyor. Bu grupların ortancalarının toplamının alabileceği en büyük değer nedir? (Not: $a < b < c < d < e$ sayılarının ortancası c dir.)

Cevap: 498. Grupların ortancaları $a_1 < a_2 < \cdots < a_{11} < a_{12}$ olsun. O zaman $a_{12} \leq 58, a_{11} \leq 55, \ldots, a_{11} \leq 28, a_{12} \leq 25$ olur. Buna göre cevap en fazla $25 + 28 + \cdots + 55 + 58 = 498$ olabilir. Gruplar $\{1, 2, 58, 59, 60\}, \{3, 4, 55, 56, 57\}, \ldots, \{21, 22, 28, 29, 30\}, \{23, 24, 25, 26, 27\}$ şeklinde olursa 498 sayısı elde edilir.

16. 302 tane bilye bir çember etrafına yerleştirilmiş 28 tane kutuya, her bir kutuda en az bir bilye bulunacak şekilde dağıtılmıştır. Herhangi ardışık üç kutudaki toplam bilye sayısı en az 32 ise, bir kutudaki bilye sayısı en fazla kaç olabilir?

Cevap: 14. Bir kutuyu belirleyip bunun dışındaki 27 kutuyu 9 tane ardışık üçlülere ayıralım. O zaman bu kutudaki top sayısı en fazla $302 - 9 \cdot 32 = 14$ olabilir. Şimdi 14 için bir örnek verelim: kutulardaki top sayıları $14, 10, 11, 11, 10, 11, 11, \ldots, 10, 11, 11$ şeklinde olursa koşullar sağlanmış olur.

17. $s(\widehat{ABC}) = 135°$ olan bir ABC üçgeninin çevrel çemberinin merkezi O olsun. B den geçip OC ye paralel olan doğru $[AO]$ doğru parçasını D noktasında, B den geçip OA ya paralel olan doğru $[OC]$ doğru parçasını E noktasında kesmektedir. $|AD| = 1$ ve $|OD| = 24$ ise, $|EC|$ kaçtır?

Cevap: 18. $s(\widehat{ABC}) = 135°$ olduğu için $s(\widehat{AOC}) = 90°$'dir. Ayrıca $ODBE$ bir paralelkenar olduğu için bir dikdörtgendir. $|OB| = |OC| = 1 + 24 = 25$. DOB dik üçgeninde Pisagor teoreminden $|DB| = 7$ bulunur. $\Rightarrow |OE| = 7$. $\Rightarrow |EC| = 25 - 7 = 18$.

18. 10 tane tam sayının küplerinin toplamı 1000 ise, bu 10 sayının toplamı 24, 26, 28 ve 30 sayılarından kaçına eşit olabilir?

Cevap: 1. Bir n tam sayısı için $n^3 - n = (n-1)n(n+1)$ üç ardışık sayının çarpımı olduğundan 6 ile tam bölünür. Yani küpler toplamı ile sayıların toplamı 6 modunda denk olmalıdır. $1000 \equiv 4 \pmod 6$ olduğundan sayılar toplamı $24, 26$ veya 30 olamaz. 28 için örnek: $1000 = 8^3 + 7^3 + 5^3 + 2^3 + 2^3 + 1^3 + 1^3 + 1^3 + 1^3 + 0^3$.

19. a ve b gerçel sayılar olmak üzere, her x gerçel sayısı için $f(x) = x^2 + ax + b$ olsun. $f(x) = 0$ denkleminin sadece bir tane gerçel kökü vardır. $f(3x-4) + f(5x+2) = 0$ denkleminin de yalnızca bir tane gerçel kökü varsa, $f(x) = 0$ denkleminin kökü aşağıdakilerden hangisine eşit olabilir?

a) -13 b) -8 c) 0 d) 12 e) 28

Cevap: -13. $f(x_0) = 0$ olsun. O halde $f(x) = (x - x_0)^2$ olmak zorundadır. O zaman $f(3x-4) + f(5x+2) = (3x - 4 - x_0)^2 + (5x + 2 - x_0)^2$'dir. Bu durumda $f(3x-4) + f(5x+2) = 0$ denkleminin tam olarak bir gerçel kökü olabilmesi için $\frac{x_0+4}{3} = \frac{x_0-2}{5}$ olmalıdır. $\Rightarrow x_0 = -13$. $a = 26$ ve $b = 169$ iken $f(x) = (x+13)^2$ olur ve şartlar sağlanır.

