

27. Ulusal Matematik Olimpiyatı

İkinci Aşama Sınavı

İkinci Gün
22 Aralık 2019

4. $|AB| = |AC|$ şartını sağlayan bir ABC üçgeninin çevrel çemberinin küçük AC yayı üzerinde uç noktalardan farklı bir M noktası alınıyor. BM nin AC yi kestiği nokta E , BMC açısının iç açıortayının BC yi kestiği nokta F olmak üzere $m(\widehat{AFB}) = m(\widehat{CFE})$ eşitliği sağlanıyor. ABC nin eşkenar olduğunu gösteriniz.

5. $f : \{1, 2, \dots, 2019\} \rightarrow \{-1, 1\}$ bir fonksiyon olmak üzere, her $k \in \{1, 2, \dots, 2019\}$ için öyle bir $\ell \in \{1, 2, \dots, 2019\}$ vardır ki,

$$\sum_{i \in \mathbb{Z} : (\ell-i)(i-k) \geq 0} f(i) \leq 0$$

eşitsizliği sağlanır. Buna göre,

$$\sum_{i \in \mathbb{Z} : 1 \leq i \leq 2019} f(i)$$

toplamının alabileceği en büyük değer kaçtır?

6. Bir $n > 2$ tam sayısı ve bir a tam sayısı verildiğinde $n \mid a^d - 1$ ve $n \nmid a^{d-1} + \dots + a + 1$ şartlarını sağlayan bir d pozitif tam sayısı bulunuyorsa, a tam sayısı n -ayrandır diyelim. Bir $n > 2$ tam sayısı verildiğinde, $0 < a < n$ ve $\text{obeb}(a, n) = 1$ olup n -ayran olmayan a tam sayılarının sayısına n nin kusuru diyelim. Kusuru en küçük mümkün değere eşit olan tüm $n > 2$ tam sayılarını bulunuz.

27. Ulusal Matematik Olimpiyatı
İkinci Aşama Sınavı

Birinci Gün
21 Aralık 2019

1. a, b, c pozitif gerçel sayıları

$$(\sqrt{ab} - 1)(\sqrt{bc} - 1)(\sqrt{ca} - 1) = 1$$

şartını sağlıyor.

$$a - \frac{b}{c}, \quad a - \frac{c}{b}, \quad b - \frac{c}{a}, \quad b - \frac{a}{c}, \quad c - \frac{a}{b}, \quad c - \frac{b}{a}$$

sayılarının en çok kaç 1 den büyük olabilir?

2. Her n pozitif tam sayısı için $d(n)$ ile n nin pozitif bölenlerinin sayısını gösterelim. k verilmiş bir tek sayı olmak üzere,

$$\text{obeb}(k, d(a_1)d(a_2) \cdots d(a_{2019})) = 1$$

olmasını sağlayan bir $(a_1, a_2, \dots, a_{2019})$ artan aritmetik pozitif tam sayı dizisi bulunduğunu gösteriniz.

3. 2019 öğrencinin bulunduğu bir okuldaki öğrenci kulüplerine sadece öğrenciler üye olabilmektedir. Her öğrenci kulübünün, kendi üyeleri arasından seçilmiş 12 kişilik bir yönetim kurulu vardır. Bir kulüp toplantısı ancak katılımcıların hepsi kulübün üyeleriye ve kulübün yönetim kurulunun hepsi katılımcılar arasındaysa gerçekleşebilir. Bu okulda, eleman sayısı en az 12 olan her öğrenci kümesinin, tam olarak bir öğrenci kulübünün toplantılarını gerçekleştirebildiği biliniyor. Buna göre, tam olarak 27 üyesi olan öğrenci kulüplerinin sayısının alabileceği tüm değerleri bulunuz.