

26. Ulusal Matematik Olimpiyatı

İkinci Aşama Sınavı

İkinci Gün
25 Kasım 2018

4. Bir ABC üçgeninde A köşesine ait iç açıortay BC kenarına teğet olan dış teğet çemberi $D \in [AE]$ olacak şekilde D ve E noktalarında kesiyor. $\frac{|AD|}{|AE|} \leq \frac{|BC|^2}{|DE|^2}$ olduğunu gösteriniz.

5. a_1, a_2, a_3, a_4 pozitif tam sayıları bir çember etrafına yan yana olanlar aralarında asal olacak şekilde dizilemiyor. $i, j, k \in \{1, 2, 3, 4\}$ ve $i \neq j, j \neq k, k \neq i$ olmak üzere en çok kaç (i, j, k) sıralı üçlüsü $(\text{ebob}(a_i, a_j))^2 \mid a_k$ şartını sağlar?

6. Başlangıçta masanın üzerinde birbirinden farklı 2018 kutu bulunuyor. İlk aşamada Yazan ve Bozan, ilk hamleyi Yazan yapmak üzere, sırayla 2016 şar hamle yapıyorlar ve her hamlede sırası gelen tahtada yazılı olmayan bir kutu ikilisi seçip tahtaya yazıyor. İkinci aşamada Bozan tahtadaki ikilileri 1 den 4032 ye kadar istediği gibi numaralandırıyor ve k numaralı ikilideki kutulara k şer top koyuyor. Bozan, kutulardaki top sayılarının birbirinden farklı olmasını garantileyebilir mi?

26. Ulusal Matematik Olimpiyatı
İkinci Aşama Sınavı

Birinci Gün
24 Kasım 2018

1.

$$x^2 + y^2 + x + y = xy(x + y) - \frac{10}{27}$$
$$|xy| \leq \frac{25}{9}$$

koşullarını sağlayan tüm (x, y) gerçel sayı ikililerini bulunuz.

2. Bir ABC üçgeninin iç bölgesinde bir P noktası alınıyor. AP, BP, CP doğruları BC, CA, AB kenarlarını sırasıyla D, E, F noktalarında kesiyor. $[BE]$ ışını üzerinde bir Q noktası $E \in [BQ]$ ve $m(\widehat{EDQ}) = m(\widehat{BDF})$ olacak şekilde alınıyor. $BE \perp AD$ ve $|DQ| = 2|BD|$ ise $m(\widehat{FDE}) = 60^\circ$ olduğunu gösteriniz.

3. a_1, a_2, \dots dizisi her n pozitif tam sayısı için $\sum_{i=1}^n a_{\lfloor \frac{n}{i} \rfloor} = n^{10}$ şartını sağlıyor. c herhangi bir pozitif tam sayı olmak üzere, her $n > 1$ pozitif tam sayısı için $\frac{c^{a_n} - c^{a_{n-1}}}{n}$ oranının tam sayı olduğunu gösteriniz.