20. 99 toptan herhangi 10 tanesinin en az üçü aynı renktedir. Bu 99 top, aynı renktekiler aynı grupta ve farklı renktekiler farklı grupta olacak şekilde gruplara ayrılıyor. İçerdiği top sayısı diğer hiçbir grubunkinden az olmayan bir gruptaki top sayısı en az kaç olabilir?

Cevap: 25. Aynı renkli toplardan oluşan grupların eleman sayıları 1,24,24,25,25 olursa koşullar sağlanmiş olur. Şimdi her durumda aynı renkli tüm toplardan oluşan ve en az 25 top içeren bir grup olacağını gösterelim. Aksini varsayalım. 1 elemanlı grup sayısı a, birden fazla fakat 25'ten az sayıda top içeren grup sayısı b olsun. O zaman $a + 2b \leq 9$ olacaktır. Bu durumda toplam top sayısı en fazla $a + 24b = (a+2b) + 11 \cdot 2b \leq 9 + 11 \cdot 8 = 97$ olur, çelişki.

21. $s(\widehat{BAC}) = 46^\circ$ olan bir ABC üçgeninin çevrel çemberinin merkezi O olsun. $[AB]$ ve $[AC]$ kenarları üzerinde sırasıyla D ve E noktaları $|BD| = |CE| = |AO|$ olacak şekilde alınmıştır. Buna göre $s(\widehat{DOE})$ nedir?

Cevap: 111°. $|AO| = |BO| = |CO|$ olduğu için DBO ve CEO ikizkenar üçgenlerdir. $s(\widehat{ABC}) = 2x$ ve $s(\widehat{ACB}) = 2y$ olsun. O halde $s(\widehat{DBO}) = 90^\circ - 2y$ ve $s(\widehat{ECO}) = 90^\circ - 2x$. $\Rightarrow s(\widehat{BOD}) = 45^\circ + y$ ve $s(\widehat{COE}) = 45^\circ + x$. $s(\widehat{BOC}) = 2s(\widehat{BAC}) = 92^\circ$. $x + y = (180^\circ - 46^\circ)/2 = 67^\circ$ olduğundan $s(\widehat{DOE}) = 360^\circ - (92"^\circ + 45^\circ + x + 45^\circ + y) = 360^\circ - 249^\circ = 111^\circ$ elde edilir.

22. Pozitif bir tam sayının rakamlarından birinin silinmesiyle oluşan sayıya o sayının *altsayısı* diyelim. Örneğin, 1024 sayısının altsayıları 24, 124, 104 ve 102 dir. n pozitif tam sayısı m pozitif tam sayısının bir altsayısı olmak üzere $m + n = 282021$ ise, m nin basamakları toplamı aşağıdakilerden hangisi olabilir?

a) 22 b) 27 c) 32 d) 37 e) 42

Cevap: 27. m sayısı 7 veya daha fazla basamağa sahip olsaydı $m+n$ de en az 7 basamaklı olurdu. m sayısı 5 veya daha az basamaklı olsaydı $m+n$ toplamı en fazla $99999 + 9999 = 109998$ olurdu. O halde m sayısı 6 basamaklıdır. $m = ABCDEF$ olsun. Silinen rakam F değilse, n'nin de son basamağı F'dir ve dolayısıyla $m + n$ çift sayı olur, ancak 282021 bir tek sayıdır. O zaman silinen rakam F'dir ve $n = ABCDE$ bulunur. $\Rightarrow m + n = (10n + F) + n = 11n + F = 282021$. F bir rakam olduğu için 282021'in 11 ile bölümünden kalan F'dir. $\Rightarrow F = 3$ ve $n = 25638$ elde edilir. O halde m sayısı sadece 256383 olabilir.

