

25. Ulusal Matematik Olimpiyatı
İkinci Aşama Sınavı

Birinci Gün
16 Aralık 2017

1. 25 çeşit yemeğiyle ünlü bir A köyünde yapılacak bir düğün için 2017 kişinin yaşadığı komşu B köyünden düğüne bazı kişiler davet edilecektir. B köyündeki her bir kişi bu 25 çeşit yemekten en az birini sevmektedir ve her yemek için B köyünde o yemeği seven en az bir kişi bulunmaktadır. B köyünden düğüne davet edilen kişilerin kümesine, her bir yemek davet edilen en az bir kişi tarafından seviliyorsa, *uygun davetli listesi* diyelim. Her uygun davetli listesinden en az bir eleman içeren bir kümeye ise *kamber grubu* diyelim. Kendisi dışında hiçbir altkümesi kamer grubu olmayan herhangi bir kamer grubundaki herkesin sevdiği bir yemek bulunduğunu gösteriniz.

2. Karşılıklı kenarları paralel olmayan bir $ABCD$ dörtgeninde AB ile CD doğruları X de kesişiyor. A merkezli r_1 yarıçaplı çember ile D merkezli r_2 yarıçaplı çember P ve Q da, B merkezli r_1 yarıçaplı çember ile C merkezli r_2 yarıçaplı çember R ve S de kesişiyor.

$$|XA| \cdot |XB| + r_1^2 = |XC| \cdot |XD| + r_2^2$$

ise, P, Q, R, S noktalarının çemberdeş olduğunu gösteriniz.

3. n pozitif bir tam sayı olmak üzere $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{nn}$ pozitif gerçel sayıları her $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ için $a_{ij} \cdot a_{ji} = 1$ koşulunu sağlıyor. $c_i = \sum_{k=1}^n a_{ki}$ olmak üzere,

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{c_i} \leq 1$$

olduğunu gösteriniz.

25. Ulusal Matematik Olimpiyatı

İkinci Aşama Sınavı

İkinci Gün
17 Aralık 2017

4. $d(a)$ ile a pozitif tam sayısının farklı asal bölenlerinin sayısını gösterelim. Her n pozitif tam sayısı için $k - m = n$ ve $d(k) - d(m) = 1$ şartlarını sağlayan k, m pozitif tam sayıların bulunabileceğini gösteriniz.

5. Azalmayan bir $x_0, x_1, \dots, x_{2017}$ pozitif tam sayı dizisinde $x_0 = 1$ ve $x_1, x_2, \dots, x_{2017}$ altdizisi tam olarak 25 farklı pozitif tam sayı içeriyor.

$$\sum_{i=2}^{2017} x_i(x_i - x_{i-2}) \geq 623$$

olduğunu gösteriniz. Eşitliği sağlayan dizilerin sayısını bulunuz.

6. Her biri 2017 br uzunluğunda olan sonlu sayıda çubuk bir levhanın üzerinde dikey olarak çakılı halde bulunuyor. Bu çubukların her birinin üzerinde serbestçe kaydırılabilen bir boncuk bulunuyor. Bazı boncuk ikilileri lastik parçalarıyla birbirlerine birleştirilmiştir. Bu düzenekte ayrıca, tüm lastik parçaları üzerinde yürüyebilen bir adet Genç Karınca ve sadece uçlarındaki boncukların yükseklikleri arasında 1 br fark bulunan lastik parçaları üzerinde yürüyebilen bir adet Yaşlı Karınca bulunuyor. Genç Karınca lastikleri kullanarak her boncuktan her boncuğa ulaşabiliyor.

Her boncuğun yerden yüksekliğinin tam sayı olduğu ve her lastik parçasının uçlarındaki boncukların farklı yüksekliklerde bulunduğu durumlara *geçerli durum* diyelim. Bu düzenekte en az bir geçerli durum varsa Yaşlı Karıncanın her boncuktan her boncuğa ulaşabildiği an az bir geçerli durumun olduğunu gösteriniz.