23. Sabit hızlarla hareket eden A ve B bisikletçilerinin hızları sırasıyla 24 km/saat ve 30 km/saat tir. Bu iki bisikletçi toplam uzunluğu 1680 km olan bir yola aynı anda başlıyorlar. k bir pozitif tam sayı olmak üzere, bu yol üzerinde bulunan her mola noktasında A bisikletçisi k saat, B bisikletçisi ise $2k$ saat dinleniyor. A ve B bisikletçileri bu yolu aynı anda tamamladıklarına göre, yol üzerinde bulunan mola noktası sayısının alabileceği değerlerin toplamı kaçtır?

Cevap: 24. Dinlenme sürelerini saymazsak, A bisikletçisi yolda B bisikletçisinden $1680(1/24 - 1/30) = 14$ saat daha fazla bulunur. Buna göre, B bisikletçisi A bisikletçisinden 14 saat daha fazla dinlenmiştir. Demek ki A bisikletçisi tam olarak 14 saat dinlenmiştir. Buradan $k|14$ gelir ve

k sayısı 14'ün herhangi bir pozitif tam böleni olabilir. Dolayısıyla cevap $1 + 2 + 7 + 14 = 24$'tür.

24. Her tam sayı k renkten birine, farklarının mutlak değeri asal sayı olan herhangi iki sayı farklı renkte olacak şekilde boyanmışsa, k nin alabileceği en küçük değer nedir?

Cevap: 4. 0,2,5,7 sayıları farklı renkte olmak zorundadır. Bu nedenle $k \geq 4$ olur. 4 ile bölümlerinden aynı kalanı veren sayılar aynı renge boyanırsa, 4 renk ile koşullara uygun bir boyama yapılabilir.

25. Bir ABC üçgeninin iç teğet çemberinin merkezi I olmak üzere, AI doğrusu BIC üçgeninin çevrel çemberini ikinci kez D noktasında kesmektedir. $|AB| = 8, |AC| = 10$ ve $|AI| = 4$ ise, $|ID|$ kaçtır?

Cevap: 16. I noktası ABC üçgeninde iç açıortayların kesişimi olduğu için $s(\widehat{BAI}) = s(\widehat{DAC})$ ve $s(\widehat{ABI}) = s(\widehat{IBC})$'dir. I, B, D, C çembersel olduğu için $s(\widehat{ADC}) = s(\widehat{IBC})$ bulunur. O halde $IAB \sim CAD$'dir (A.A.A). $\Rightarrow$ $|AI|/|AB| = |AC|/|AD|$. $\Rightarrow |AD| = 8 \cdot 10/4 = 20$. $\Rightarrow |ID| = 20 - 4 = 16$.

26. m ve n tam sayılar olmak üzere $4m^3 + 8m^2n - 3mn^2 - 9n^3 = 28$ ise, $m + n$ toplamı aşağıdakilerden hangisi olabilir?

a) 2　　b) 6　　c) 10　　d) 14　　e) 18

Cevap: 6. $4m^3 + 8m^2n - 3mn^2 - 9n^3 = (m - n)(2m + 3n)^2 = 28$. Buradan $m - n$'nin 7 veya 28 olabileceği görülür. $m - n = 7$ ise, $2m + 3n = \pm 2$. $\Rightarrow 5n + 14 = \pm 2$. Buradan n tam sayı çözümü gelmez. $m - n = 28$ ise, $2m + 3n = \pm 1$. $\Rightarrow 5n + 56 = \pm 1$. Buradan sadece $n = -11$ tam sayı çözümü gelir. $\Rightarrow m = 17$ ve $m + n = 6$ bulunur.

27. $x^2 + y^2 = 3$ ve $(x + 1)(y - 1) = 1$ eşitliklerinin her ikisini de sağlayan (x, y) gerçel sayı ikilisi için xy aşağıdakilerden hangisine eşit olabilir?

a) -2　　b) -1　　c) 0　　d) 1　　e) 2

Cevap: 1. $0 = (3 - 1) - 2 \cdot 1 = (x^2 + y^2 - 1) - 2(x + 1)(y - 1) = (x - y + 1)^2$ olduğundan $x = y - 1$ olmalıdır. Bu durumda $1 = (x + 1)(y - 1) = yx$ elde edilir. $x = (\sqrt{5} - 1)/2$ ve $y = (\sqrt{5} + 1)/2$ iken şartlar sağlanır.

28. Toplam ağırlıkları 100 gram olan birkaç taş, hem eşit ağırlıklı 5 gruba hem de eşit ağırlıklı 8 gruba ayrılabiliyor. Buna göre, diğerlerinin hiçbirinden ağır olmayan bir taşın ağırlığı en fazla kaç gram olabilir?

Cevap: 5. İlk önce 5 gr. için 16 taştan oluşan bir örnek verelim. Her birinin ağırlığı 5 gr. olan sekiz taşla her birinin ağırlığı 7.5 gr. olan 8 taş koşulları sağlıyor. Şimdi en hafif taşın (taşlardan birinin) 5 gramdan daha ağır olamayacağını gösterelim. Aksini varsayalım. Koşullar gereği bir taşın ağırlığı en fazla $100/8 = 12.5$ gramdır. 12.5 gram ağırlıklı taşların kümesi A ve $|A| = a$ olsun. Toplam ağırlığı 12.5 gram olan bir grupta A'dan bir taş varsa tam olarak 1, yoksa tam olarak 2 taş bulunur. Buna göre toplam taş sayısı $a + 2(8 - a) = 16 - a$'dır. Öte yandan toplam ağırlığı 20 gram olan bir grupta A'dan bir taş varsa tam olarak 2, yoksa en fazla 3 taş bulunur ve dolayısıyla toplam taş sayısı en fazla $2a + 3(5 - a) = 15 - a$'dır. Sonuç olarak $16 - a \leq 15 - a$ elde edilir, çelişki.

29. $|AB| > |AD|$ olan bir $ABCD$ paralelkenarında $\widehat{DAB}$, $\widehat{ABC}$, $\widehat{BCD}$ ve $\widehat{CDA}$ açılarının iç açıortay doğruları sırasıyla l_A, l_B, l_C ve l_D olsun. l_A ile l_D K noktasında, l_D ile l_C L noktasında, l_C ile l_B M noktasında, l_B ile l_A ise N noktasında kesişmektedir. $|KN| = 6$, $|MN| = 8$ ve $|AD| = 12$ ise, $|AK|$ kaçtır?

Cevap: 36/5. Açı hesabından $KLMN$'nin bir dikdörtgen olduğu ve $ADK \sim CBM \sim ABN$ benzerlikleri kolayca görülür. $|AD| = |BC|$ olduğu için ADK ve CBM üçgenleri aslında eştir. Benzerlik ve eşlikten $|AK|/|BM| = |AK|/|KD| = |AN|/|NB|$ elde edilir. O halde KM doğrusu AB'ye paraleldir ve dolayısıyla $AKD \sim KMN$ bulunur. Pisagor teoreminden $|MK| = 10$ ve benzerlikten $|AK|/|KM| = |AD|/|KN|$ elde edilir. Sonuç olarak $|AK| = 6 \cdot 12/10 = 36/5$ bulunur.

30. Pozitif tam bölenlerinden tam olarak 4 tanesi tam kare olan bir pozitif tam sayısının pozitif tam bölen sayısı aşağıdakilerden hangisi olamaz?

a) 48 b) 56 c) 64 d) 72 e) 80

Cevap: 80. $n = \prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i}$ olsun. n'nin tam kare olan pozitif bölen sayısı $\prod_{i=1}^{k}(\lfloor \alpha_i/2 \rfloor + 1)$'dir. Çünkü bir tam kare bölende p_i'nin kuvveti $0, 1, \ldots, \alpha_i$ sayılarından bir çift sayıdır. Dolayısıyla, $\alpha_i = 1$ olan asallar göz ardı edildiğinde tam olarak 4 tane tam kare böleni olan bir sayı p^6, p^7, p^2q^2, p^2q^3 veya p^3q^3 formundadır. Böyle bir sayının da pozitif bölen sayısı sırasıyla $7 \cdot 2^m$ $(m \geq 0)$, 2^m $(m \geq 3)$, $9 \cdot 2^m$ $(m \geq 0)$, $3 \cdot 2^m$ $(m \geq 2)$ veya 2^m $(m \geq 4)$ olabilir. $48 = 3 \cdot 2^4$, $56 = 7 \cdot 2^3$, $64 = 2^6$, $72 = 9 \cdot 2^3$ ve $80 = 5 \cdot 2^4$ olduğundan cevap 80'dir.

31. a, b ve c pozitif gerçel sayılar olmak üzere, $a+c > 2b$ ve $b+c > 3a$ eşitsizlikleri veriliyor. Buna göre aşağıdakilerden hangisi her zaman doğrudur?

a) $c > a \geq b$ b) $c > b \geq a$ c) $c^2 > 2ab$ d) $3c > 4b$ e) $a+c > b^2$

Cevap: $c^2 > 2ab$. Eşitsizliklerden $\frac{b+c}{3} > a > 2b - c$ ve dolayısıyla $b < \frac{4c}{5}$ elde edilir. $\Rightarrow a < \frac{b+c}{3} < \frac{3c}{5}$. $\Rightarrow 2ab < 2\frac{4c}{5}\frac{3c}{5} = \frac{24c^2}{25} < c^2$ elde edilir. $a = 5.1, b = 7, c = 9$ iken (a), (d) ve (e) şıkları doğru değildir. $a = 2, b = 1, c = 10$ iken de (b) şıkkı doğru değildir.

32. Bir masa üzerinde başlangıçta biri m diğeri n bilyeden oluşan iki öbek bulunuyor. İki oyuncu sırayla hamle yaparak bir oyun oynuyorlar ve her hamlede sırası gelen oyuncu öbeklerin birini masadan alıp diğerini hiçbiri boş olmayan iki öbeğe ayırıyor. Hamle yapamayan oyuncu oyunu kaybediyor. Oyun $(m, n) = (2019, 2020), (2019, 2021), (2020, 2020), (2020, 2021)$ ve $(2021, 2021)$ için birer kez oynanırsa, oyuna başlayan oyuncu bu oyunlardan kaçını kazanmayı garantileyebilir?

Cevap: 3. Başlangıçta en az bir öbekte çift sayıda bilye varsa oyuna başlayan oyuncunun oyunu kazanmayi garantileyebileceğini gösterelim. Oyuna başlayan oyuncu her hamlesinde, tek sayıda bilye içeren bir öbek varsa onu, yoksa herhangi birini masadan alır ve kalan öbeği her biri tek sayıda bileyeden oluşan iki öbeğe ayırır. İkinci oyuncunun hamlesinden sonra mutlaka öbeklerden biri çift biri ise tek sayıda bilye içerir. Birinci oyuncu yine durumu her biri tek sayıda bilye içeren iki öbek durumuna getirir. Birinci oyuncunun hamle yapması gereken her durumda öbeklerin birinde çift sayıda bilye bulunduğu için o her zaman hamle yapabilecek ve bu sonlu oyunu kazanacaktır. Başlangıçta her iki öbekte de tek sayıda bilye varsa, oyuna bağlayan oyuncunun ilk hamlesinden sonra muhakkak bir öbekte çift bir öbekte tek sayıda bilye bulunur. Bu durumda ise ikinci oyuncu benzer strateji ile oyunu kazanmayı garantiler.